This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

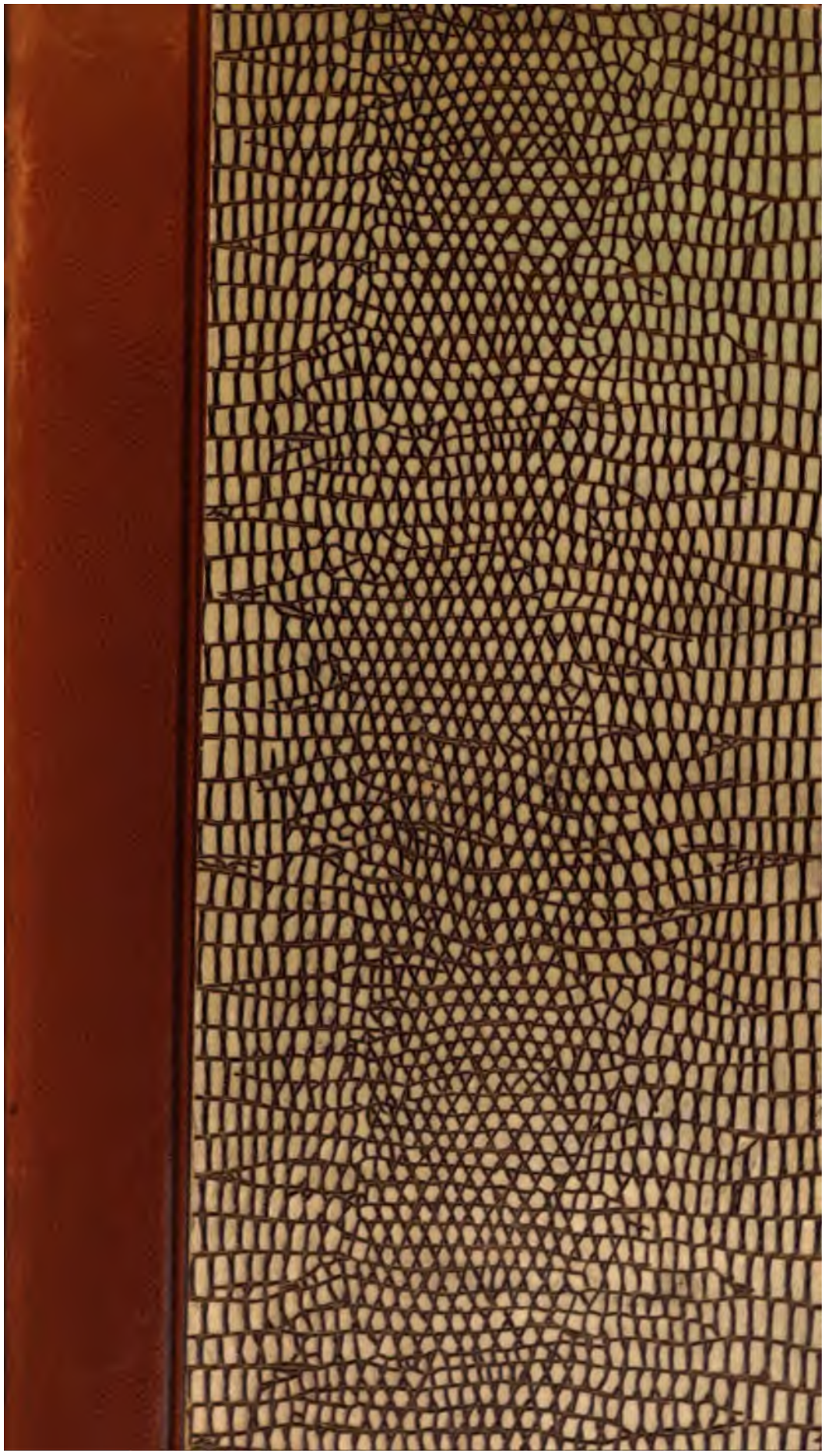
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

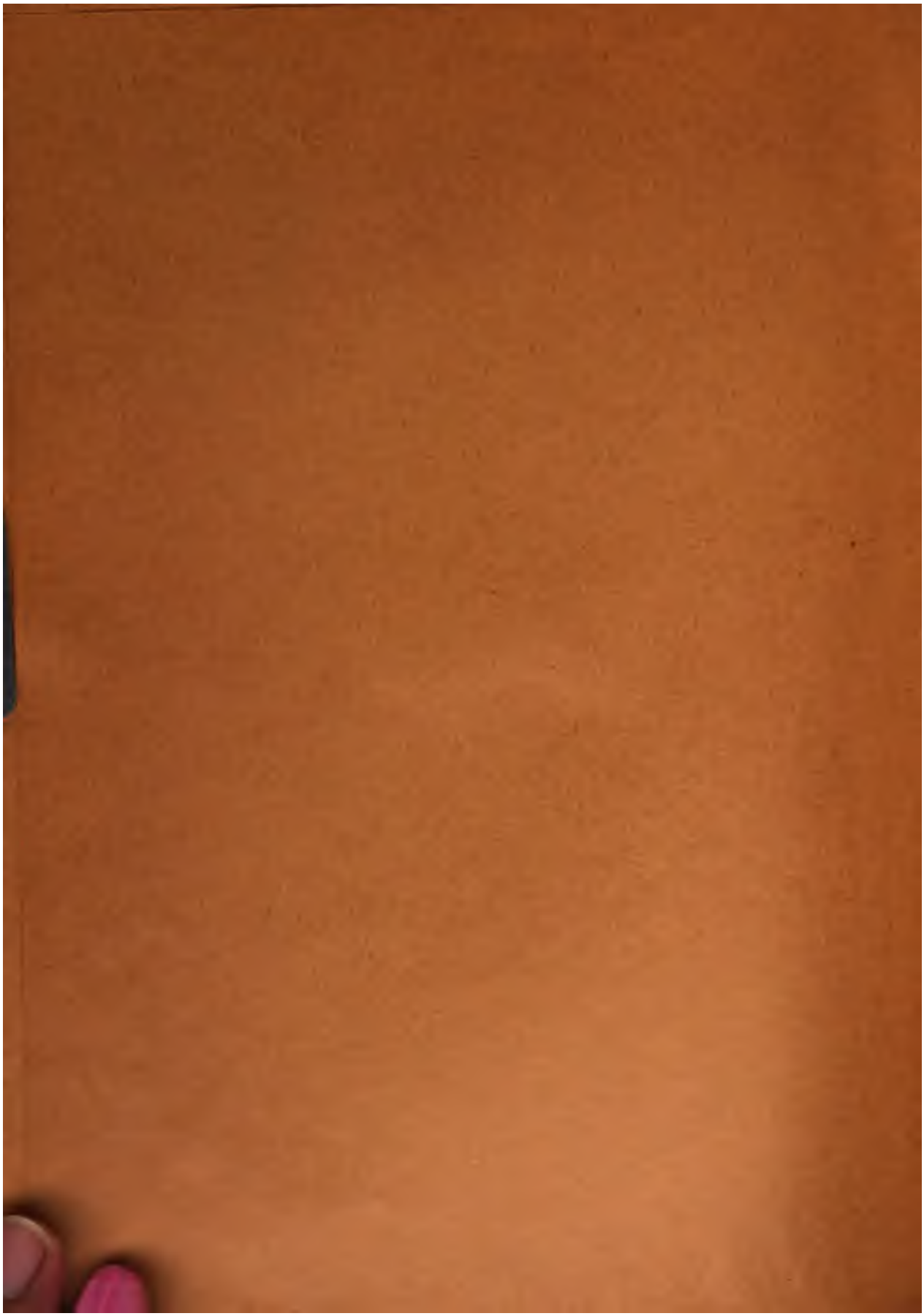
Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



S10.1
G 313

16-



DIE GRUNDSÄTZE UND DAS WESEN

DES

UNENDLICHEN

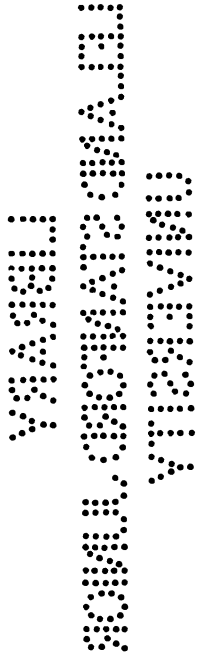
IN DER

MATHEMATIK UND PHILOSOPHIE

VON

DR. PHIL. KURT GEISSLER

LEIPZIG
VERLAG VON B. G. TEUBNER
1902



Alle Rechte,
insbesondere das der Übersetzung,
vorbehalten.

Druck von Theodor Hofmann in Gera.

Vorwort.

Bei einem so schwierigen Gegenstande wie dem vorliegenden erschien es mir ratsam im Anfange ganz ausführlich zu sein und nur wenige Vorkenntnisse beim Leser anzunehmen. Der Mathematiker wird in den ersten Abschnitten vielleicht manches überflüssig finden. Wer nur die mathematischen Kenntnisse der Schule besitzt oder besessen hat, dem wird diese Ausführlichkeit lieb sein. Der Sache selbst kann die Genauigkeit nicht schaden, aber auch Einfachheit in der Darstellung nicht, da es sich nicht um verwickelte Rechnungen, sondern um Grundfragen nnd Grundvorstellungen handelt, und diese gerade bei den Mathematikern sehr schwankend aufgefafst werden, also klare Erörterung verlangen. Das Bedürfnis die Wunder des Unendlichen zu verstehen, fühlt jeder; darum wählte ich nicht eine nur dem Fachmanne verständliche Ausdrucksweise. Später vertieft sich die Untersuchung in wichtige Fragen der höheren Mathematik. Wer bis dahin gründlich gelesen hat, der — hoffe ich — wird, auch ohne Fachmann zu sein, meiner auch dabei möglichst einfachen Darstellung folgen können und in dem Buche einen Weg finden in das Wesen der Mathematik des Unendlichen. Der Fachmann wird hier einigen Ausdrücken begegnen, die ich neu einführen mufste und deren Definition ich schon früher an geeigneten Stellen gab. Darum bitte ich auch diesen von vornherein nichts zu überschlagen.

Andererseits will der erste, mathematische Teil nicht ein mathematisches Lehrbuch sein, sondern nur den Weg betreten und bahnen, auf dem die bisherigen Rätsel des Unendlichen gelöst werden können. Darum ist nur eine Reihe von mathematischen Betrachtungen beispielshalber aufgeführt und die Ausdehnung auf eine gröfsere Anzahl von wichtigen Problemen für andere Gelegenheiten aufbewahrt. Doch hoffe ich diese Beispiele in genügendem Zusammenhange und so gewählt zu haben, dafs dadurch eine verständliche Grundlage gegeben ist.

Die Anregung dazu, eine grofse Anzahl von Einzelabschnitten zu wählen, darunter auch ganz einfache aus den ersten Betrachtungen

M 1350

der elementaren Mathematik, verdanke ich, wie überhaupt die Anregung das Unendliche zunächst nach Veröffentlichung meiner Schrift „Eine mögliche Wesenserklärung für Raum, Zeit, das Unendliche usw." in einem besonderen Buche zu behandeln, Herrn Dr. E. Schulte in Freienwalde, der mich auch zu manchen einzelnen Ausführungen der ersten Abschnitte durch Vorlegung besonders interessanter Fragen veranlafste. Ich schulde ihm wärmsten Dank für unausgesetztes Interesse.

Was den philosophischen Teil betrifft, so erschien mir die Aufgabe für ein Buch zu grofs, das Unendliche auf allen Gebieten der Philosophie zu behandeln. Ich habe die philosophischen Betrachtungen zunächst auf das Unendliche in der Mathematik gestützt und dadurch versucht dem Wesen desselben näher zu kommen. Damit wollte ich nicht sagen, es müsse sich die Behandlung des Unendlichen in der Philosophie nach derjenigen in der Mathematik richten. Es wäre schon an sich wichtig, die seit Leibniz und Newton bestehenden Rätsel und sogar Widersprüche in der Auffassung des Mathematisch-Unendlichen, wenn es geht, zu lösen; es hängen aber diese mathematischen Begriffe darum doch recht eng mit der Philosophie zusammen, weil es auch in der Mathematik Grundbegriffe sind. Die Philosophie beschäftigt sich mit den Grundlagen aller Wissenschaften; darum kann auch die Untersuchung derselben den Anspruch machen der Philosophie nahe zu stehen, auch wenn sie sich zunächst nur innerhalb der Mathematik bewegt. Es sollen also schliefslich die mit mathematischer Sicherheit behafteten Grundsätze soweit auch für das Unendliche auf anderen Gebieten fruchtbar gemacht werden, als das Unendliche in der Mathematik und auf diesen Gebieten gemeinsame Eigenschaften zeigt. Nicht eine ausführliche Behandlung, sondern nur ein Vordringen bis zum Wesen des Unendlichen war die Aufgabe auch für die Philosophie, eine mögliche und, wenn möglich, im Wichtigsten widerspruchsfrei ausgedeutete Auffassung dieses Wesens.

Charlottenburg, am 14. Oktober 1901.

Dr. Kurt Geifsler.

Inhalt.

Seite

Punkte im Unendlichen und Endlichen 1
Der laufende Schnittpunkt 8
Die Weitenbehaftung 12
Die Weitenbehaftung mit dem Endlichen 16
Der Widerspruch der Winkelflächen 18
Die Teilung der unendlichen Geraden 19
Teilung der unendlichen Ebene durch eine und mehrere Gerade 20
Endlichkeit und Unendlichkeit der Winkel. Die Kongruenz des Unendlichen . . 21
Die Lösung des Paradoxons der Winkelflächen 23
Der Beweis der Parallelen durch gleiche Wechselwinkel 25
Das Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung 28
Der Sinn des Satzes von der Seitensumme für das Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung der Seiten. 30
Sinus und Cosinus von unendlichkleinen und rechten Winkeln 34
Die Funktion tangens und cotangens für δ und R-δ 36
Die Unmöglichkeit von 1 : 0 oder *tan* 90° 37
Beispiel für das sogenannte *tan* 90 in der analytischen Geometrie. $\delta \cdot \infty$ und $\infty - \infty$ 40
Der sogenannte Schnitt der Parallelen analytisch 43
Beliebig und Unendlich. $1 : \delta = \infty$. Unvergleichbarklein 44
Ein Mangel des Wortes „unendlich". Übersinnlich- und Untersinnlich-vorstellbar 46
Weitengleichung und Beziehungsgleichung 51
Die Tangente endlicher Kurven 52
Die harmonische Teilung. Ähnlichkeit von Dreiecken mit gemischter Weitenbehaftung. Unendlichkleines zweiter Ordnung. 54
Fernere Verhältnisse des Unendlichen bei Dreiecken mit gemischter Weitenbehaftung. Wieder Unendlichkleines zweiter Ordnung 59
Eine neue Eigentümlichkeit für die Weitenbehaftung mit dem Endlichen 61
Null. Die identische und nichtidentische Gleichung 63

Seite

Null und δ (das Unendlichkleine) 65
Der Punkt und δ 66
Die Ersetzung durch Ungleiches 68
Der Begriff Unbestimmt 68
Stetsunbestimmt und möglicherweiseunbestimmt 70
Limes oder mathematischer Grenzwert 72
Periodische Dezimalbrüche 76
Achileus und die Schildkröte 85
Die arithmetische unendliche Reihe. Die Einheit und die natürlichen Zahlen in Beziehung zur Weitenbehaftung 89
Die Fallstrecke $g/2$ 96
Die aktive Energie $m/2 \cdot v^2$ 102
Die Teilung durch Unendlich und das Krumme 104
Das Tangentenradiendreieck. Die unendlichkleine Gebrochene. Wesenswichtiges Dreieck 107
Die Tangente in einem Punkte? Die Tangente an einer Stelle. Vorläufige Definition von Krumm und Gerade 110
Tangente und Radius, insbesondere beim Kreise 112
Der Kreis mit unendlichgrofsem Radius 114
Die Berührungsstrecken verschieden grofser endlicher Kreise und einer Geraden 117
Die Lage der Normalen. Drei unendlichnahe Punkte eines Kreises 118
Weitere Bestimmtheit des wesenswichtigen Dreiecks. Unendlichnahe Normalen. Anschmiegung eines Kreises an einer Stelle einer Kurve 121
Vergleichung von Kreisumfang und Durchmesser 124
Das Irrationale 133
Berechnung des Kegelmantels 135
Die Berechnung der Kugeloberfläche durch ebene Einheiten 137
Berechnung des Kugelinhaltes aus der Oberfläche und umgekehrt 140
Das Prinzip von Cavalleri 142
Versuche ähnlicher Prinzipe für Linien und Flächen 143
Verbesserte und erweiterte Form für Cavalleri's Prinzip 146
Der Kugelinhalt nach Cavalleri's Prinzip 148
Beweis des erweiterten Cavallerischen Prinzips 150
Die Bewegung und das Unendliche. Anwachsen und Geschwindigkeitsänderung 155
Einteilung einer Linie in endliche und unendlichkleine Teile. Berührung von Kreis und Geraden 157
Behaftungsgesetz und wesenswichtiges Dreieck. Die fertige Kreisabwickelung . 160
Tangens als unbestimmte Beziehung zwischen verschiedenen Weitenbehaftungen in verschiedener Dimension 162
Berührungsstelle verschiedener Kreise und das wesenswichtige Dreieck 163
Die Abwickelung des Kreises und die Cykloide. Das Rollen 165

Seite

Die verzögerte Abwickelung und die gedehnte Cykloide 171
Das Gleiten und die Bewegung 174
Maximum und Minimum (gröfster und kleinster Wert) 178
Das Differential bei Leibniz 188
Das Grenzgebiet eines endlichen Wertes. Kontinuierlich 193
Das wesenswichtige und charakteristische Dreieck in ihrem Zusammenhange . . 197
Die thatsächliche Verknüpfung von Raum und Zeit (am Beispiel des Falles) . . 199
Gleichheit von Zeiten, beurteilt nach Streckengleichheit 201
Die Weitenbehaftung der Zeit 204
Gleichmäfsige und beschleunigte Bewegung durch Streckengleichheit bei zeitlicher Folge. Belieben und Nichtbelieben 207
Geschwindigkeit und Beschleunigung bei Leibniz. Endgeschwindigkeit und Endbeschleunigung 211
Die kontinuierliche Veränderung bei Zeit und Raum. Das Werden 213
Die bildliche Darstellung einer Linie durch zwei Variabele in der Ebene. Die Abhängigkeit 216
Bildliche Darstellung der Zeiten als Strecken einer Geraden und als Zahlen . . 223
Das Differential und der erste Differentialquotient von $g/2 \cdot t^2$ 225
Das Differential und der Differentialquotient der Fallgeschwindigkeit $x = g \cdot t$. 233
Die physikalische (endliche oder künstliche) Geschwindigkeit und Beschleunigung 237
Das zweite Differential, in der Figur der ursprünglichen Funktion dargestellt mittels des wesenswichtigen Dreiecks 240
Die Parabel bei gemischter Weitenbehaftung. Erweiterung des Kontinuierlichen 246
Die teilweise imaginäre Parabel 253
Das System der Haupt- und Zwischenbehaftungen. 1^∞, ∞^∞ 255
Der erste Differentialquotient konstant, stets Null, veränderlich, dann Null, positiv oder negativ 260
Das zweite Differential konstant, stets Null, veränderlich, dann positiv, negativ oder Null 261
Der Krümmungskreis und das wesenswichtige, sowie vermittelnde Dreieck . . . 264
Die Krümmungskreise der Parabel. Die wesenswichtigen Dreiecke erster Ordnung 271
Mängel der Formel für den Krümmungsradius. $\infty : \infty$ 274
Inflexion oder Maximum bei Kurven $y = x^n$. Mängel der Differentiale und Differentialquotienten 277
Die Anschauung der gemischten Differentiale am Beispiele $y = x^3$ 284
Berührung und Anschmiegung 287

Geschichtliches über die Auffassung des Unendlichen 297
Der Begriff der Behaftung als vorläufige Lösung der Schwierigkeiten (Gespräch mit einem jungen Manne) 335

Seite

Führen die Behaftungen von neuem in die alten Schwierigkeiten? 344
Weitenbehaftung und Empfindungen. (Gespräch mit einem Psychologen) . . . 347
Das Sein einer Weitenbehaftung 355
Das Sein von Mannigfaltigkeitsverhältnissen ohne und mit Weitenbehaftungen . 358
Die Stellung der Weitenbehaftungen zu einander und das Sein derselben . . . 360
Weitenbehaftung und Subjektiv-Wirkliches 364
Weitenbehaftung und Objektiv-Wirkliches 366
Weitenbehaftung und das Ansich-Wirkliche 375
Die Weitenbehaftungen und das absolute Ich 378
Die Weitenbehaftungen und der metaphysische Relativismus 380
Ein Sternensystem ohne lebende Wesen, betrachtet in verschiedenen metaphysischen Richtungen 386
Die Lehre von den Behaftungen als Beispiel für die Lösung metaphysischer Widersprüche 398
Seinsvermittlung zwischen Seelischem und Körperlichem. 404
Das Sein eines höchsten Wirklichen und die Weitenbehaftungen 411
Die Metaphysik der Möglichkeiten und die Behaftungen 414

Punkte im Unendlichen und Endlichen.

Gehen wir von der Thatsache aus, daſs jeder Mensch Folgendes versteht: eine gerade Linie läſst sich unendlich lang vorstellen. (Es könnte jemand daran Anstoſs nehmen und statt dessen lieber sagen wollen, sie lasse sich begrenzt vorstellen, könne aber in das Unendliche verlängert werden, man könne sie in Gedanken bis in das Unendliche verfolgen usw. Über den Unterschied solcher Ausdrücke soll hier nicht gesprochen werden und dem einen nicht der Vorzug vor dem anderen gegeben, ebensowenig hier schon festgestellt werden, ob ein Unterschied zwischen unbegrenzt und unendlich vorhanden sei, welches das Wesen des Unendlichen sei usw.)

Wir mögen ferner als Thatsache ansehen, daſs jeder versteht, was ich mit dem Worte „ein Punkt" bezeichnen will, mag das Wesen des Punktes auch erklärt werden, wie es wolle. Auch soll hier nur einfach daran erinnert werden, daſs man sich einen Punkt auf einer Geraden oder in einer Geraden vorstellen kann. Dann bereitet uns die Frage Schwierigkeit: hat eine Gerade im Unendlichen überhaupt einen Punkt oder gar keinen, hat sie daselbst nur einen, nur zwei, mehrere oder unendlich viele Punkte? (Solche Frage kann man bei verschiedenen schwierigen Untersuchungen nicht vermeiden, z. B. bei der von den sich schneidenden und parallelen Geraden.)

1. Ist es möglich zu behaupten, die unendliche Gerade habe im Unendlichen überhaupt keinen Punkt?

Zur Beantwortung wird man natürlich vom Endlichen ausgehen und die Thatsache anerkennen: man kann sich im Endlichen auf einer Geraden überall, wo man will, einen Punkt vorstellen. Kann man behaupten, auf einer Geraden, die nur der Unendlichkeit angehört oder etwa — falls solche Teilung überhaupt möglich ist — soweit sie der Unendlichkeit angehört, könne man sich keinen Punkt vorstellen? Wir werden antworten: wenn es überhaupt noch eine Linie oder ein Linienteil sein soll, so wird auch nach Belieben überall darauf ein Punkt vorstellbar sein. Wer das aber etwa abstreitet, den

kann man nicht widerlegen; er müfste aber sagen, mit welchem Rechte er überhaupt dann noch von einer Linie spreche, und behaupten wollen, dafs seine Vorstellungsfähigkeit unter Umständen Linien liefere, auf denen Punkte nicht mehr vorstellbar wären. Betrachten wir es als eine Thatsache, dafs wir mit solchem Jemand nicht gleiche Vorstellung haben und ihn nicht verstehen können! Damit ist für uns die erste Frage dahin entschieden: auch im Unendlichen kann die Vorstellung der Geraden noch mit der Vorstellung Punkt behaftet sein oder, was denselben Sinn haben soll: es giebt die Vorstellung „unendlich ferner Punkt einer Geraden".

2. Hat die Gerade im Unendlichen nur einen Punkt?

Man könnte behaupten wollen, jeder beliebige vorgestellte Punkt einer von uns ausgehenden Geraden habe auch eine endliche Entfernung, dieselbe könne aber stets gröfser werden, und endlich mache man gewissermafsen einen Sprung und gelange damit zu einem unendlich fernen Punkte (die Gerade sei zwar unendlich, aber doch begrenzt durch einen unendlichfernen Punkt). Oder es könnte jemand sagen, das Unendliche sei eigentlich überhaupt nichts, man dürfe nur sagen, man könne sich überall einen Punkt vorstellen, und diese Möglichkeit habe thatsächlich kein Ende, nur diese Verneinung sei möglich. Letztere Frage gehört zur Aufklärung vom Wesen des Unendlichen und kann uns noch lange nicht beschäftigen. Es genügt hier, wenn anerkannt wird, es könne die Vorstellung eines Punktes auf einer Geraden ebenso wie die Vorstellung der Geraden selbst niemals ein Ende nehmen. Hat sie niemals ein Ende, so geht sie weiter (eine positive Folgerung) und es ist auch noch Vorstellung von Linie und Punkt da, wenn wir so weit in der Vorstellung mit der Linie fortgehen, dafs von keinem Ende, von keiner endlichen Entfernung mehr die Rede ist, dafs wir die Vorstellung eines Endes (auch negativ zu fassen = Nichtfortsetzung) daselbst negieren. Giebt es daselbst nur einen Punkt, den wir natürlich nicht Endpunkt in dem Sinne nennen dürften, wie eine endliche Strecke einen Endpunkt hat, über den hinaus sie als diese endliche Strecke nicht mehr vorhanden ist, oder giebt es daselbst mehrere Punkte, die alle keine letzten Punkte sind, über die die Linie immer noch hinausgehen kann, die aber doch auch nicht um verschiedene, angebbare Vielfache irgend eines uns sinnlich wahrnehmbaren endlichen Linienstückes von uns entfernt sind?

Zunächst mufs man hier berücksichtigen die Thatsache der ersten Dimension: man kann auf einer Geraden (oder Linie) von einem vorgestellten Punkte aus zwei entgegengesetzte Richtungen,

unterscheiden. Darf man das eine Dimension nennen? Man spricht doch von zwei Richtungen! Kann man sich mit einer Richtung begnügen und etwa wie auf einem Kreise bei dieser einen Richtung bleiben und doch schliefslich alle Punkte der Geraden durchlaufen (zum Anfangspunkte zurückkehren)? Zunächst wollen wir nicht berücksichtigen, dafs dabei doch die Vorstellung des Krummen notwendig wäre. (Genaue Untersuchung des unendlichen Kreises später!) Sondern es sei — so könnte es jemand auffassen wollen — jede Strecke der Linie, solange sie endlich ist, als gerade anzusehen, es sei gewissermafsen eine Kreislinie, die von einem bei uns im Endlichen liegenden Anfangspunkte ausgeht, ohne merkbare Krümmung von da nach beiden Seiten geht und schliefslich in einen jenem Anfangspunkte gleichsam (falls man das Gleichnis des endlichen Kreises heranzöge) gegenüberliegenden Punkt übergehe. Dann könnte man in einer Richtung ins Unendliche und von da ohne Umkehr wieder ins Endliche zurückkehren. Aber dann müssen wir doch fragen, wie es mit den jenem unendlichfernen zunächst liegenden Punkten bestellt sei. Wenn es wirklich dieselbe Linie sein soll, die nach dem unendlichfernen Punkte führt, so mufs man sich auch beliebig viele Punkte vorstellen können bis zum unendlich fernen Punkte hin, z. B. in unmittelbarer Nähe desselben. Diese lägen alsdann in endlicher Entfernung, während der ihnen ganz nahe im Unendlichen liegen soll. Das ist nur möglich durch einen Sprung, und ein Sprung widerspricht dem Wesen der fortgesetzten Linie. Wir müssen erstens dabei bleiben, dafs man wenn man will, von einem Punkte auf einer Geraden in zwei verschiedenen Richtungen forteilen, aber auch ebensogut bei irgend einem anderen Punkte anfangen kann, also die zwischen diesen beiden Punkten liegende Strecke nach Belieben in der einen oder in der entgegengesetzten Richtung zu durchlaufen vermag. Trotz der beiden Richtungen bleibt es eine Linie, und wir sprechen darum nur von einer Dimension einer Linie, solange wir in Gedanken nur innerhalb derselben uns fortbewegen. In dieser einen Dimension kann man nach beiden Richtungen von einem Punkte aus erstens nicht nur forteilen, sondern auch zweitens in das Unendliche gehen, und es ist nicht möglich sich nur einen einzigen unendlich fernen Punkt vorzustellen, wenigstens gewifs dann nicht, wenn man denken dürfte, man gelange wie bei einem unendlichen Kreise beim Reisen in der einen Richtung in das Unendliche und von da von der anderen Seite her wieder an den Ausgangspunkt im Endlichen zurück. Aber wie steht es, wenn wir von dem Gleichnisse (oder was es sonst sein mag) des Kreises absehen? Wir fragen:

3. Hat die Gerade zwei unendlichferne Punkte auf beiden Seiten? Dann müfsten jedem derselben andere Punkte beliebig nahe liegen, und es stellt sich wieder der Widerspruch ein, dafs ein Punkt plötzlich unendlichfern sein soll, während die in beliebiger Nähe liegenden endlich entfernt von uns sein sollen. Unser Resultat ist: Wenn die Gerade überhaupt ins Unendliche gehen soll, so mufs sie auch beliebig viele Punkte im Unendlichen haben. Aber es drängt sich die Frage auf, an welcher Stelle denn das Endliche aufhört und die unendlich entfernten Punkte zuerst vorzustellen sind. Eine solche Stelle läfst sich nicht bezeichnen. Liegt irgendwo ein unendlich entfernter Punkt, so müssen auch die auf beiden Seiten von ihm und zwar sicher alle von ihm um endliche Strecken entfernten Punkte im Unendlichen liegen, und man weifs niemals, wo jene Grenzstelle liegt; es kann eine solche gar nicht geben. Stelle ich mir vor, ein Punkt liege im Endlichen, etwa, wenn man das lieber will, im Anschauungsfelde des Betreffenden (natürlich wird er in demselben nur vorgestellt, nicht gesehen), so kann man ebensowohl sagen, er liege für einen Beobachter, den man sich in einem davon unendlich entfernten Punkte denkt, im Unendlichen. Daraus gewinnen wir vorläufig die Sätze:

Ein im Endlichen vorgestellter Punkt ist stets auch vorstellbar als ein Punkt im Unendlichen; ein jeder Punkt liegt zugleich im Endlichen, Unendlichgrofsen und (was leicht entsprechend einzusehen ist, durch fortwährende, bis ins Unendliche gehende Verkleinerung der Entfernung zweier Punkte) Unendlichkleinen.

Es giebt keinen Punkt, der nur dem Unendlichen angehörte. Wir sind genötigt, uns künftig, sobald wir ganz genau sein wollen, nicht mehr des Ausdrucks zu bedienen „ein Punkt im Endlichen, ein Punkt im Unendlichen", sondern des Ausdruckes „ein endlich entfernter, ein unendlich entfernter Punkt". Wir werden durch diese Ausdrucksweise gewisse Irrtümer vermeiden, die aus jener falschen sich leicht ergeben und bisher schon viele irregeführt haben. Auch bei unserer neuen Ausdrucksweise mufs gedacht werden: von einem anderen Punkte endlich entfernt. Wir dürfen, wenn wir gewisse Irrtümer vermeiden wollen, nur von endlichen und unendlichen Strecken sprechen. Zwar ist hier noch nicht untersucht worden, ob eine endliche oder eine unendliche Strecke eine für sich mögliche Vorstellung ist oder ob sie in Schwierigkeiten führt, aber vermeiden können wir es überhaupt nicht, von endlichen und unendlichen Strecken zu sprechen, untersuchen müssen wir deren Schwierigkeiten jedenfalls;

also führen wir jene Schwierigkeiten der Punkte und Strecken nur auf diejenigen der Strecken zurück, wenn wir jene vorsichtigere Ausdrucksweise annehmen.

Man darf sich allerdings auf einer Geraden einen von einem Punkte A unendlich entfernten Punkt X vorstellen, aber man meint dann nicht, dafs A für sich ein nur im Endlichen und X ein nur im Unendlichen liegender Punkt sei. Indessen könnte man behaupten, es müsse der Ausdruck: ein Punkt liege im Endlichen, doch irgend eine Vorstellung bedeuten. Allerdings, aber es bedeutet, dafs mit der Vorstellung eines Punktes A, der unter Umständen im Endlichen oder Unendlichen liegen kann, Vorstellungen verknüpft sind, die wir endlich nennen, z. B. die Vorstellung eines Systems von endlichen Strecken. Es soll erst später untersucht werden, ob man sich endliche Strecken ohne den Gegensatz des Unendlichen überhaupt vorstellen kann und umgekehrt, es genügt hier zu sagen, dafs der von uns lieber vermiedene Ausdruck „ein Punkt im Endlichen" viel mehr bedeutet als einen Punkt und keinesfalls bedeuten darf, dafs der Punkt nur im Endlichen liege. Später ist natürlich zu untersuchen, was eine Strecke bedeutet, die von A bis X, vom Endlichen bis in das Unendliche geht, und ob diese Strecke als gleich oder ungleich betrachtet werden kann oder mufs einer zweiten Strecke von A bis zu einem zweiten unendlich entfernten Punkte Y usw.

Führen wir erst die Untersuchung über die Punkte weiter! Die bereits erwähnte Thatsache, dafs man sich auf jeder Strecke, mag sie so grofs oder klein sein, wie sie wolle, unendlich viele Punkte vorstellen kann, fordert zur Frage heraus: liegen auf zwei gleich grofsen Strecken gleichviel und auf verschiedengrofsen Strecken zwar je unendlich viele, aber doch verschieden viele Punkte?

Da könnte jemand antworten, bei unendlich könne von gleichviel oder verschiedenviel überhaupt nicht die Rede sein. Diese Behauptung ist falsch, wie sich sogleich und bei vielen anderen Untersuchungen ergeben wird. Eine andere Antwort wäre: es lässt sich so im allgemeinen nicht sagen, ob auf gleichen Strecken gleichviel Punkte liegen. Wenn jemand aus der Gleichheit der Strecken sofort auf die Gleichheit der Punkteanzahl schliefsen wollte, so setzte er voraus, dafs durch eine Anzahl von Punkten eine Strecke wie aus etwas Gleichartigem zusammengesetzt werden könnte. Das ist aber thatsächlich falsch, denn ein Punkt ist etwas dem Wesen nach von der Linie Verschiedenes; er hat keine räumliche Ausdehnung, während selbst die kürzeste Linie eine solche hat, nämlich nach einer Dimension oder zwei Richtungen.

Eine Reihe von scheinbaren Widersprüchen, die mit unserer Frage zusammenhängen, können wir jetzt lösen, z. B. den folgenden. (Figur 1.)

Vom Punkt P ausgehend mögen beliebig viele Strahlen die Strecke AB und die doppelt so grofse A_1B_1 durchschneiden; natürlich sind alsdann PA_1 und PB_1 durch A und B halbiert, wie die elementare Mathematik durch Kongruenz des Dreiecks PAB und eines durch eine Linie von B parallel zu PA_1 abgeschnittenen Dreiecks beweist. Man kann dann behaupten, dafs zu jedem (!) beliebigen Schnittpunkte der Strecke AB auch ein ganz bestimmter, ihm und keinem anderen zugeordneter Punkt auf A_1B_1 gehört, nämlich derjenige, welcher auf demselben Strahle liegt. Es giebt keinen einzigen Punkt auf A_1B_1, zu dem nicht ein zugehöriger auf AB sich finden liefse, und umgekehrt. Also — so möchte man schliefsen — ist es unmöglich, dafs auf A_1B_1 etwa mehr Punkte lägen als auf AB und umgekehrt; vielmehr liegen auf beiden verschieden grofsen Strecken gleich viel Punkte. Ich kann aber auch zeigen, dafs verschieden viele Punkte darauf liegen, indem ich den Strahlenausgangspunkt nach P_1 oder P_2, d. h. nach irgend einem anderen Punkte derart verlege, dafs die beiden von da nach A und B gezogenen Strahlen nicht gerade die Strecke A_1B_1 aus der verlängerten Geraden A_1B_1 herausschneiden. Dann liegen z. B. auf AB_2 ebensoviele Punkte wie auf A_1B_1, während vorher auf AB ebensoviel lagen. Da aber nun auf B_2B jedenfalls noch beliebig viele Punkte vorstellbar sind, so liegen auf AB erstlich gleichviel Punkte wie auf A_1B_1, zweitens mehr und drittens — beim Ausgangspunkte P_2 — weniger als auf A_1B_1. Das sind unzweifelhaft Widersprüche. Dieselben beruhen auf unvorsichtiger Ausdrucksweise und ungründlichem Betrachten und verschwinden, wenn man die Sätze aufstellt:

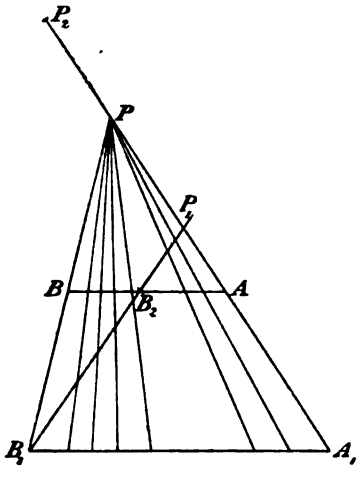


Fig. 1.

Auf jeder Strecke liegen unendlich und zugleich unbestimmt viele Punkte, d. h. ohne Hinzufügung besonderer Bedingungen kann die Anzahl der Punkte kein bestimmtes Verhältnis zu einer anderen unendlichen Anzahl von Punkten haben. Durch Hinzufügung bestimmter Umstände aber, nämlich dafs die Punkte aufzufassen sind als Schnittpunkte bestimmt liegender, von

einem bestimmten Anfangspunkte ausgehender Strahlen, sind die unendlichen Anzahlen nicht mehr unbestimmt, sondern haben ein bestimmtes Verhältnis.

Man könnte einwenden, es sei doch unmöglich, dafs eine Strecke AB (Figur 1) durch blofse Verschiebung parallel zu sich selbst bis zur Geraden A_1B_1 hin oder nach P zu eine andere Punkteanzahl erhielte. Warum soll das unmöglich sein? Eben deshalb, weil beim Verschieben die Strecke noch ebensogrofs wie vorher vorgestellt werden soll? Da haben wir den Fehler! Also auf die Gröfse der Strecke kommt es an, wenn man die Punkteanzahl bestimmt vorstellen will? Nein, die Länge einer Strecke hat an und für sich mit der Anzahl der vorgestellten Punkte gar nichts zu thun. Es ist auch falsch einfach zu sagen: auf einer Strecke liegen so und so viele Punkte. Aus solcher Nachlässigkeit im Ausdrucke entstehen die Widersprüche. Das Richtige ist es, den Ausdruck zu gebrauchen: „mit Punkten behaften", aufser wenn Mifsverständnisse nicht zu befürchten sind. In welcher Weise behaftet wird, das hängt von den Umständen ab, die wir unserer Vorstellung vorschreiben. Sind diese anders, so ist auch die Behaftung, die Zusammensetzung der Vorstellungen anders. Bei anderer Lage des Strahlenbüschels sind die Umstände anders, und anders ergeben sich die zusammengehörigen Schnitte. Also wollen wir uns künftig trotz der Umständlichkeit des Ausdruckes folgender Sätze bedienen:

1. Jede Strecke kann mit der Vorstellung von unendlichvielen Punkten behaftet werden, und die Anzahl dieser Punkte ist ohne Hinzufügung weiterer Umstände unbestimmt.

2. Eine Strecke kann bei Hinzufügung weiterer bestimmter Vorstellungen — sagen wir „begrenzender Umstände" — mit einer zwar unendlichen, aber im Verhältnis zu den Punkten, die auf einer anderen Strecke unter gleichen Umständen vorgestellt werden, bestimmten Anzahl von Punkten behaftet werden.

Die Sätze 1 und 2 widersprechen sich nicht. Der Satz: „Eine Strecke AB hat ebensoviel und gleichzeitig mehr Punkte wie eine zweite Strecke A_1B_1" ist nunmehr falsch. Er mufs heifsen: Eine Strecke AB kann bei bestimmter Länge, bei bestimmtem Längenverhältnis und bei der Vorstellung bestimmter Zuordnung der Punkte entweder mit der Vorstellung von ebensovielen oder von verschiedenvielen unendlichvielen Punkten behaftet werden (je nach der Art der begrenzenden Umstände).

Es scheint daraus ein Satz hervorzugehen, den wir mit allem Vorbehalt, d. h. zunächst nur als richtig für vorstehende Untersuchung aussprechen wollen:

Das Unendliche ist nur dann gleich oder steht in sonst einem Verhältnisse, wenn es begrenzt ist. (Grundsatz von der Gleichheit des Unendlichen.)

Der laufende Schnittpunkt.

Eine Gerade PS_1 (Figur 2) schneide eine feste Gerade G. Dreht man dann die Gerade PS_1 in bestimmter Drehungsrichtung (mag nun auch Drehen oder Drehungsrichtung bedeuten, was es wolle — ich deute damit nur eine jedem Menschen verständliche Vorstellung

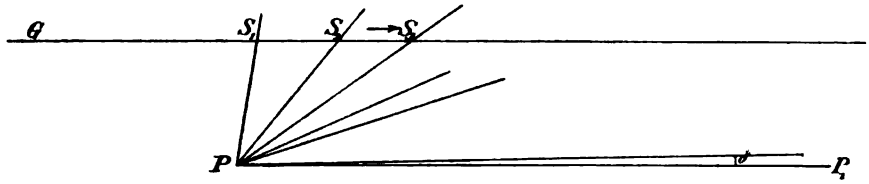


Fig. 2.

an), so ergiebt sich fortwährend ein neuer Schnittpunkt oder eine neue Lage des Punktes S_1 (ob es richtiger ist „ein neuer Schnittpunkt oder das Letztere zu sagen, mag noch dahingestellt sein). Und zwar bewegt sich der Schnittpunkt oder schliefsen sich die Schnittpunkte stetig aneinander, d. h. es giebt keine noch so kleine Stelle der Geraden von S_1 aus nach rechts hin, auf welcher nicht Schnittpunkte der Reihe nach vorkämen (mag auch sonst stetig bedeuten was es wolle — davon später!). Der Schnittpunkt läuft, wie jeder Mensch sich thatsächlich ausdrücken könnte und wie es jeder Mensch thatsächlich versteht, schliefslich bis in das Unendliche auf der rechten Seite, oder genauer, er hat auch unendliche Entfernungen von seiner ersten Lage und zwar unendlich viele solcher unendlichen Entfernungen, nachdem er vorher beliebig viele endliche Entfernungen gehabt hat. Der Schnittpunkt liegt nicht plötzlich unendlich entfernt, und es ist auch keine Stelle angebbar, an der er anfängt unendlich entfernt zu liegen, und doch wird die Entfernung, wie wir sagen „schliefslich" unendlich.

Eine zweite Thatsache wollen wir gleich hinzunehmen, nämlich dafs es bei weiterer Drehung eine Lage PP_1 giebt, bei der G und die gedrehte Gerade — wie man sagt — „parallel" sind oder sich gar nicht mehr schneiden, aber doch noch derselben Ebene angehören

(was dies auch sonst bedeuten mag; es soll nur an eine jedem bekannte Sache erinnert werden). Abweisen müssen wir nach vorigem Abschnitte den Ausdruck: „die parallelen Geraden schnitten sich im Unendlichen oder hätten einen Punkt im Unendlichen gemeinsam oder auch zwei, auf jeder Seite einen". Solche, allerdings in Mathematikbüchern bisher noch recht beliebte Redeweise führt unter Umständen auf Widersprüche, die wir vermeiden wollen. Vielmehr sagen wir: es giebt unendlichviele unendlichferne Schnittpunkte sowohl rechts wie links. Ein solcher wird dann erreicht, wenn die Entfernung von S_1 bis dahin unendlich groſs wurde oder aber wenn die gedrehte Gerade noch um einen unendlichkleinen Winkel δ (ich werde mit diesem Buchstaben der Kürze halber oft etwas Unendlichkleines bezeichnen) von der parallelen Lage PP_1 abweicht (es mag dabei ein Winkel bedeuten, was er wolle; es genügt hier, wenn man versteht, was ich meine).

Es scheinen sich nun die folgenden, Thatsachen angebenden Sätze widersprechend gegenüber zu stehen.

1. Eine der unendlich entfernten Lagen des Schnittes oder eine der unendlich geringen Abweichungen von der parallelen Lage wird thatsächlich erreicht, aber nicht durch einen Sprung (denn es soll beim stetigen Drehen der Geraden und Vorwärtseilen des Schnittes kein Überspringen von Stellen geben).

2. Eine der unendlich entfernten Lagen wird auch niemals beim allmählichen wirklichen Drehen oder Fortlaufen an irgend einer Stelle erreicht, man hat vielmehr beim steten Fortgehen von jeder endlichen Lage aus um irgend ein merkliches Stück stets endliche Entfernungen, wenn auch immer gröſsere, und stets endliche angebbare Abweichungen von der parallelen Lage, wenn auch immer kleinere, und man kann nicht sagen: von diesem groſsen bez. kleinen endlichen Werte ab tritt das Unendliche an die Stelle des Endlichen.

Wenn man dies recht überlegt, möchte man versucht sein, das Unendliche überhaupt abzuleugnen, um so aus allen Widersprüchen herauszukommen; zu diesem Wunsche werden wir oft und immer wieder von neuem verleitet. Aber er ist unerfüllbar und kann stets durch die Frage widerlegt werden: verstehst du, was unendlich heiſst? Oder stellst du dir gar nichts dabei vor, wenn ich dieses Wort gebrauche? Verstehst du mich wirklich, so stellst du dir auch etwas dabei vor, was nicht das Endliche oder Beliebiggroſse oder Beliebigkleine, sondern wirklich das Unendlichgroſse und Unendlichkleine ist. Es nützt nichts, zu sagen, das Unendliche läge vielleicht ganz auſserhalb unserer Vorstellungsfähigkeit. Liegt es wirklich auſserhalb der-

selben, wo soll es dann aber liegen: nicht mehr im menschlichen Geiste? Wie kann er dann daran denken? Wäre es ein ganz unbekanntes x, wie kommt man dann dazu, gerade die Behauptung, die Gerade sei unendlichlang und es gäbe unendlichferne Punkte, mit der Vorstellung der endlichen oder beliebig langen Geraden zusammenzubringen? Es muſs doch wohl etwas Bestimmtes sein, das der Vorstellung der endlichen Geraden in gewissem Sinne zugeordnet und doch in gewissem Sinne davon verschieden ist! Jedermann versteht mich, wenn ich sage, man stelle sich die Gerade beliebig groſs, sehr groſs, noch gröſser und immer noch gröſser vor, und wenn ich dann frage: kann dies Gröſservorstellen einmal ein Ende haben, oder sind wir gezwungen zu sagen, es gehe bis in das Unendliche? Nun, wenn wir zu letzterem genötigt sind, so besitzen wir auch die Vorstellung des Unendlichen. Freilich ist es eine ganz andere Frage, ob wir das Unendlichgroſse oder Unendlichkleine sinnlich anschauen können. Überhaupt wird uns noch immer groſse Schwierigkeiten bereiten der Versuch, das Unendlichkleine, Endliche und Unendlichgroſse durch andere Worte ganz genau zu unterscheiden — hier haben wir es zunächst mit den Widersprüchen der beiden Sätze zu thun.

Ist in unserer Anschauung etwa ein Widerspruch, in unserem Geiste ein Riſs vorhanden? Oder sollte nicht etwa der Widerspruch vermeidbar sein, und von einem Fehler in der Art herrühren, wie wir diese eigentümlichen Dinge auszudrücken gewohnt sind?

Es ist unzweifelhaft richtig, daſs ein naher Zusammenhang zwischen dem Endlichen und Unendlichen besteht, beide sind nicht so verschieden, wie Stoff und Gedanke, Wille und viereckig, Moral und hellgrau. Wir werden nicht verlangen dürfen, die Wörter endlich und unendlich ganz auszumerzen, alle wissenschaftliche Erklärung kann nicht über gewisse thatsächliche Grundvorstellungen hinwegkommen; aber wir werden das Endliche und Unendliche nicht unvorsichtig mit Wörtern behaften wie Sprung oder Sprunglosigkeit, wenn wir sehen, daſs bei dieser einfachen Behaftung sich Widersprüche zeigen. Wenden wir auf den thatsächlich vorhandenenen Zusammenhang, den wir gern mit dem Worte Übergang bezeichnen würden, die Ausdrucksweise an: Der Übergang erscheint erstens sprunghaft, und zweitens zugleich doch nicht sprunghaft, so könnte der Fehler möglicherweise in dieser Wortverbindung liegen, wenn er nicht etwa in der Sache selbst vorhanden ist. Es stände sehr schlimm mit der Wissenschaft und mit unserem Verstande, wenn Widersprüche im Wesen selbst steckten. Vielleicht ist dem so; aber solange wir nur irgend können, werden wir nach Entfernung der Widersprüche streben.

Vielleicht darf man den Übergang vom Endlichen zum Unendlichen weder mit dem einfachen Worte Sprung, noch mit seinem Gegenteile, Sprunglosigkeit, behaften, ebensowenig wie man einfach sagen durfte: auf zwei gleichen Strecken liegen erstlich gleichviel und zweitens verschieden viel unendlichviele Punkte. Durch Vergrößern und Verkleinern einer Strecke mittels beliebig, aber endlich naher Punkte gelangt man nicht zum Unendlichen, vielmehr muß man diese Vorstellung des Zufügens oder Abnehmens beliebiger endlicher Strecken aufgeben und vermag nun die Vorstellung des Unendlichen zu fassen. Dieses Aufgeben ist kein völliges Aufgeben der räumlichen Anschauung; die gemeinsame Grundlage des Endlichen und Unendlichen, das Räumliche, wird nicht verlassen. Verlassen wird etwas anderes, nämlich das genannte beliebige Vergrößern und Verkleinern; dieses Verlassen dürfen wir nicht einfach als das Gegenteil vom gleichmäßigen Fortfahren des Verkleinerns und Vergrößerns auffassen. Nicht dies ist ein Sprung, sondern ein Sprung im Gegensatze zu jedem gleichmäßigen Fortsetzen wäre das plötzliche Überspringen einer endlichen Strecke. Der Übergang zum Unendlichen dagegen ist kein solcher Gegensatz zur Sprunglosigkeit. Vermeiden wir also den Ausdruck Sprung und Sprunglosigkeit, sagen wir nicht, der Schnittpunkt S laufe im Endlichen beliebig weit fort und gehe nun entweder durch einen Sprung oder ohne Sprung, d. h. von einer bestimmten Stelle ab in die unendliche Ferne über! Sagen wir lieber, es sei unstatthaft und führe zu Widersprüchen, wenn man durchaus verlangen wolle, daß der Schnittpunkt entweder plötzlich ins Unendliche springe oder von einer bestimmten Stelle ab, etwa einer Grenze zwischen dem Endlichen und Unendlichen, ohne Sprung, aber durch Überstreichen der Grenze die Eigenschaft der unendlichen Entfernung annehme! Bleiben wir vorsichtigerweise einfach bei den folgenden Thatsachen stehen:

Unsere Vorstellung verlangt, daß der Schnittpunkt unendlich viele Lagen so habe, daß von ihnen aus bis zur endlichen Lage S_1 eine unendliche Entfernung hergestellt werden muß; ferner, daß beim Fortrücken in bestimmter Richtung zunächst nur endliche Entfernungen vorhanden sind, schließlich aber auch unendliche. Dieses Aufeinanderfolgen — hier ausgedrückt durch die Wörter »zunächst« und »schließlich« — steht in einem thatsächlichen räumlichen Zusammenhange derart, daß die unendlichen Entfernungen zu derselben Geraden gehören wie die endlichen, oder auch, daß man sich umgekehrt erst unendliche, dann endliche Entfernungen vorstellen könne. In dieser Thatsache sei aber nicht enthalten, daß es einen sprunghaften Über-

gang von einem zum anderen gebe, und auch kein Überschreiten einer Grenzstelle. Oder kurz: es giebt weder einen räumlichen Sprung vom Endlichen in das Unendliche (oder umgekehrt), noch giebt es sprungloses räumliches Hinübergehen vom einen ins andere; aber das Endliche und Unendliche kann dennoch thatsächlich als existierend angesehen werden auf der Geraden, auf der Ebene, im körperlichen Raume. Es kann auch zuerst das Endliche vorgestellt werden, dann das Unendliche oder umgekehrt. Hierbei ist indessen wohl zu bedenken, dafs wir dies vorläufig nur in allgemeinem Sinne meinen, wir haben noch nicht erklärt, was eigentlich die Vorstellung z. B. der endlichen Strecke ist, es wäre möglich, dafs sich bei genauerer Untersuchung zeigte, in solcher Vorstellung ruhe, ohne dafs wir es aussprechen, noch allerlei Anderes (Verhältnisse, Gegensätze oder dergl.). Hier möge das Vorstellen des Endlichen nur heifsen: es wird die Aufmerksamkeit gelenkt auf etwas ganz Bestimmtes — mag nun auch noch aufser dieser in die Mitte der Aufmerksamkeit gerückten Vorstellung allerlei Anderes nebenher vorgestellt werden oder daran grenzen, es berühren, mit daran beteiligt sein.

Wie wir die Vorstellung der Strecke mit einer unbestimmten oder bestimmten Anzahl von Punkten je nach den Umständen behafteten, so auch behaften wir die Linien mit der Vorstellung des Endlichen oder Unendlichen.

Die Weitenbehaftung.

Stellt man sich einen Kreis vor, so kann dies geschehen, ohne dafs dabei ausdrücklich ausgesprochen wird, ob er endlich oder unendlich sein soll. Es geht in der Vorstellung eines Menschen, der aufgefordert wird sich einen Kreis vorzustellen, mancherlei vor, das wert ist genauer untersucht zu werden. Es mag sein, dafs ein Kind, dem Kreise an die Tafel gezeichnet wurden, später die Gewohnheit hat zunächst nur die Erinnerung an die Tafel und die weifsen Kreise an derselben wachzurufen, und dafs es dann erst die unwesentlichen Umstände in der Vorstellung wegläfst oder nicht mehr beachtet. Es mag sein, dafs die Vorstellung eines Kreises ohne diejenige der umgebenden Fläche nicht als möglich anerkannt wird. Jedenfalls ist es etwas Neues, wenn man hinzufügt, der Kreis solle ganz aufserordentlich klein oder er solle unendlich klein vorgestellt werden. Es kann der Betreffende seine Vorstellungsfähigkeit so weit im Zaume haben, dafs er bei der ersten Aufforderung sich einen Kreis vorzustellen, eine

etwaige Nebenvorstellung von gewisser Gröfsenausdehnung oder, was richtiger ist, eine nebenhergehende Vergleichung mit anderen Gröfsen wie der Tafel, der Stube, des Zeichenpapieres, nicht festhält oder wenigstens aus seiner Aufmerksamkeit möglichst herausstreicht. Dann wird ihm die darauf folgende Aufforderung sich nun den Kreis in gewisser Weite vorzustellen, als etwas Neues erscheinen, was einen neuen Vorgang in seiner Vorstellung hervorruft. Wer streng das

Berichtigung.

Die Seiten 14 und 15 stehen infolge einer Vertauschung ihrer Seitenzahlen falsch und müssen in umgekehrter Reihenfolge gelesen werden; S. 15 ist S. 14 mit dem Anschlufs an S. 13, S. 14 ist dagegen erst S. 15.

unsinnlich, d. h. in reiner Vorstellung sei der unendliche Kreis unmöglich. Bedenken wir dabei zunächst, dafs sowohl der Punkt, wie die endliche Strecke, der endliche Kreisumfang und die endliche Kreisfläche immer nur vorgestellt und nicht direkt sinnlich so wahrgenommen werden, wie es ihre nach der richtigen Vorstellung gewonnenen Begriffe verlangen (z. B. der Punkt als ausdehnungslos usw.). Bedenken wir ferner, dafs auch die endliche Vorstellung eines Kreises im allgemeinen (mit beliebigem Radius) etwas ist, was sich vom Sinnlichen bereits losgemacht hat; denn das Sinnliche giebt nur bestimmte Radien oder deren Vergleichung. Es mag ja nun sein, dafs der einzelne Kreis allgemein gedacht auch im Endlichen keine Einzelvorstellung mehr ist, denn er soll ja keinen bestimmten Radius haben; zur Vorstellung überhaupt aber müssen wir ihn doch wohl rechnen, er ist nicht ein bloſser Begriff, zum mindesten doch ein Begriff, der sich fortwährend an die Vorstellungsfähigkeit hält. In diesem Sinne sprechen wir von der Vorstellung eines endlichen Kreises, auch werden

das Unendliche damit nicht vertrüge, könnten wir auch nicht vom Endlichen aus uns die unendliche Kreisfläche vorstellen! Will man aber lieber den schwierigen Begriff des Anwachsens zufügen, so muſs man dabei ebenfalls das Endliche schlieſslich fortwerfen! Man wird die Aufforderung, daſs „ein Kreis“ nur im Gebiete des Endlichen liegen solle, als eine weitere Ausgestaltung seiner bisherigen Vorstellung oder wenigstens als eine nun deutlich festzuhaltende Nebenbedingung auffassen. Leichter werden die meisten das Hinzutreten von neuen Bedingungen zugeben, wenn man sie auffordert, erst einen Kreis „im allgemeinen“ und dann einen unendlichkleinen oder unendlichgroſsen Kreis sich vorzustellen.

Nach den früheren Untersuchungen führt es in Widersprüche, wenn man sich den Übergang vom Endlichen zum Unendlichen oder umgekehrt entweder wie einen räumlichen Sprung oder auch wie ein Nichtspringen, wie ein Gleiten vorstellt. Das eine scheint anfangs zu gehen, und das andere auch, bald sieht man ein, daſs beides sich widerspricht und auch jedes für sich nicht klar ist. Es ist zwar eine den Raum betreffende Thätigkeit, die man im Geiste ausführt, wenn man sich einen allgemein gedachten Kreis nun unendlichklein vorstellt, aber es ist nicht dieselbe Art von Thätigkeit, die bei Bildung der allgemeinen Kreisvorstellung stattfand. Ähnlich steht es auch mit der Vorstellung von Punkten auf einer Strecke, ähnlich steht es auch mit der Vorstellung einer Fläche, wenn man bis dahin nur eine Linie bewuſst in der Anschauung hatte, überhaupt mit dem Hinzutreten von Dimensionen.

Ich könnte deswegen das Hinzudenken des nur Endlichen oder nur Unendlichen zu einer allgemeinen Raumvorstellung vergleichsweise bezeichnen mit dem Ausdrucke: „Hinzufügung einer Weitendimension“, doch ist die Verschiedenheit der Dimensionen so sehr anders als die Verschiedenheit des Endlichen und Unendlichen, daſs ich dies Wort lieber nicht als Bezeichnung hinzuziehen will, wenn auch der Zusatz „Weiten-“ einen Unterschied klar machen würde. An einer anderen Stelle*) bildete ich dafür das Wort „Weitengebiet“. Ich würde diesen Ausdruck nur dann festhalten mögen, wenn man erwarten könnte, daſs jeder hier das Wort Gebiet nicht auffaſste etwa als ein Landes-gebiet, ein räumlich abgegrenztes, in das man hineinspringen, und aus dem man herausgleiten kann. In das Weitengebiet des Unendlichen z. B. kann man vom Endlichen nicht derart gelangen, ohne

*) Siehe meine Schrift: „Eine mögliche Wesenserklärung für Raum, Zeit, das Unendliche und die Kausalität, nebst einem Grundworte zur Metaphysik der Möglichkeiten. Berlin W. Verlag Gutenberg A.-G. 1900. Preis 2 M.

wir (worüber noch viel später die Rede sein wird) bei solcher Vorstellung nicht ganz und gar eine gewisse geistige Anschauung von vielen oder wenigstens noch einem zweiten Kreise verbannen; wir reden zwar nicht davon, aber wir haben doch bei der allgemeinen Vorstellung »Kreis« in der sich erinnernden Vorstellung ein gewisses Gemenge — wenn ich so sagen darf — von allerlei Kreisen. Dieses Gemenge ist derart, daſs man dabei ganz klar weiſs, es komme auf die Vorstellung des einen von bestimmter Gröſse nicht mehr an. Vielmehr ist es uns nicht bloſs begrifflich abstrakt, sondern auch vorstellungsmäſsig klar, daſs man beim allgemeinen Kreise sich zwar gleiche Radien vorstellen solle (aber nicht solche von bestimmter Länge) und unendlich viele Endpunkte von Radien und eine krumme ausgedehnte Linie und einen Mittelpunkt. D. h. man hat aus der Vorstellung entweder den Radius bestimmter Länge wieder entfernt, oder man hat sich einen solchen überhaupt gar nicht mit vorgestellt. Man kann also auch nicht behaupten, daſs der Radius des allgemeinen Kreises von endlicher Länge sein solle — denn das ist doch wohl auch eine Art von Bestimmtheit, die niemand in den Begriff eines Kreises im allgemeinen mit aufnimmt. Wenn man aber auch abstreitet, das Endliche im allgemeinen sei eine Art Bestimmtheit, kann man doch nicht leugnen, die Vorstellungsfähigkeit erlaube eine Ausdehnung in das sogenannte Unendliche. Das Unendliche kann nicht etwas bloſs Logisches sein; wie kommt denn die Logik dazu, das Unendliche gerade bei der Raumvorstellung zu denken? Das hat doch einen räumlichen Grund, beim Räumlichen giebt es das Unendliche, und nur daher nimmt die Logik den Stoff für ihren Gedanken einer Verneinung. Schade, daſs die Sprache für das Unendliche im Raume nur den negativen Ausdruck hat. Nötig ist das nicht. Bei der Zeit sagt man positiv: „ewig“. (Über den scheinbaren Widerspruch des Endpunktes einer Unendlichen folgt Genaueres in späteren Abschnitten). Nun mache man sich klar, ob man nach Ausdehnung der Geraden oder des Radius bis in das Unendliche noch meint, ein endliches oder ein unendlich ausgedehntes Gebilde in der Vorstellung zu haben. Doch wohl das letztere, denn endlich soll es ja nicht mehr sein; es darf also als solches nirgends ein Ende haben. Dann aber giebt uns der endliche Kreis überhaupt nicht das Richtige an, giebt nicht den richtigen Ausgang mehr. Wir müssen ja das Eigentümliche des Endlichen absichtlich fortwerfen (!!) und etwas anderes dafür nehmen. Nicht aber werfen wir das fort, was zur Vorstellung des Kreises sonst gehört, die Gleichheit der Radien, den Mittelpunkt, die Endpunkte. Wenn sich

dafs Widersprüche entstehen. Darum bilde ich jetzt lieber das Wort „Weitenbehaftung“ und sage: eine räumliche Vorstellung, etwa die zweier Strecken, kann ich im allgemeinen fassen, ohne mich schon entschieden zu haben, ob es endliche, unendlichkleine oder unendlichgrofse sein sollen; jedenfalls ist es möglich, so weit zu abstrahieren dafs in der Vorstellung absichtlich nur noch das Verhältnis zweier Strecken im allgemeinen vorhanden ist und dann zu sagen: nun sollen dieselben endlich oder unendlich sein. Dies will ich nunmehr so ausdrücken: es wird die Vorstellung der Strecken mit der Weitenvorstellung des Endlichen, bez. des Unendlichkleinen oder Unendlichgrofsen behaftet. Oder: es sei von vornherein eine räumliche Vorstellung mit einer bestimmten Weitenvorstellung behaftet. Derjenige Satz aber, welchen wir für nötig halten zur Vermeidung der früher besprochenen Widersprüche, lautet:

Die Weitenbehaftung einer räumlichen Vorstellung ist eine Eigenschaft, die in thatsächlich verschiedener Weise vorhanden ist; die eine Weitenbehaftung kann nicht ohne weiteres in die andere übergehen, weder sprungweise noch sprunglos gleitend, sondern es bedarf die Beziehung zwischen verschiedenen Weitenbehaftungen besonderer Untersuchungen.

Die Weitenbehaftung des Endlichen.

Man dürfte nicht ohne weiteres jemandem recht geben, der behauptete, die Seele habe zuerst nur endliche räumliche Vorstellungen und bilde erst hinterher unendlichkleine oder unendlichgrofse. Es könnte z. B. eingewendet werden, dafs das Endliche ohne den Gegensetz des Unendlichen nicht klar wäre. Jedenfalls ist es schwer, das Wesen des Endlichen ohne den Gegensatz des Unendlichen oder auch mit demselben auszusprechen, ohne wieder das Wort endlich zu gebrauchen. Und doch mufs uns daran liegen, alles auf einfachere Elemente zurückzuführen, namentlich dann, wenn die Gefahr vorliegt, dafs der Begriff leicht vertauscht werden kann. Es sieht nämlich so aus, als könne man den Gegensatz des Unendlichkleinen zum Endlichen ohne weiteres mit dem des Endlichen zum Endlichgrofsen vertauschen: das Endliche ist dem Unendlichgrofsen gegenüber unendlichklein. (Entsprechend wäre das Unendlichgrofse zweiter Ordnung, falls wir auf solches stofsen sollten, dem Unendlichgrofsen erster Ordnung gegenüber unendlichgrofs usw.) Daher scheinen alle Weitenbehaftungen nur relativ zu sein.

Indessen scheint das Endliche doch einen Vorzug zu besitzen: wir sehen und fühlen und sind geneigt, zu behaupten, das Unendlichkleine könnten wir nicht wahrnehmen. Alles, was wir mit Hilfe eines Mikroskopes noch erblicken können, werden wir zwar sehr klein, aber niemals unendlichklein nennen; und wenn wir sagen, ein von uns mit dem Fernrohre geschauter Stern sei unendlich weit, so wissen wir ganz gut, dafs wir uns ungenau ausdrücken: seine Entfernung ist angebbar, und zwar mit endlichen, wenn auch sehr grofsen Mafsen; der Astronom hält es nicht für eine unsinnige Aufgabe danach zu suchen, er ist überzeugt, eine endliche, durch irgend eine zwar mit sehr vielen Dezimalstellen ausgedrückte, aber doch endlich angebbare Zahl unter glücklichen Umständen und bei Vorhandensein genügender endlicher Apparate finden zu können. Wir wissen zwar nicht, bis zu welcher Kleinheit bez. Gröfse uns die Instrumente und Berechnungen schliefslich führen werden, denken vielmehr, ein solches „schliefslich" habe keinen rechten Sinn; alles, was wir hoffen irgendwie durch die Sinne, auch vermittels der Instrumente wahrnehmen zu können oder dessen Gröfse wir hoffen durch Mafse im Vergleich zu den wirklich sinnlich leicht wahrnehmbaren berechnen zu können, nennen wir endlich.

Man würde gleichwohl fehl gehen, wenn man sagen wollte, also käme z. B. in der Physik nur Endliches vor; jeder mathematisch gebildete Physiker würde dem sofort widersprechen. Wir brauchen zur mathematischen Beschreibung der Natur durchaus die Vorstellung des Unendlichen (Begriff der Geschwindigkeit, Beschleunigung, Differential usw. siehe später!) Aber man möchte aus dem Gesagten schliefsen, es sei wohl möglich, die Weitenbehaftung des Endlichen durch einen anderen Begriff sicher zu stellen, der allerdings nicht einfacher, und dessen Wesen nicht leichter zu erklären ist, der aber doch allen als etwas Thatsächliches aufserordentlich geläufig ist, den der sinnlichen Wahrnehmung. Einwenden liefse sich sofort, es sei wünschenswert, umgekehrt das Sinnlichwahrnehmbare durch den Begriff des Endlichen zu erklären; indessen fragt es sich, ob das nötig ist. Die Sinnesempfindung erscheint uns immer als ein gewisser klarer, thatsächlicher Anfang alles Vorstellens, als eine Einleitung alles Denkens, derart, dafs viele Philosophen sich beim Beweise zweifelhafter Dinge besonders gern auf das „Evidente" stützen (was übrigens auch einen nichtsinnlichen Sinn haben kann). Darum sei es erlaubt, vorläufig den Satz hinzustellen:

Die Weitenbehaftung „des" Endlichen (kurz für: mit dem Endlichen oder die endliche Weitenbehaftung) findet auf

alles das Räumliche Anwendung, was sinnlich wahrnehmbar ist (unter Benutzung sinnlicher Wahrnehmungen von der Anschauungsfähigkeit gebildet wird) oder doch als möglicherweise sinnlichwahrnehmbar vorgestellt wird. Läfst man die Eigenschaft „sinnlichwahrbar" fort, so können alle räumlichen Vorstellungen mit der Weitenvorstellung des Unendlichgrofsen oder Unendlichkleinen behaftet werden.

Es giebt Vorstellungen, bei denen man, wie es scheint, zugleich mit der Weitenbehaftung des Endlichen und Unendlichen zu thun hat. Werden zwei sogenannte parallele Geraden, die einen endlichen Abstand voneinander haben, von einer dritten geschnitten, so kann diese dritte eine solche Richtung haben, dafs ihr abgeschnittenes Stück endlich ist, während die Parallelen in das Unendliche laufen. Bekanntlich wird der Satz aufgestellt, dafs bei gleichen Wechselwinkeln die Geraden parallel sind und umgekehrt, es beruht darauf der Satz über die Winkelsumme im Dreieck, und darauf beruhen wieder die meisten Sätze der Planimetrie. Das Parallelenproblem zeigt bedeutende Schwierigkeiten, auf deren Lösung die gründlichsten Denker mit immer neuen Zweifeln zurückkommen. Ich mufs sie im Folgenden eingehend untersuchen.

Der Widerspruch der Winkelflächen.

Es sei der Winkel α (Figur 3) halb so grofs als der Winkel β. Ich will hiermit nichts weiter sagen, als was die Figur zeigt, wie man auch den Winkel definieren mag. Legt man nun beliebig viele Linien

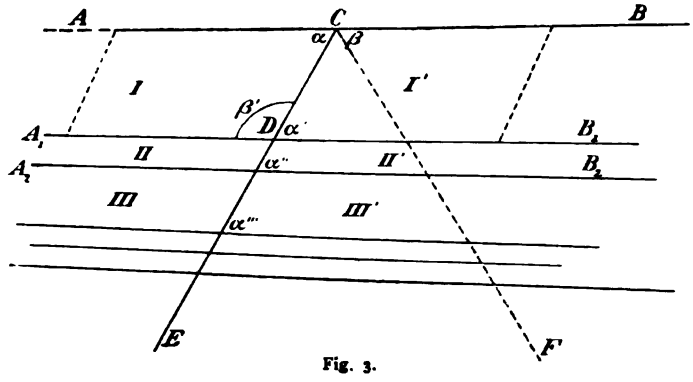


Fig. 3.

A_1B_1, A_2B_2 usw. in beliebigen endlichen Anständen von einander, sodafs $\alpha' = \alpha'' = \alpha'''$ usw. stets $= \alpha$ ist, so werden die beiden Winkelflächen derartig durchschnitten, dafs man die Streifen I und I', II und

II', *III* und *III'* usw. bis in das Unendliche paarweise miteinander vergleichen kann. Fast alle Mathematikbücher pflegen zu beweisen, daſs zwei Streifen wie *I* und *I'* mit gleichen Wechselwinkeln α und α' sich (durch Herumdrehen, sodaſs *C* auf *D* fällt, α auf α', die Nebenwinkel β auf β') zur Deckung bringen lassen, also kongruent seien, obwohl sie bis in das Unendliche gehen. Ebenso seien *II* und *II'* kongruent usw. Was kongruent ist, ist auch gleich, wie ohne weiteres von allen zugegeben werden würde. Danach ist das ganze Ebenenstück links von der Schneidenden *CE* gleich derjenigen rechts von dieser Linie d. h. die unendlichen Winkelflächen sind gleichgroſs.

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man von *C* auf *AB* (Figur 3) paarweise gleiche Stücke nach beiden Seiten abträgt und durch die Endpunkte derselben Parallelen zu *CE* legt.

Andererseits aber kann man sich den Winkel β halbiert denken durch eine von *C* (Figur 3) ausgehende Gerade *CF*, dann läſst sich die unendliche Winkelfläche α mit der unendlichen Winkelfläche $\frac{1}{2}\beta$ vollkommen zur Deckung bringen. Demnach ist im Widerspruche zum vorigen Resultate die Winkelfläche von β gröſser als die von α,

Man hat nun entweder die Möglichkeit anzunehmen, daſs in der Raumanschauung des Menschen ein Widerspruch liegt, der, wie es scheint, durch das Unendliche verursacht wird, oder irgendwelche Fehler in den vorigen Schlüssen nachzuweisen. Zu ersterem hat man sich mehrfach entschlossen, letzteres erfordert von uns eine ganz genaue Untersuchung aller einzelnen vorkommenden Anschauungen und Schlüsse, vor allem des Endlichen und Unendlichen. Eine Reihe von Einzelbetrachtungen ist nötig, welche zur Auffindung von neuen Erklärungen und Sätzen führen werden. Zuerst kam eine unendliche Linie *AB* vor, die durch einen Punkt *C* geteilt wurde — was können wir über eine solche Teilung sagen?

Die Teilung der unendlichen Geraden.

Von einem Punkte *C* aus, der sowohl dem Endlichen wie dem Unendlichen angehört (nach früheren Betrachtungen), kann man ohne Zweifel nach beiden Seiten auf der Geraden bis in das Unendliche beliebige endliche oder unendliche Strecken abgetragen denken. Man kann nicht sagen, ob die beiden von *C* aus in das Unendliche und dann noch beliebig fortlaufenden Teile der Geraden oder besser die endlichen oder unendlichen beliebig langen abgetragenen beiden Stücke gleich seien oder ungleich; die beiden Teile sind unbestimmt unendlich (mag nun auch eine Vorstellung unendlich

oder unbestimmt unendlich ohne einen unbewufsten oder unbeachteten Gegensatz zum Endlichen existieren oder nicht).

Man ist aber imstande auf der einen Seite und auf der anderen in der Vorstellung bis zu einem unendlichweit entfernten Punkte zu gehen und dann zu sagen, diese Vorstellung sei so gewählt, dafs die beiden unendlich langen Strecken entweder als gleich oder auch (in anderem Falle) als ungleich in irgend einem bestimmten Verhältnisse angesehen werden. Es ist bisher für uns hier nicht entschieden worden, ob man sich überhaupt irgend eine endliche oder unendliche Strecke ganz für sich in bestimmter Länge vorstellen kann (ich werde dahin gelangen dies für unwahrscheinlich oder die gegenteilige Ansicht für möglich zu erklären; cf. meine bereits citierte Schrift: Eine mögliche Wesenserklärung usw.). In folgender Form aber werden wir hier einen neuen Grundsatz aufstellen.

Grundsatz. Man kann durch Hinzufügung von begrenzenden Bestimmungen das Verhältnis von zwei unbestimmten unendlichlangen Strecken in der Vorstellung so gestalten, dafs man dieselben als gleich oder in irgend einem anderen bestimmten Verhältnisse stehend betrachtet. Die begrenzenden Bestimmungen sind für eine Linie ausdrückbar durch Punkte, die Endpunkte der vorgestellten unendlichen Strecken.

Teilung der unendlichen Ebene durch eine und mehrere Gerade.

Auch die beiden Teile, in welche eine unendliche Gerade die allseitig unendliche Ebene zerlegt, sind unbestimmt unendlich. Stellen wir uns die Gerade als unendlich nach beiden Seiten hin vor, so behaften wir sie mit der Weitenvorstellung des Unendlichen. Ebenso behaften wir die Ebene von der Geraden aus nach beiden Seiten hin mit dieser Vorstellung in der zweiten Dimension. Es fragt sich, ob es nötig ist zu gleicher Zeit diese Behaftung nach beiden Dimensionen hin vorzunehmen, oder ob man nach Belieben in der einen Dimension mit endlicher oder unendlicher und in der anderen ebenso mit endlicher oder unendlicher Weitenvorstellung behaften kann. Ebenso wie uns die Möglichkeit gegeben ist nach unserem Belieben nur die eine Richtung innerhalb der Linie in unsere Aufmerksamkeit zu rücken, so steht es uns auch thatsächlich frei uns in irgend einer Dimension nach Belieben entweder endliche oder unendliche Strecken abgetragen vorzustellen und sie zu vergleichen.

Es ist nicht nötig auf einer Geraden ein Lot zu errichten, um in die zweite Dimension von der Geraden aus zu gelangen, es genügt, dafs unter irgend einem Winkel eine schneidende Gerade gelegt wird. Trägt man von C aus (Figur 3) nach der Seite von E oder der entgegengesetzten (oben) gleiche endliche oder unendliche Stücke ab, so sind nun die mittels (durch die Teilpunkte) gelegter Geraden parallel zu AB erhaltenen Streifen nur in der Dimension nach oben oder unten als gleich zu betrachten, nicht aber in ihrer zweifachen Dimension als unendlichlange Streifen. Um sie vollkommen als gleich anzusehen, müfste man auch auf AB von C aus je gleiche endliche oder unendliche Begrenzungen vornehmen und so Parallelogramme herstellen. Thut man dies nicht, so bleibt ihr Gröfsenverhältnis im Endlichen sowohl wie im Unendlichen unbestimmt. Des Rätsels Lösung beruht vor allem darauf, dafs es dem Geiste möglich ist in jeder Dimension für sich ohne Rücksicht auf die andere die Behaftung mit einer Weitenvorstellung vorzunehmen. Nur ist noch zu untersuchen, ob jeder Streifen überall gleich breit sein mufs, und wie es mit den Winkeln steht, die entstehen, wenn man ihn sich nicht überall gleich breit vorstellt.

Endlichkeit und Unendlichkeit der Winkel.

Die Kongruenz des Unendlichen.

Die von zwei unendlichlangen Strahlen in gewisser Hinsicht begrenzte Fläche ist unendlich und zwar nicht derart wie eine Gerade, sondern nach zwei Dimensionen hin. Wird der Winkel wirklich als solche nicht weiter begrenzte Ebene definiert, so sind Unbestimmtheiten in ihm enthalten, er ist unbestimmt unendlichgrofs, obgleich etwas an ihm, nämlich die in gewisser Hinsicht begrenzenden Geraden, nicht eine völlige Unbestimmtheit erlauben. Sein Wesen ist ein flächenhaftes, die Gröfsen, welche ihn ausmachen, sind Flächengröfsen. Ist aber die aus Flächengröfsen irgend wie zusammengesetzte Gröfse nur in irgend einer Richtung unbestimmt unendlich, so ist auch sein Wesen unbestimmt unendlich. Wie bei der Geraden und der durch eine Gerade geteilten Ebene ist es auch bei ihm möglich, sich endliche oder unendliche Grenzen vorzustellen; und soweit man die Winkel mit solchen Vorstellungen behaftet, insoweit ist ihre Gröfse vergleichbar.

Am einfachsten wäre es scheinbar, auf beiden Schenkeln gleiche, endliche oder unendliche Strecken abzutragen und die Endpunkte zu verbinden. Indessen müssen wir uns, um Widersprüche zu vermeiden,

daran halten, daſs wir hier mit Weitenvorstellungen behaften und dies auf jede Dimension für sich anzuwenden ist. Es ist dabei nicht nötig, daſs die beiden Geraden senkrecht aufeinander stehen, nur müssen sie einen Winkel miteinander bilden. Am einfachsten also wird es sein von C aus (Figur 4) gleiche Stücke CA, CB, $CD = a$ abzutragen, in D den Winkel $CAD = \gamma$ noch einmal anzutragen und

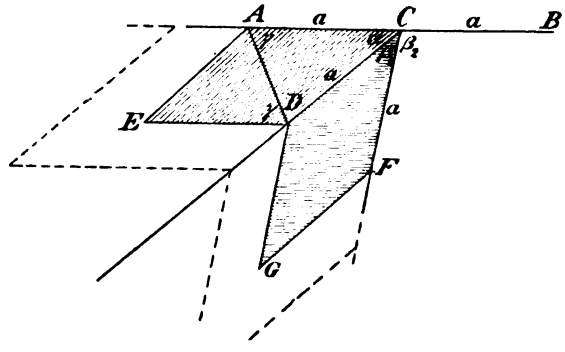


Fig. 4.

$DE = a$ zu machen. Dann sind die Dreiecke CAD und ADE kongruent, weil sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, sich also durch Aufeinanderlegen zur Deckung bringen lassen (falls man den Grundsatz anerkennt, daſs ein Dreieck bestimmter Gröſse im Raume bewegt werden kann, ohne seine Gröſse irgendwie zu verändern). Es ist dann Winkel $EAD = ADC = \gamma$. Also ist die Richtung CD und AE mit der Weitenvorstellung des Endlichen behaftet worden und zweitens die Dimension der Richtung AC und ED. Die Winkelfläche eines an CD angetragenen Winkels $DCF = \beta_1$ ist dann insoweit gleich der Winkelfläche des Winkels α, als das Viereck $CAED$ sich decken läſst mit dem entsprechenden, in der Vorstellung hergestellten $CDFG$. Von allen über die beiden Vierecke hinausliegenden Ebenenstücke der Winkelflächen ist dabei nichts ausgesagt. Aber man kann in derselben Weise auf den Verlängerungen der Schenkel wieder gleiche Stücke abtragen und kongruente Figuren herstellen, und zwar können diese gleichen Stücke auch in beiden Richtungen unendlich sein, also die beiden Dimensionen mit der Weitenvorstellung des Unendlichen behaftet werden. Dann sind die unendlichen Winkelflächen nur insoweit gleich, als die durch entsprechende Begrenzungen entstandenen Figuren kongruent sind. Es ist dabei der Grundsatz aufzustellen:

Räumliche Figuren sind nur dann und nur insoweit kongruent, als man sie sich zusammengesetzt vorstellen kann

aus kongruenten begrenzten, endlichen oder unendlichen Teilfiguren.

Mifst man, wie man zu sagen pflegt, die Winkelfläche durch Kreisbogen aus oder definiert man Winkel durch Anzahl von Graden, die man auf irgend einem beliebigen Kreise, der um den Winkelpunkt beschrieben wird, von Schenkel zu Schenkel ablesen kann, so mufs man dabei wohl beachten, dafs die Kreise zweier Winkel, die man vergleichen will, gleiche Radien haben müssen. Es ist leicht einzusehen, dafs dabei ebenfalls von zwei Dimensionen die Rede ist, welche beide mit der Weitenvorstellung des Endlichen (einer endlichen gleichen Radiusstrecke) oder des Unendlichen (einer unendlichen, aber ebenfalls gleichgedachten Radiusstrecke) behaftet werden. Das Neue, was in dem Vorhergehenden steckt, ist, dafs eine Kongruenz auch von unendlichgrofsen und unendlichkleinen Figuren ohne Begrenzungen falsch ist, man also nicht sagen kann, dafs die unendlichen und unbestimmten Winkelflächen zwischen zwei Paaren von Schenkeln, die untereinander, auf endlichen Kreisen abgelesen, denselben Winkel bilden, gleich oder kongruent seien d. h. sich zur Deckung bringen liefsen. Es ist ein ganz ungerechtfertigtes Verlangen, die unendlichen, nicht weiter begrenzten Flächen zweier Winkel α und β miteinander zur Deckung zu bringen; man deckt sie auch in der That, wenn man versucht sie in Gedanken auf einander zu legen, immer nur in der Vorstellung bis zu bestimmten Grenzen hin; es steht zwar frei diese Grenzen in unendlicher Entfernung kreisartig oder geradlinig anzunehmen, aber sie müssen jedenfalls mit gleichen Winkeln, gleichen Strecken und in gleicher Form d. h. ganz bestimmt begrenzt vorgestellt werden, sonst kann auch die freieste Phantasie der Deckungsbewegung nicht ordentlich nachgehen und es entstehen in gewissen Fällen Widersprüche.

Die Lösung des Paradoxons der Winkelflächen.

Wir sind jetzt imstande die Widersprüche des früher aufgestellten Problems zu lösen. Wir können die unendliche Winkelfläche des Winkels α (Figur 4) nur insofern gleich der von β_1 setzen, als irgend welche kongruenten Figuren, wie die in der Figur schraffierten, vorgestellt werden oder auch unendlichgrofse, aber der Form nach ganz genau als aus gleichen und kongruenten Teilen zusammengesetzte. Nur insofern also ist die unendliche Winkelfläcke des Winkels BCD (Figur 4) gröfser als die des Winkels ACD (oder in Figur 3 doppelt so grofs).

Schneidet man nun die unendliche Ebene unterhalb von *AB* (Figur 3) in Streifen, so können die dreiseitig begrenzten Streifen links von *CD* nur insofern als kongruent denen rechts von *CD* angesehen werden, als sie aus kongruenten Figuren wie die durch zwei punktierte Linien abgegrenzten Vierecke bestehen, wobei die Strecken auch unendlich, aber nach beiden Seiteu von *CD* ab als gleich vorgestellt werden können. (Die Kongruenz der halben Vierecke ist ohne den Satz von der Winkelsumme durch Deckung beweisbar.)

Ein Blick auf die Figuren 4 und 3 beweist, daſs man sich also in Wahrheit ganz andere Figuren vorstellen muſs, wenn man ohne Flüchtigkeit und Irrtümer, nach den von uns aufgestellten Sätzen die Kongruenz des Unendlichen in diesen beiden Fällen sich vorstellt.

Noch überzeugender wird der Anblick, wenn man beide Figuren in eine (Figur 5) zusammenzeichnet, wobei ich der Einfachheit halber

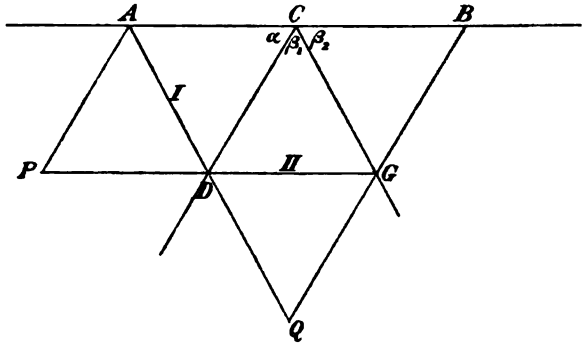


Fig. 5.

wieder annehmen will, es sei $\alpha = \beta_1 = \beta_2 = 60^0$. Es ist Viereck *I* kongruent *II* und dieses setzt sich aus kongruenten Teilen zusammen wie Viereck *CDGB*. Es ist also die Winkelfläche von Winkel α gleich der von β, falls man sich beide bis zu dem Punkt *P* bez. *Q* vorstellt (die auch im Unendlichen liegen können), und es ist der Streifen links von *CD* kongruent dem rechts von *CD*, sofern man sich beide als begrenzt vorstellt durch die Vierecke *I* und *CDGB*. Man sieht ganz deutlich, daſs ein Widerspruch nur dadurch entstehen konnte, daſs man sagte, es sei Viereck *I* gleich dem Dreieck *CDG* (als Winkelflächen) und aufserdem *I* gleich Viereck *CDGB*. Oder aber es sei Winkel $\alpha = \beta_1$, weil Dreieck *CAD* kongruent Viereck *II* sei (was falsch ist) und auch II kongruent *CDBG* (was richtig ist), oder es sei Dreieck *CAD* kongruent *CDG* (was richtig ist) und auch kongruent Viereck *DGCB* (was falsch ist). Immer liegt der Fehler daran, daſs wir das eine Mal die Winkelfläche durch andere Figuren ausmessen

wollen als das andere Mal oder als Streifen anders als den zugehörigen Streifen auf der anderen Seite. Wir sind nicht imstande auf dieselbe Art die Winkelflächen und den Streifen zweidimensional auszumessen, sodafs nicht etwa das Dreieck DQG aus dem Streifen $ADCG$ herausspringt.

Wenn man nun mit derjenigen Eile, wie es zu geschehen pflegt, ohne erst die Gleichheit und Kongruenz des Unendlichen zu untersuchen, sich einfach die unendlichen Winkelflächen und die unendlichen Streifen als kongruent vorstellt, weil gewisse Grenzen gleich sind und gedeckt werden können (die Schenkel der Winkel und die dreiseitigen Grenzen der Halbstreifen), so macht man Fehler, man vergifst sich etwas Wesentliches da vorzustellen, wo die Grenzen nicht von vornherein vorhanden sind.

Ich will keineswegs gesagt haben, dafs man imstande wäre alle Widersprüche, die sich in unserem Geiste zeigen, alle Rätsel, Schwierigkeiten oder wie man es nennen mag, zu lösen. Aber sobald es gelingt durch Aufstellung neuer, in sich widerspruchsloser Sätze Widersprüche zu entfernen, so hat man eine Art Recht nun die Existenz jener Sätze als Grundwahrheiten, die nun gefunden seien, auzuerkennen. Mag es mit diesen sogenannten Grundwahrheiten gehen wie mit allen Grundsätzen des Geistes, allen Grundelementen der Anschauung, mag man sie nicht beweisen und andere ihnen widersprechende nicht ganz endgiltig widerlegen können, mag man sich also auch zur Metaphysik der Möglichkeiten bekennen (siehe meine bereits zitierte Schrift), es kann nicht verwehrt werden sich mit Vorliebe solchen Erklärungen zuzuwenden, die irgend welche Widersprüche entfernen, ohne neue dafür hereinzuschaffen. Freilich etwas anderes hat man dafür hereingeschafft, die neuen Grundsätze; deren Aufstellung kann aber nicht verworfen werden, solange man sie nicht als widersprechend nachweist, und sie dürfen auch niemals als zu umständlich oder lästig erscheinen, wenn sie nur helfen Schwierigkeiten zu begreifen.

Der Beweis der Parallelen durch gleiche Wechselwinkel.

Einer der wichtigsten Anfangssätze aus der elementaren Planimetrie spricht aus, dafs bei Gleichheit der Wechselwinkel β und β_1

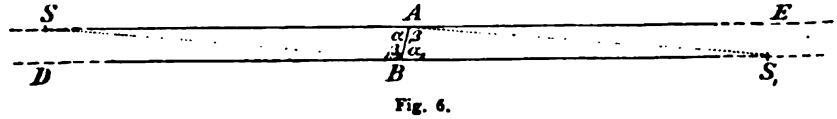


Fig. 6.

(Figur 6) die von AB geschnittenen Geraden parallel seien d. h. sich niemals schneiden. Der Beweis pflegt verlangt und gegeben zu

werden; ich will ihn hier in einer Form vorlegen, die mit unseren bisherigen Betrachtungen übereinstimmt.

Es wird durch die beiden Geraden und die endliche Strecke AB ein unendlicher Streifen begrenzt, dessen beide Teile auf beiden Seiten von AB wir vergleichen wollen. Wir werden zwar nicht behaupten, daſs diese im allgemeinen kongruent seien, wohl aber, daſs man die Schenkel des Winkels β mit denen von β_1 zur Deckung bringen kann durch Herumdrehen innerhalb der Ebene, infolgedessen A auf B und B auf A fällt. Ebenso müssen sich die Schenkel der Nebenwinkel α und α_1 decken. Es ist zwar nicht der unendliche Schenkel von β ohne weiteres als gleich dem unendlichen Schenkel von β_1 anzusehen, obwohl sich die endliche Begrenzung AB mit BA deckt, aber wir können uns doch den Punkt S einer unendlichen Strecke AS mit B verbunden denken mittels einer unendlichen Geraden (die hier verkürzt angedeutete punktierte Linie), ebenso A mit dem Punkte S_1 der gleichen Strecke BS_1. Dann sind die so begrenzten, aber unendlichen Winkelflächen der Winkel α und α_1 kongruent und es würde sich decken das Dreieck ABS mit Dreieck ABS_1. Die Verbindung SB würde mit BD bilden einen unendlichkleinen Winkel und ebenso AS_1 mit AE.

Man darf nun die Verbindung SB als eine der beiden Geraden ansehen, nämlich als BD selbst und AS_1 als die Gerade AE, falls man folgende Grundsätze anerkennt:

a) Neben der endlichen Gröfse der Winkel α, β, α_1, β_1 hat der unendlichkleine Winkel SBD und S_1AE entweder einen so geringen Wert, daſs er ohne wesentlichen Fehler fortgelassen werden darf,

oder aber

b) Neben endlichen Gröfsen (α, β, α_1, β_1) kann eine unendlichkleine Gröfse überhaupt nicht durch Gröfsenvergleichung als Summand vorgestellt werden; macht man aber logischformal eine solche Zusammenstellung, so ist der Wert des für sich oder im Vergleich mit anderen unendlichkleinen Gröfsen vorhandenen Unendlichkleinen nicht vorhanden.

Dann folgt:

Angenommen, es existiere an dem einen der beiden unendlichen Halbstreifen ein endlich- oder unendlichentfernter Schnittpunkt der beiden Geraden S, so existierte ein entsprechender in der gleichen Entfernung auch für den anderen, bis dahin als kongruent anzusehenden Halbstreifen. Es gäbe demnach zwei (endlich- oder unendlich-

entfernte) Schnittpunkte oder es gäbe zwischen zwei (endlich oder unendlich von einander entfernten) Punkten S und S_1 zwei gerade Linien SAE und DBS_1. Dies ist aber ein Widerspruch zu einem Erfahrungssatze, dem wir thatsächlich allgemeine Giltigkeit zuerkennen müssen und der lautet:

Erfahrungssatz. Zwischen zwei (in endlicher oder unendlicher Entfernung von einander liegenden) Punkten giebt es nur eine kürzeste Verbindung oder Gerade (genauere Fassung: am Ende des zweitnächsten Kapitels!).

Erkennt man diesen Satz nicht als richtig an, sagt man etwa, es gäbe zwischen zwei unendlichfernen Punkten mehrere kürzeste Verbindungen, so können Linien mit gleichen Wechselwinkeln (Parallelen) sich in beliebigunendlichviel unendlichfernen Punkten schneiden.

Die gewöhnliche kurze Fassung des Beweises, wie sie bisher in den meisten Lehrbüchern und Leitfäden steht und in den Schulen vorgemacht zu werden pflegt, ist nicht gründlich. Sie verschweigt erstlich die Frage, ob zwei Gerade sich nicht etwa im Unendlichen auf beiden Seiten schneiden können, zweitens ist sie sehr flüchtig beim sogenannten Beweise für die Kongruenz der Halbstreifen, und sie nimmt ohne Weiteres an, dafs, wenn man einen Schnittpunkt S auf der einen Seite der schneidenden Geraden annimmt, ein zweiter Punkt S_1, den man in gleicher Entfernung von B vorzustellen habe, auch wirklich ein Schnittpunkt sei, nach dem die Linie AE hinlaufen müsse. Wenn sich die Schenkel zweier Winkel bis in das Unendliche decken, so könnte man zwar sagen, einem in irgend einer Entfernung liegenden Punkte S des einen Winkelschenkels von α müsse auch ein Punkt des ihn deckenden Schenkels BS_1 des anderen Winkels $BS\alpha_1$ entsprechen; ob aber, falls S ein Schnittpunkt der Geraden wäre, auch S_1 ein Schnittpunkt der Geraden auf der andern Seite sein müfste, dazu ist eine genaue Untersuchung der Kongruenz der zweidimensionalen Streifen mit allen ihren zwischen beiden Parallelen liegenden Punkten nötig. Was für einen Wert hat es Schülern einen derart ungründlichen Beweis vorzutragen? Allein finden sie ihn nicht in der gewöhnlich gegebenen kurzen Form, sondern geraten in für sie unüberwindliche Schwierigkeiten. Sollte man nicht lieber versuchen mit ihnen die Fragen der vorigen Abschnitte „Über die Teilung der unendlichen Geraden" usw. zu besprechen? Nach meiner eigenen Erfahrung (erprobt an ganz jugendlichen Anfängern beiderlei Geschlechts) üben diese Fragen auf die jungen Geister die allergröfste Anziehungskraft aus; es ist ein falsches Vorurteil, es wäre zu schwer sie in das Unendliche einzuführen, oder gar, das könne ihr Interesse

abstumpfen — ganz das Gegenteil ist selbst bei sehr schwach begabten Geistern der Fall!

Die beiden Grundsätze *a* und *b*, zwischen denen bisher die Wahl gelassen ist, führen uns weiter auf der Bahn unserer Untersuchungen.

Das Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung.

Nicht bloſs beim Satze von den parallelen Geraden, sondern auch bei mehreren selbst in der elementaren Schulgeometrie ganz unvermeidlichen mathematischen Betrachtungen gelangen wir auf Dreiecke, die zugleich zwei endliche und eine unendlichkleine (oder zwei unendliche und eine endliche usw.) Seite haben und Winkel, die z. T. endlich, z. T. unendlichklein sind, oder auf Dreiecke, mit drei einer einzigen Weitenbehaftung angehörigen Seiten, aber zwei unendlichkleinen Winkeln (natürlich auch, falls erforderlich, unendlichkleinen Winkeln zweiter Ordnung etc.). Ich verweise im Voraus nur kurz auf die Umfangsberechnung des Kreises, das Bestimmungsdreieck des Polygons mit unendlichvielen Seiten, die Bedeutung der gonyometrischen Funktionen sinus, cosinus, tangens, cotangens für Winkel, die unendlichklein werden oder sich unendlichwenig von 90 Grad unterscheiden, ferner auf den Begriff der geometrischen Tangente und das Berührungsproblem der geraden und krummen Linien. Die bisherige Geometrie spricht meines Wissens keine besonderen Sätze für solche Dreiecke aus und nimmt von ihnen entweder an, daſs für sie die Sätze des gewöhnlichen Dreiecks (die nach meiner Ausdrucksweise mit der Weitenvorstellung des Endlichen behaftet sind) ebenfalls giltig seien oder daſs sie eigentlich gar keine Dreiecke mehr vorstellten. Schon aus der Unsicherheit dieser Ausdrucksweise oder aus dem Umstande, daſs man sich dann auch wohl mit dem in solchen Büchern nicht genau untersuchten und überhaupt mit Schwierigkeiten verbundenen Worte „Grenzfall“ behilft, sollte man schlieſsen, daſs hier Lücken vorhanden sind. Wir wollen uns nicht vor den Schwierigkeiten scheuen, welche die Ausfüllung dieser Lücken macht, zumal wir sahen, wie nötig allein beim Beweise des Parallelensatzes die Betrachtung der Kongruenz derartiger Dreiecke ist. Ich stelle also für die Geometrie verschiedene Gebiete mit verschiedenartiger Weitenbehaftung auf; nämlich

1. Die Geometrie mit der Weitenbehaftung des Endlichen.

2. Die Geometrie mit der Weitenbehaftung des Unendlichgroſsen (falls es sich als nötig erweisen sollte auch des Unendlichgroſsen mehrerer Ordnungen).

3. Die Geometrie mit der Weitenbehaftung des Unendlichkleinen erster Ordnung oder höherer Ordnungen.

4. Die Geometrie mit gemischter Weitenbehaftung.

Mit den ersten drei Fällen werden wir vorläufig insofern rasch fertig sein, als wir den Grundsatz anerkennen, dafs dieselben Figuren, welche wir im Endlichen erkennen, auch mit der Vorstellung des Unendlichen behaftet werden können, also ihre Sätze Giltigkeit behalten können. Bedeutend schwieriger ist der vierte Fall.

Vergleicht man zwei Dreiecke mit den Seiten a, b, c und a_1, b_1, c_1 mit einander, deren eines mit endlicher Weitenvorstellung behaftet ist, während die Seiten des anderen entweder unendlichgrofs oder unendlichklein vorgestellt werden, so zwingt die blofse Weitenbehaftung nicht dazu Verhältnisse der Seiten a, b, c zu ändern, es ist also möglich sich die Dreiecke als ähnlich vorzustellen, wobei sie gleiche endliche Winkel haben. Aus den Gleichungen $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$ folgt durch Umstellung z. B. $a : a_1 = b : b_1$. Hier gehört die linke Seite zwei Weitenbehaftungen an, und es ist sehr fraglich, ob überhaupt eine endliche Linie neben einer unendlichkleinen in bestimmter Länge vorgestellt werden kann, ob ein solches Verhältnis bestimmter Art überhaupt existiert. Das bedarf einer späteren besonderen Untersuchung. Hier sollen die Formen $a : a_1 = b : b_1$ gar nichts weiter bedeuten als eine arithmetische oder logischformale andere Anordnung der Gleichung $a : b = a_1 : b_1$, welcher wirkliche Raumvorstellungen entsprechen.

Lassen wir in einem Dreiecke eine Seite dem Worte nach unendlichklein werden, ganz abgesehen davon, ob wir uns das Verhältnis einer endlichen zu dieser unendlichkleinen überhaupt geometrisch bestimmt vorstellen können, so bedeutet dies, dafs zwei Seiten mit der Weitenvorstellung des Endlichen, die dritte mit der des Unendlichkleinen behaftet ist. Nach dem allgemein richtigen Satze, dafs die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte ist oder die Summe je zweier gröfser als die dritte (das Nähere im nächsten Abschnitte!), müfste dann die Differenz der beiden endlichen Seiten kleiner als die dritte also unendlichklein sein, oder die kleinere von ihnen wäre, um unendlichwenig vermehrt, gröfser als die andere. Man kann demnach, falls man nur die Weitenbehaftung mit dem Endlichen im Auge behält, was man doch thatsächlich bei den beiden endlichen Seiten thut, bei einem solchen Dreiecke keinen Unterschied mehr machen zwischen der Gröfse der beiden Seiten, d. h. es ist für die Weitenbehaftung mit dem Endlichen ein gleichschenkliges Dreieck.

So steht es mit dem Dreiecke *SAB* in Figur 6. Der von den gleichen Seiten *SA* und *SB* eingeschlossene Winkel eines solchen Dreiecks ist unendlichklein und kann nach einem der im vorigen Abschnitte aufgestellten Grundsätze *a* und *b* neben der Gröfse der beiden anderen Winkel fortgelassen werden.

Zwei um einen unendlichkleinen Winkel von einander abweichende Gerade liegen zwar in zwei Dimensionen, aber nur für die Weitenbehaftung mit dem Unendlichkleinen kommt die eine Dimension in Betracht, solange in der anderen endliche Strecken vorgestellt werden. Also darf man sagen: für die Weitenbehaftung mit dem Endlichen haben sie nur eine Dimension, oder die, in der ihre endlich vorgestellten Schenkel liegen, ist dieselbe.

Satz. Ein Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung der Seiten ist für die Betrachtung im einzelnen Weitengebiete stets gleichschenklig, enthält zwei rechte Winkel und hat je nach der Mischung der Weitenbehaftung einen endlichen, unendlichkleinen oder unendlichgrofsen Inhalt (verschiedenen Grades).

Es ist freilich sehr fraglich, ob man sich überhaupt einen unendlichkleinen oder unendlichgrofsen Inhalt ganz für sich in bestimmter Gröfse vorstellen kann; aber es könnte vielleicht sein, dafs er zu dem unendlichen Inhalte eines anderen Dreiecks in irgend einem Sinne in bestimmtem Verhältnisse stände (z. B. bei der Berechnung des Kreisinhaltes aus unendlichvielen unter sich gleichen solchen Dreiecken).

Der Pythagoräische Lehrsatz für ein solches Dreieck würde lauten falls man die unendlichkleine Seite *c* nennt, entweder $a^2 = b^2 + c^2$ oder $b^2 = a^2 + c^2$, wobei *c* gleich Null zu setzen ist, er hat mithin keine andere Bedeutung, als dafs $a = b$ ist, falls man einzig und allein die Summe der endlichen Zahlenwerte im Auge hat.

Der Sinn des Satzes von der Seitensumme für das Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung der Seiten.

Sind zwei Seiten unendlichgross und die dritte endlich oder zwei endlich und die dritte unendlichklein, so würde der Satz von der Seitensumme lauten: die Summe einer unendlichen und der endlichen (oder einer endlichen und der unendlichkleinen) ist grösser als die dritte unendliche (endliche). Nun ist aber nach einem von uns aufgestellten Grundsatze der endliche Summand neben dem unendlichen insofern bedeutungslos, als er nicht imstande ist die Grösse

des unendlich grofsen zu vermehren. Da aber auch jener geometrische Seitensatz als allgemein richtig anerkannt werden wird, so scheint aus ihm und unserem Grundsatze zu folgen (durch einfache Weglassung des bedeutungslosen endlichen Summanden): „die eine unendliche Seite ist gröfser als die andere". Und doch hatten wir im vorigen Abschnitte geschlossen, solches Dreieck sei gleichschenklig.

Steckt der Grund dieser Widersprüche in den Grundsätzen oder in den Schlüssen oder sind es unvermeidliche, natürlich-thatsächliche Widersprüche?

Etwas Ähnliches läfst sich sagen von einer zweiten Art von Dreiecken mit gemischter Weitenbehaftung, bei welcher zwar alle Seiten derselben Weitenbehaftung angehören, also entweder endlich oder unendlichgrofs oder unendlichklein (beliebigen Grades) sind, aber zwei Winkel unendlichklein und der dritte also um unendlichwenig von zwei rechten abweicht. Man zeichne z. B. an eine endliche Strecke BC in den Endpunkten ganz kleine (der Vorstellung nach nur unendlichkleine) Winkel B und C; dann schneiden sich deren Schenkel in einem Punkte A, der um eine unendlichkleine Strecke von BC entfernt ist (Höhe). Die Summe $AB + AC$ ist um unendlichwenig grösser als BC. Wenn nach unserem Grundsatze ein Stück einer niederen Weitenbehaftung als Summand keinen Sinn mehr hat, so scheint es, als ob dieses Dreieck identisch wäre mit dem Grenzfalle eines Dreieckes — oder wie man es nennen mag — bei dem die drei Dreieckspunkte in einer Geraden liegen, oder als ob dies Dreieck dasselbe wäre wie eine gerade Strecke, und ebenso das Dreieck mit zwei endlichen und einer unendlichkleinen Seite dasselbe wäre wie eine einzige Gerade, da zwei Endpunkte zusammenfielen.

Wäre dies wahr, so würde zwischen einer unendlichschmalen Fläche von endlicher Länge und einer Strecke kein Unterschied sein; und doch hat die Strecke die Breite Null, nicht aber eine unendlichkleine Breite. Null ist nicht dasselbe wie δ, ein Punkt nicht dasselbe wie eine unendlichkleine Strecke. Darf man den Grundsatz so verstehen, dass man für ein unendlichschmales Flächenband ebensogut die Strecke setzen darf? Oder ähnlich für eine unendlichdünne Schicht die Ebene? Gewifs nicht! In dieser Fassung erkennt man sofort, dafs es sich um verschiedene Dimensionen handelt, in denen man eine verschiedene Weitenbehaftung anwendet. Von einem eigentlichen Summieren der endlichen Länge des Bandes mit seiner Breite kann keine Rede sein; ein Vergleich der Ausdehnung beider Grössen ist im allgemeinen möglich, doch ist man sich dabei wohl bewufst, dafs es sich um verschiedene Dimensionen handelt, also um Grössen,

die man sich ganz deutlich als richtungsverschieden vorstellt. Der Vergleich findet nur insofern statt, als sowohl die eine Dimension wie die andere etwas Räumliches ist.

Man würde an sich nicht sagen können, ob ein grofses Dichtwerk oder ein grofses Mathematikwerk grösser wäre. Einen gemeinsamen Mafsstab erhält man nur dadurch, dass man etwa den Nutzen beider für die Menschheit untersucht und mit allgemeinem Mafsstab zu bemessen versucht, indem man das Besondere des Dichtens und mathematischen Denkens so lange abstreift. Unmittelbar aber kann man ein dichterisches und ein mathematisches Werk in ihrer dichterischen bez. mathematischen Grösse nicht summieren oder von einander abziehen. Das hat seinen Grund darin, dafs beide Arbeiten sich nach verschiedenen Richtungen hin bewegen gerade wie zwei Dimensionen verschieden gerichtet sind.

Liegen zwei Strecken, eine endliche und eine unendliche, in derselben Dimension z. B. auf einer Geraden, so hat wirklich die endliche neben der unendlichen keinen Sinn mehr, sie verschwindet neben jener, sie vermag die Grösse jener der unendlichen Weitenbehaftung angehörenden in ihrem Gebiete des Unendlichen nicht zu vermehren. Liegen aber beide in verschiedenen Dimensionen, so hat es keinen Sinn beide ihres spezifischen Dimensionsunterschiedes zu berauben und dann zu addieren, in diesem Falle verschwände wirklich das eine neben dem anderen.

Wenn wir z. B. die beiden unendlichlangen Schenkel mit der endlichen Grundlinie vergleichen, so werden wir sagen, jene lägen beide in einer anderen Dimension als diese, und zwar liegen sie im Vergleich mit der dritten Seite beide in einer, zur Dimension der Grundlinie senkrechten Dimension. Bilden wir daher ihre Differenz und nehmen dazu den Satz, dafs sie kleiner sein mufs als die dritte Seite, so haben wir zwei Strecken derselben Dimension verglichen und gefunden, ihre Differenz sei von einer niedrigeren Weitenbehaftung. Dann dürfen wir schliefsen, dafs in Beziehung auf die Dimension oder in der Dimension, in der sie liegen, die Differenz verschwindet oder keinen Sinn hat d. h. dafs die beiden Schenkel gleich grofs sind.

Bilden wir aber die Summe der einen unendlichen Seite und der endlichen Grundlinie, so hätte diese, in derselben Dimension gerechnet, kein anderes Resultat als die unendliche Seite selbst; d. h. in dieser Weise aufgefafst (!) wäre ihre Summe nicht gröfser als die dritte unendliche Seite (der andere Schenkel), kurz es bleibt dabei, dafs in ihrer Dimension die Schenkel gleich grofs bleiben. Aber trotz alledem bleibt bei Festhaltung beider Dimensionen der

Satz bestehen, daſs die Summe zweier Seiten gröſser ist als die dritte, daſs es ein Dreieck bleibt und nicht etwa die Schenkel zu einer einzigen Strecke zusammenfallen ohne die Ausdehnung der verbindenden dritten Seite.

Die Verschiedenheit der Weitenbehaftung zwingt uns wieder zur Vorsicht; wir verfallen sofort in Widersprüche, wenn wir sorglos die gemischten Dreiecke nach der uns gewohnten Art der endlichen Geometrie behandeln. Der Satz von der Seitensumme muſs darum genauer lauten:

In jedem Dreiecke ist die Summe (oder Differenz) der Maſseinheiten zweier Seiten, wenn diese derselben Weitenbehaftung angehören, gröſser (kleiner) als die dritte, mag diese nun derselben oder anderer Weitenbehaftung angehören und mag auch der Überschuſs einer anderen Weitenbehaftung angehören.

Und in jedem Dreiecke ist die Summe (Differenz) der Maſseinheiten zweier Seiten, wenn diese verschiedener Weitenbehaftung angehören, trotzdem gröſser (kleiner) als die dritte und zwar weil alsdann die summierten Seiten verschiedenen Dimensionen angehören und nur insofern sie verschiedenen Dimensionen angehören.

Und es muſs unser Grundsatz in folgender Art für das Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung ausgedrückt werden:

Eine Gröſse von niederer Weitenbehaftung hat, als Summand neben die von höherer Weitenbehaftung ohne unterscheidendes (hier dimensionales) Merkmal gestellt, keinen Sinn, bei Hinzufügung eines unterscheidenden Merkmals aber insofern Sinn, als es auf diese Unterscheidung (hier der Dimension) ankommt.

Z. B. die Summe einer endlichen und einer zweiten unendlichkleinen Seite anderer Dimension eines Dreiecks wird insofern grösser als die dritte endliche Seite, als die Eigentümlichkeit des Dreiecks die beiden verschiedenen Dimensionen verlangt.

Fallen zwei Dreieckspunkte zusammen oder liegen alle drei in einer Geraden, so kann man diese Figur kein Dreieck mehr nennen. Genauer gesagt: drei Punkte, die sonst ein Dreieck bilden würden, ergeben dann kein Dreieck mehr, wenn zwei davon zusammenfallen, oder alle auf einer Geraden liegen. Eine solche Figur hat keine Flächenausdehnung, keinen Inhalt, keine Winkelgröſsen, keinen Schnitt der Höhen, der Mittellote usf., befolgt auch den Satz über die Seiten-

summe, selbst in der oben angegebenen allgemeinen Form nicht. Es ist demnach falsch zu definieren, ein Dreieck im allgemeinen werde gebildet durch die kürzesten Verbindungen dreier irgendwie liegenden Punkte, es mufs durchaus heifsen: durch die Verbindungen dreier getrennt und nicht auf einer Geraden liegenden Punkte.

Das Axiom von der kürzesten Entfernung mufs demnach lauten: Stellt man sich die kürzeste Verbindung zweier Punkte vor, so giebt es keine zweite kürzeste, falls man jede beliebige Weitenbehaftung in jeder Dimension zur Unterscheidung anwenden will. Für Behaftung nur mit dem Unendlichen aber z. B. giebt es zwischen zwei unendlich entfernten Punkten beliebig viel kürzeste (etwa um Endliches oder δ verschiedene) Entfernungen, wenn man für die schliefsliche Vergleichung der Längen nur die Behaftung mit dem Unendlichen bestehen läfst. Läfst man von vornherein in beiden Dimensionen nur die Behaftung mit dem Unendlichen zu, so fallen jene sonst unterscheidbaren Wege auch in einen einzigen zusammen.

Sinus und Cosinus von unendlichkleinen und rechten Winkeln.

Die gonyometrischen Funktionen sinus, cosinus, tangens, cotangens pflegt man etwas verschieden zu definieren; es sind jedenfalls reine Zahlen, die aber entweder entstehen durch das Verhältnis zweier Strecken oder welche die Anzahl von Mafseinheiten bedeuten, die man ablesen kann auf gewissen mit einem Kreise vom Radius 1 zusammenhängenden Graden.

Versteht man unter α einen der spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks und unter $\sin \alpha$ das Verhältnis der Länge der gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse, so ist es einleuchtend, dafs dieser Winkel Werte von Null bis zu 90 Grad haben kann, und zwar kann die Anzahl der Grade auch unendlichklein sein oder um unendlichwenig von 90 Grad abweichen. Das fordert uns zur näheren Betrachtung heraus.

Bedeutet δ irgend einen unendlichkleinen Winkel, so hat das betreffende Dreieck gemischte Weitenbehaftung, und zwar ist dann die gegenüberliegende Kathete ebenfalls unendlichklein, wenn die Hypotenuse endlich ist (oder, was in diesem Falle dasselbe ist, die gegenüberliegende Kathete ist Basis des gleichschenkligen Dreiecks). Es fragt sich auch hier, ob eine ganz bestimmte unendlichkleine

Gröfse neben einer endlichen anschaulich verstellbar ist; aber sehr wohl ist die unendliche Weitenbehaftung in der einen Dimension geistig zusammenstellbar mit der endlichen Weitenbehaftung in der anderen und es folgt dann arithmetisch, dass der Zahlenwert sin δ ein unendlichkleiner ist, nämlich sin δ = Unendlichkleines: Endliches oder sin δ mal Endliches = Unendlichkleines. Dazu ist nötig der arithmetische Grundsatz:

Eine endliche Anzahl von unendlichkleinen Gröfsen ergiebt eine unendlichkleine Summe, in Zeichen:

$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots$ (endlich) $= \delta$ z. B. $\delta + \delta + \delta = 3\,\delta = \delta'$.

Eine unendlichkleine Gröfse mit einer endlichen Zahl multipliziert ergiebt ein unendlichkleines Resultat. Und umgekehrt eine unendlichkleine Gröfse, dividiert durch eine endliche, ergiebt eine unendlichkleine Gröfse z. B. $\delta'/_3 = \delta$.

Der Satz läfst sich auch leicht aussprechen für Unendlichkleines anderer Ordnung bez. das Unendlichgrofse.

Sinus (90 — δ) bedeutet entsprechend in einem Dreiecke mit gemischter Weitenbehaftung das Verhältnis von der endlichen (bez. unendlichen) gegenüberliegenden Kathete (Schenkel) zur Hypotenuse, die hier derselben Weitenbehaftung angehört und gleich ist. Es folgt *sin* (90 — δ) = 1, eigentlich gleich 1 weniger einer Gröfse, die einer niederen Weitenbehaftung angehört, was aber nach einem früheren Grundsatze, wenn es nur auf diese Gröfse sinus selbst ankommt, eins ergiebt.

Da cosinus das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse bedeutet, so ist *cos* δ = 1 und *cos* (90 — δ) = unendlichklein. *Cos* 90 aber würde ergeben Null, und neben Null ist ein unendlichkleiner Summand nicht ohne weiteres weglafsbar wie neben endlichen Gröfsen.

Man könnte von vornherein *sin* (90 — δ) einfach schreiben wollen als *sin* 90 und sich dabei auf den früher aufgestellten Grundsatz berufen, wonach der Summand δ neben der endlichen Gröfse 90 weggelassen werden könne. Jener Grundsatz ist zwar an und für sich richtig, d. h. für das Weitengebiet des Endlichen darf man — δ fortlassen, aber hier steht das Sinuszeichen vor der Gröfse 90 — δ, und es mufs erst untersucht werden, ob auch hierfür die Weglassung erlaubt ist. Dies ist nämlich dann der Fall, wenn das Resultat eine endliche Gröfse neben einem unendlichkleinen Summanden ergiebt. Da hier herauskommt 1, so war es hier in der That erlaubt gleich

sin 90 zu schreiben. Anders liegt es bei *cos* (90 — δ). Definiert man sinus als die gebrochene, unter dem Werte 1 liegende Anzahl von Maſseinheiten, die man auf den zur y-Axe parallelen und von der x-Axe bis zum Kreise mit dem Radius 1 reichenden Strecken ablesen kann z. B. auf der Strecke AC (Figur 7) für Winkel α und $A_1 C_1$ für den überstumpfen Winkel AOC_1, so ergeben sich auch negative unendlichkleine Werte oder der Wert — 1 z. B. ist *cos* $(2R + \delta)$ gleich dem von 0 nach links gerechneten Radius d. h. — 1 und *sin* $(2R + \delta)$ negativ unendlichklein.

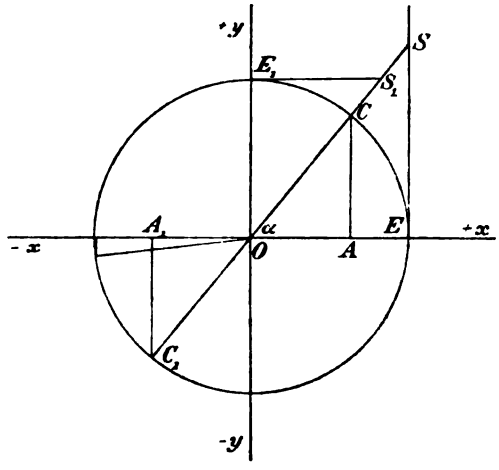


Fig. 7.

Die Funktion tangens und cotangens für δ und R-δ.

Versteht man unter *tang* α die Verhältniszahl der Gröſsen der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete und der anliegenden Kathete, also *sin* α : *cos* α, so ergiebt sich daraus $tan\ \delta = \frac{sin\ \delta}{cos\ \delta}$ = unendlichklein : 1 = unendlichklein, $cot\ (R - \delta) = \frac{cos\ (R - \delta)}{sin\ (R - \delta)}$ = unendlichklein : 1 = unendlichklein, $tan\ (R - \delta) = \frac{sin\ (R - \delta)}{cos\ (R - \delta)}$ = 1 : unendlichklein = unendlich, ausgedrückt durch das Zeichen ∞. Denselben Wert hat *cot* δ.

In den Lehrbüchern und Logarithmentafeln steht gewöhnlich ∞ angegeben als Wert für *tan* 90 oder *tan* $\pi/2$, gleich als ob 90 dasselbe wäre wie 90 — δ. Nun bedeutet aber *tan* = *sin* : *cos*, also *tan* 90 = *sin* 90 : *cos* 90 = 1 : 0. Nimmt man nun freilich ohne weiteres an, daſs 1/0 unendlich sei, so wäre ja das Resultat dasselbe wie bei *tan* (90 — δ). Leider erlauben sich fast alle Bücher jene Annahme — aber sie ist grundfalsch. Darüber werde ich im nächsten Abschnitte besonders sprechen. Hier will ich erst noch die zweite Definition von tangens und cotangens anführen und für unsere Fälle prüfen.

Es seien dies nämlich die Anzahlen von Einheiten, ablesbar auf der im Endpunkte E der positiven X-Axe (Figur 7) gelegten geometrischen Tangente bis zum Schnitt S mit dem zweiten Schenkel des Winkels α, während der erste bekanntlich stets und bei allen Funktionen die positive X-Axe selbst ist; cotan α dagegen stets entsprechend abgelesen auf der Tangente $E_1 S_1$ (im Endpunkte der positiven Y-Axe gelegt). Ist nun α gleich $R - \delta$, so rückt der Schnittpunkt S in das Unendliche, also ist $tan\ (R - \delta) = \infty$. Sobald aber $\alpha = 90^0$ ist, ist nach unseren früheren Betrachtungen ein Schnittpunkt überhaupt nicht mehr vorhanden. Die Tangente geht dann allerdings bis in das Unendliche, man darf aber nicht sagen, dafs darauf eine bestimmte unendliche Anzahl von Mafseinheiten ablesbar seien. Man könnte die Tangente von E ab nach einer Richtung unbestimmt unendlich nennen, aber nicht mehr behaupten, dafs auf dieser Linie die trigonometrische Tangente ablesbar sei, denn diese soll doch stets gerechnet werden bis (!) zu einem vorhandenen Schnitte. Also zeigt auch diese geometrische Definition, wie falsch es ist $tan\ 90 = \infty$ zu setzen.

Die Unmöglichkeit von 1 : 0 oder *tan* 90°.

Die Division ist erklärt als die Umkehrung der Multiplikation. Also $a : b$ bedeutet diejenige Zahl, welche mit b multipliziert (oder ebenso oft zu sich selbst addiert, wie b angiebt) den Wert a ergiebt. Folglich würde 1 : 0 diejenige Zahl bedeuten, welche mit 0 multipliziert 1 giebt. Falls sie es überhaupt giebt, möge sie vorläufig bezeichnet sein mit x. Also müfste sein $1 = 0 \cdot x$. Null hat ferner keinen anderen arithmetischen Sinn als die Differenz zweier völlig gleichen Gröfsen z. B. $0 = m - m$. Also wäre $0 \cdot x = (m - m)\ x$ und dies $= mx - mx$. Auch bei dieser Differenz bedeutet m geuau dasselbe wie das zweite m und x genau dasselbe wie das zweite x. Will man aber in unserem Falle x lieber ausdrücken durch das Zeichen ∞, wobei nun unendlich eine Zahl sei, so mufs diese Zahl oder dieses Zeichen ∞ in der Differenz $m \cdot \infty - m \cdot \infty$ jedenfalls ganz genau dasselbe ausdrücken, wir wollen also lieber sagen $m \cdot \infty_1 - m \cdot \infty_1$. Das heifst, wir haben ursprünglich nur ein einziges Mal dastehen ∞_1 in der Form $(m - m) \cdot \infty_1$, und wenn wir dieses Produkt auflösen nach dem Multiplikationsgesetz, indem wir jeden Summanden mit ∞_1 multiplizieren, so bleibt dieser jetzt zweimal geschriebene Faktor ∞_1 doch ganz genau derselbe. Also auch bei dieser Differenz bedeutet der erste Summand $m \cdot \infty_1$ ganz genau dasselbe wie der zweite $m \cdot \infty_1$. Demnach ergiebt sich das Resultat 0

und keineswegs das Resultat 1. Wenn in einer Differenz der Minuendus ganz genau so groſs ist wie der Subtrahendus, so ergiebt sie jedenfalls Null. Es ist nichts als ein grober logischer Fehler, plötzlich von beiden Summanden anzunehmen, sie könnten verschieden sein. Mag auch sonst irgend ein ∞ verschieden sein können von einem anderen ∞, in diesem Falle sind die beiden Zeichen ∞_1 nicht verschieden und können nicht als verschieden betrachtet werden. Es giebt also keinen einzigen Wert x, welcher das Resultat wäre zu der Zeichenverbindung 1 : 0. Es ist hierbei ganz gleichgiltig, ob man dies ∞_1 als unbestimmt oder etwa als irgend einen bestimmten unendlichen Wert auffaſst. Es ist völlig sinnlos es in jener Verbindung nach der Multiplikation plötzlich in verschiedenem Werte aufzufassen, sonst wäre die Multiplikation überhaupt etwas ganz anderes als sie ist. Falls unendlich vorher eine unbestimmte Gröſse war, so ist es auch jetzt noch dieselbe unbestimmte Gröſse.

Man müſste sonst etwa behaupten, ein Wert wie unbestimmt bedeute dadurch, daſs man ihn zweimal hinschriebe, etwas Verschiedenes. Bedeutet er in $m \cdot \infty - m \cdot \infty$ etwas Verschiedenes, so darf man dafür auch nicht denken $(m - m) \cdot \infty$, was doch vorher geschehen war. Also hat 1 : 0 gar keinen Wert, weder einen bestimmten noch unbestimmten; es ist dies vielmehr eine bloſse äuſserliche Wert- und Zeichenverbindung, etwa als wollte ich mit einander die Worte verbinden: „eins“, „ist“ und „keins“ zu: „eins ist keins“ oder „rot, grün und „ist“ dassselbe“ zu: „rot ist dasselbe wie grün“.

Dr. K. H. Liersemann meint (ähnlich wie andere) in seiner sonst viel Tüchtiges enthaltenden Abhandlung: „$0 \varepsilon 1 \infty \Theta$, eine mathematische Studie, König-Wilhelmsschule zu Reichenbach in Schlesien, Programm 180, 185, 1878, 9“, man könne $1/0 = \Theta$ definieren und dies als absolut unendlich bezeichnen, während $1/\delta = \infty$ das gewöhnliche Unendlich ist, ähnlich wie es doch neben dem Unendlichkleinen auch die Null gebe. Jedenfalls darf uns der bloſse Vergleich mit δ und 0 nicht zur Annahme einer neuen Gröſse führen. Auch rein formal ist die Einführung eines neuen Zeichens für $1/0$ unstatthaft, wenn $1/0$ überhaupt eine logisch falsche Zusammenstellung ist. Es stände eine solche Einführung durchaus nicht auf demselben Range wie die etwaige bloſse formale Einführung von Null, dem Negativen, dem Gebrochenen, Irrationalen und Imaginären. Auch ist es Willkür und unberechtigter Schematismus, nun dieser Gröſse $1/0$ eine geometrische Bedeutung beizulegen und zu sagen, die Gerade habe die Länge Θ und sei absolut unendlich, wenn sie sich bis zu einem „letzten, unendlichfernen Punkte“ erstrecke (Schnitt von Parallelen).

Wenn man die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ einführt, so muſs man sagen, es sei das diejenige Zahlengröſse, die, mit sich selbst multipliziert, -1 ergebe. Nun kann man sagen, es gebe eine solche Zahlengröſse nicht, indem man hinzufügt, keine der bis dahin sogenannten Zahlen, weder die positiven, noch die negativen, noch die gebrochenen enthielten einen Wert, der mit sich selbst multipliziert eine negative Gröſse ergebe. Damit ist noch nicht gesagt, daſs es überhaupt geistig solche Gröſse nicht geben könne. Es können auch im Geiste Entdeckungen gemacht werden so gut wie in der Elektrizität der Natur. Im Geiste kann etwas schlummern oder mit geistiger Notwendigkeit aus dem bereits Entdeckten und Durchdachten folgen, was man bis dahin nicht in die Aufmerksamkeit und das Nachdenken gezogen hatte. Es ist aber dabei die Gröſse -1, welche durch Anwendung einer bekannten Rechenoperation sich ergeben soll aus Zahlengröſsen, die man bis dahin noch nicht kannte, etwas Bekanntes, die Rechenoperation wird, durchaus logisch wie bisher angewendet, nicht etwa umgeworfen. Will man aber dem Ausdrucke $1/0$ einen Zahlenwert beilegen, so wirft man dabei den Begriff der Division einfach um, man führt nicht eine nun etwa entdeckte neue Zahlengröſse ein, die eine Zahlengröſse ist d. h. sich den Gesetzen der Zahlen einfügt, sondern man will etwas als Zahl betrachten, welches sich überhaupt den Gesetzen der Zahlen, dem Multiplizieren und Dividieren, nicht einfügt. Soll man etwa dafür eine neue Division oder Multiplikation erfinden? Dann ist dieses eine Rechenoperation, welche den allgemein anerkannten in das Gesicht schlägt, sich mit ihnen nicht verträgt, also ihnen logisch widerspricht. Wenn man aber z. B. das Imaginäre einführt, so will man dabei keineswegs die ohne Zweifel giltigen Gesetze des Verstandes umwerfen!

Auch das Unendliche kann man als eine Entdeckung des weiter reifenden Verstandes im Gebiete des Geistes ansehen, diese Entdeckung ist schon sehr früh gemacht worden, man findet sie bei noch unentwickelten Völkern, die Entdeckung des Unendlichkleinen zweiter Ordnung z. B. aber erst viel später. Diese Gröſsen werfen aber nicht die bisher bestehenden Gesetze völlig um, und wenn wir auf einen Widerspruch stoſsen, so ruhen wir nicht eher, bis wir ihn in Einklang gebracht, also bewiesen haben, daſs er nur scheinbar ist. Wir haben aber keine Berechtigung, eine Zahl wie etwa jenes Θ zu erfinden oder als eine Entdeckung zu betrachten, wenn es sich sofort als überhaupt unrichtig gedacht erweist.

Wir müssen dabei bleiben, daſs man mit o in keine einzige Zahl hineindividieren darf auſser in o selbst. $o : o$ hat einen Sinn; es sei

$0/0 = x$; dann ist $0 = 0 \cdot x$. Es giebt aber jede Zahl, mit 0 multipliziert 0, also ist x jede Zahl oder $0/0$ hat einen unbestimmten Wert.

Man darf sich dadurch nicht verführen lassen, *tang* 90 zu bilden, weil man *tan* von den meisten übrigen Winkeln bilden kann. Das wäre ähnlich (natürlich hinkt dieser Vergleich wie jeder), als wenn man alle Gegenstände mit der Eigenschaft „heifs" behaften wollte und sagen: „ein kalter Gegenstand ist heifs, nur deshalb, weil sonst alle Gegenstände doch heifs sein können". Es wäre an der Zeit, dafs aus den Logarithmentafeln die Angabe: $tan\ 90 = \infty$ für immer verschwände und daselbst stände $tan\ (90 - \delta) = \infty$. Das Entsprechende für $tan\ (90 + \delta)$ und für das etwaige $-\infty$ kann sich nun jeder selbst sagen.

Beispiel für das sogenannte *tan* 90 in der analytischen Geometrie. $\delta \cdot \infty$ und $\infty - \infty$.

Eine Form der Gleichung einer geraden Linie ist bekanntlich (Näheres über den Sinn solcher Gleichungen später!) $y = tan\ \alpha \cdot x + b$, wobei y die von irgend einem laufenden Punkte P (Figur 8) der Geraden PA auf die x-Axe und x die von ihm auf die y-Axe gefällte Senkrechte in Mafszahlen darstellt, während α der von der Geraden mit der positiven Richtung der x-Axe gebildete Winkel ist und b das von der Geraden auf der Y-Axe abgeschnittene Stück. Zur Ableitung dieser Gleichung legt man durch Punkt A eine Parallele zur x-Axe AB und hat im Dreieck PAB die gonyometrische Tangente definiert als $tan\ PAB = tan\ \alpha = PB : AB = (PC - BC) : AB = (y - BC) : OC = (y - b) : x$; also $x \cdot tan\ \alpha = y - b$.

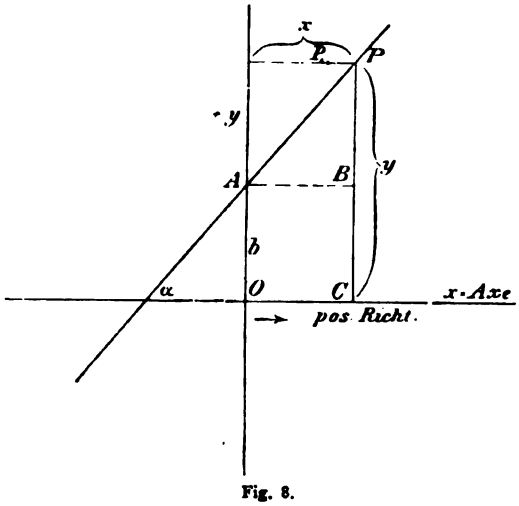


Fig. 8.

Diese Ableitung ist dieselbe für irgend einen beliebigen Punkt P, wenn derselbe nur auf der Geraden liegt d. h. stets Winkel α und

der Abschnitt b derselbe ist. Liegt die Gerade anders, so sind diese beiden Werte anders, fällt z. B. die Gerade in die Y-Axe selbst, so ist $b = 0$ und $\alpha = 90^0$. Dann erhält man $y = tan\ 90 \cdot x$. Wäre nun $tan\ 90$ unendlich, so erhielte man $y = \infty \cdot 0$. Denn für jeden Punkt der y-Axe ist $x = 0$. Es soll aber herauskommen, dafs irgend (!) ein Punkt der Y-Axe irgend (!) einen Abstand vom Ausgangspunkte o hat; also müfste $0 \cdot \infty$ unbestimmt sein. Wir wissen bestimmt, dafs $\delta \cdot \infty$ unbestimmt ist, denn jede beliebige Gröfse, durch δ dividiert, giebt unendlich, nicht aber giebt irgend eine Gröfse, durch ∞ dividiert, Null, sondern nur Unendlichkleines. Wollte man schliefsen (wie es leider sehr viele, ich kann wohl sagen, so gut wie alle Mathematikbücher thun), es sei $0 \cdot \infty$ in der Gleichung $y = 0 \cdot \infty$ unbestimmt, so hätte man den einen Fehler zweimal angewendet. Erstlich hätte man fälschlich $tan\ 90 = \infty$ gesetzt und dann fälschlich $0 \cdot \infty$ unbestimmt. In Wahrheit giebt es $tan\ 90$ überhaupt nicht. Es ist keineswegs selbstverständlich, dafs eine Funktion wie $y = tang\ \alpha \cdot x$ für jedes beliebige α noch einen vernünftigen Sinn haben müsse. Es fragt sich, was *tan* hier eigentlich geometrisch bedeutet. Das geometrische *tan* giebt es nur solange, als $y : x$ also ein entsprechendes Dreieck in der Figur vorhanden ist. Dies Dreieck ABP in Figur 8 ist noch vorhanden, falls $x = \delta$ ist und y einen endlichen Wert hat, nämlich als Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung. Für $\alpha = 90^0$ ist es überhaupt nicht mehr da. Ist aber $x = \delta$ und $b = 0$, so hat man es nicht mehr mit der Y-Axe selbst zu thun, sondern mit einer, unendlich wenig von ihr abweichenden, sie in o schneidenden Geraden. Für die Y-Axe selbst gilt nur die Gleichung $x = 0$.

Offenbar hängt alles zusammen mit dem Problem des etwaigen Schnittes paralleler Geraden (nächster Abschnitt!) oder der Existenz von *tan* 90. Wir müssen demnach entsprechend unseren früheren Untersuchungen den Satz aufstellen:

Innerhalb einer Funktion z. B. $a : x$ oder $tan\ \varphi$ darf man für die sogenannte unabhängige Variabele x oder φ zwar allerlei Werte einsetzen und dann dafür den Wert der ganzen Funktion anzugeben suchen. Aber es mufs stets erst besonders entschieden werden, ob die Bildung der Funktion d. h. hier die Anwendung der Division auch noch für den betreffenden Wert von x einen Sinn hat oder unsinnig wird. Die Redensart: Die Funktion y erhält für alle möglichen Werte von x entsprechende Werte, bedeutet streng: für alle Werte von x, die bei dieser besonderen Bildung der Funktion möglich sind und nicht der Art der

Bildung widersprechen, bedeutet nicht aber, daſs es möglich wäre, jeden Wert von x einzusetzen, der für sich überhaupt vorstellbar wäre (z. B. $x = 0$ oder $\varphi = 90^0$). Will man aber rein äuſserlich solche Funktion auch für eigentlich verbotene Werte von x beibehalten, so ist man zu einem zweiten Fehler genötigt, der den ersten genau wieder gut macht, man muſs z. B. alsdann den Fehler begehen $a : 0$ oder auch *tan* 90 als unendlich anzunehmen, und erhält nun dasselbe Resultat, als wenn man nicht fälschlich $x = 0$, sondern als wenn man, was nach Art der Funktion erlaubt ist, freilich nicht mehr die gewünschte Gerade genau bezeichnet, $x = \delta$ angenommen hätte.

Will man die Gutmachung eines Fehlers mit dem Worte „Grenzbegriff" bezeichnen, so könnte man sagen, die Grenze (limes) von $1 : n$ für $n = 0$ sei unendlich, d. h. es sei unter gewissen Umständen erlaubt ohne Fehler für das Resultat einen eigentlich falschen Wert anzunehmen. (Über den eigentlichen mathematischen Limes-Begriff siehe später!)

Für den Fall, daſs die Gerade parallel zur Y-Axe liegen soll, zeigt die Annahme von *tan* $90 = \infty$ ebenfalls einen Fehler. Es wäre in der Gleichung $y = tan \cdot x + b$ in diesem Falle für x zu setzen eine Konstante $x = r$ (Abstand der Parallelen von der Y-Axe), eine Gleichung, die bekanntlich schon für sich eine zur Y-Axe parallele Gerade ausdrückt, indem sie für jeden Punkt der Geraden gilt und y beim Fortlaufen des beweglichen Punktes der Geraden alle möglichen positiven und negativen Werte haben kann. Für b wäre zu setzen ∞, man weiſs aber nicht, ob $+\infty$ oder $-\infty$, denn eigentlich schneidet die Gerade auf der Y-Axe überhaupt kein Stück ab. Nimmt man an, *tan* 90 sei unendlich, so erhält man $y = \infty \cdot r + \infty$; doch ist sofort ersichtlich, daſs dies im allgemeinen falsch ist, denn y soll nicht immer gleich unendlich sein, sondern jeden beliebigen Wert haben. Ebenfalls wäre im allgemeinen falsch $y = -\infty \cdot r - \infty$. Ein richtiges Resultat gäbe nur $y = \infty \cdot r - \infty$ oder $= -\infty \cdot r + \infty$. Denn unendlich — unendlich ist unbestimmt, weil jede Zahl, zu unendlich addiert, unendlich ergiebt. Man weiſs aber erstlich nicht, warum man hier für *tan* 90 den Wert $-\infty$ und dann für $b = +\infty$ oder umgekehrt wählen soll; und es könnte auch Zufall sein, daſs trotz der Falschheit beider Summanden das Richtige herauskäme. Es sind zwei Fehler darin, nämlich erstens, daſs die Parallelen sich im Unendlichen schneiden oder die eine von der anderen ein unendliches Stück abschneiden soll und zweitens, daſs auch *tan* 90

gleich unendlich sein solle (dies ist derselbe Fehler noch einmal). Ganz klar und richtig wird alles, wenn man weder $b = \infty$ noch $tan\ \alpha = \infty$ erlaubt, sondern nur $tan\ (90 - \delta) = \infty$ und dazu $b = -\infty$, was die Figur sofort verlangt (man zeichne eine Gerade, die fast auf der x-Axe senkrecht steht, aber sich oben ein wenig nach rechts von der Richtung der Y-Axe fortneigt und von der x-Axe ein Stück r abschneidet). Oder aber man mufs $tan\ (90 + \delta)$ und dazu, was sofort wieder die entsprechende Figur zeigt, $b = +\infty$ nehmen. Dann ist aber keine Parallele mehr ausgedrückt, sondern eine um unendlichwenig davon abweichende oder die Y-Axe wirklich einmal, aber im Unendlichen schneidende Gerade.

Der sogenannte Schnitt der Parallelen analytisch.

Die Gleichungen zweier Parallelen sind (zeichne in Figur 8 durch P_1 eine Parallele zu PA!) $y = tan\ \alpha \cdot x + b$ und $y = tan\ \alpha \cdot x + b_1$. Diese Gleichungen darf man in einander substituieren d. h. für das y der einen Gleichung die rechte Seite der anderen hinschreiben, wenn die Ordinate y eines Punktes P gleich ist der Ordinate y eines Punktes P_1 der anderen Geraden. Man erhält dann $tan\ \alpha \cdot x + b = tan\ \alpha \cdot x + b_1$. Aber diese Gleichung, derart geschrieben, ist nur richtig, falls auch x der einen Seite dasselbe ist wie x auf der anderen Seite, oder man müfste schreiben $tan\ \alpha \cdot x_1 + b = tan\ \alpha \cdot x_2 + b_1$. Wäre die Gleichung $tan\ \alpha \cdot x + b = tan\ \alpha \cdot x + b_1$ richtig, so folgte $b = b_1$. Die Figur zeigt, dafs die beiden Ordinaten y und die beiden Abscissen x gleichzeitig nur dann gleich sein können, falls P und P_1 zusammenfallen, also den Schnittpunkt beider vorstellen; zugleich auch, dafs b nur $= b_1$ sein kann, wenn beide Geraden durch den Punkt A gingen, also nicht parallel wären d. h. zusammenfielen.

Schnitten sich nun zwei Parallelen wirklich im Unendlichen, so müfste für einen gemeinsamen unendlichfernen Punkt sowohl die x- als auch die y-Gröfse gleich sein und zwar, falls b und b_1 und der Winkel α endlich sind; man erhielte

$$\infty_1 = tan\ \alpha \cdot \infty_2 + b$$
$$\infty_1 = tan\ \alpha \cdot \infty_2 + b_1$$

wobei die gleichen Tiefzahlen (indices) $_1$ und $_2$ die Gleichheit der unendlichen Gröfsen andeutet. Folglich wäre $b = b_1$, da die linken und rechten Seiten alle gleich sind. Dies ist indessen nur möglich, falls die beiden parallelen Geraden die Y-Axe nur in einem Punkte A schnitten, d. h. die Parallelen müfsten aufser dem unendlichfernen Punkte noch einen zweiten Punkt (im Endlichen, wie jene Behaupter

des unendlichfernen Schnittes sagen würden) gemeinsam haben. Damit wäre der Grundsatz, daſs es zwischen zwei Punkten nur eine Gerade gäbe, durchbrochen und bewiesen, daſs von einem unendlichfernen Schnittpunkte zweier parallelen Geraden, auch nach dieser analytischen Beschreibung durch Gleichungen, in der jenen Grundsatz der einzigen Geraden enthaltenden Geometrie keine Rede sein darf.

Beliebig und Unendlich. $1/\delta = \infty$. Unvergleichbarklein.

Mehrfach sahen wir ein, daſs man nicht ohne weiteres vom Endlichen zum Unendlichen gelangen kann, und zwar weder mit einem Sprunge noch ohne einen solchen, sondern das Verlangen auf einem Wege, der Sprung oder Sprunglosigkeit bedeutet, überzugehen, zeigte sich überhaupt als unberechtigt und führt zu Widersprüchen. Wir sahen uns veranlaſst für die richtigere Ansicht das Wort Weitenbehaftung zu erfinden. Ebenso sahen wir, daſs man in einem arithmetisch gebildeten Ausdrucke wie $1/n$ nicht ohne Weiteres in dem Sinne für n immer kleinere Werte wählen darf, daſs man schlieſslich sogar 0 dafür setzte, denn die Einsetzung der Null zeigte sich hier als falsch. Vielmehr waren wir einverstanden, daſs man statt dessen für Einsetzung von Unendlichklein eine erlaubte, richtige Anschauung erhält z. B. ein Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung. Man könnte denken, hier wäre es nicht nötig von der Weitenbehaftung zu sprechen, sondern man ginge ja ganz allmählich durch immer kleinere Werte von n hindurch bis zu unendlichkleinen Werten; es stehe ja im Belieben sich n immer kleiner zu denken, und für beliebigkleine könne man doch sagen „unendlichklein“, für beliebig groſs (z. B. beliebig weite Entfernung des Schnittpunktes zweier Geraden) auch „unendlichgroſs“. Ist das wahr? Gehen wir von der Worterklärung aus!

Ist „unendlich“ oder „ohne Ende“ und „beliebiges Ende“ dasselbe? Man kann sagen, es stehe im Belieben sich ein Ende zu denken oder auch nicht, sich etwas bestimmtes sehr Groſses oder unbestimmtes sehr Groſses oder auch endlos Groſses vorzustellen. Schlieſst also „beliebig“ an sich schon das „Endlose“ ein? Nein, nicht alles steht im Belieben, sondern nur das, was auſserdem thatsächlich vorhanden und vorstellbar ist. Was nicht vorstellbar ist, kann man sich nicht nach Belieben vorstellen. Die bloſse Möglichkeit, daſs wir das Wort „beliebig“ bilden können, giebt also noch keineswegs die Thatsache an, daſs etwa etwas in unserem Belieben stehe. „Ich fahre nach Belieben mit der Eisenbahn“, ist nur dann richtig, wenn mir über-

haupt eine Eisenbahn benutzbar ist; ich nehme beliebig kleine und schliefslich unendlichkleine Werte nur dann, wenn es überhaupt Thatsache ist, dafs ich die Werte nehmen kann; und zu bilden den Übergang von kleinen Werten zu unendlichkleinen, steht nicht ohne Weiteres in meinem Belieben. Beliebig kleine Werte nehmen, heifst: ich kann mir thatsächlich immer kleinere Zahlen denken, und es ist diesem Kleinerwerden thatsächlich keine Grenze gesetzt. Behaupte ich, man könne beliebigkleine endliche und schliefslich unendliche Zahlen mit allmählichem Übergange einsetzen, so ist hier einfach eine Thatsache angenommen. Es ist aber etwas ganz Verschiedenes: sich beliebigkleine endliche Werte z. B. immer kleinere Brüche, und beliebigkleine unendliche Gröfsen vorzustellen. Zwei unendliche Gröfsen kann man sich nach Belieben als untereinander entweder gleich oder ungleich vorstellen, ebenso kann man sich nach Belieben zwei endliche entweder sehr kleine oder sehr grofse oder einen sehr grofsen und sehr kleinen Wert vorstellen. Jedenfalls schliefst das „Beliebigkleindenken" stets den Vergleich einer Gröfse mit anderen in sich ein, wenn auch dies Verhältnis nicht gerade stets als ein zugleich bestimmtes vorgestellt werden mufs; es ist in dieser Beziehung indessen auch nicht ein gänzlich Unbestimmtes; denn beliebigklein heifst: „nach Belieben kleiner als etwas Anderes", schliefst also die Bestimmung des Kleinerseins ein.

Beliebigklein kann darum eine endliche Gröfse sein, die kleiner ist als irgend eine, gerade vorher vorgestellte endliche Gröfse; oder auch eine unendlichkleine, die kleiner ist als irgend eine andere unendlichkleine, vorher vorgestellte und noch verglichene Gröfse.

Man kann nicht behaupten, dafs wegen der geistigen Freiheit, die wir durch das Wort „beliebig" ausdrücken und die sich thatsächlich nun wieder auf verschiedenen Gebieten zeigen kann, an sich schon das Unendlichkleine gezeigt oder darauf hingeführt wäre. Sondern

Es ist eine zur Thatsache des Endlichen hinzukommende Thatsache, dafs man sich nicht nur beliebigkleine endliche Gröfsen vorstellen kann, sondern auch unendlichkleine, dafs es eine Weitenbehaftung des Unendlichkleinen giebt, dafs man sich innerhalb dieser Weitenbehaftung Verhältnisse vorstellen und doch die Ansicht dabei festhalten kann, dafs jede dieser unendlichkleinen Zahlen jeder beliebigen endlichen Zahl gegenüber **unvergleichlichklein** sei.

Man könnte statt unendlichklein sagen „unvergleichlichklein", freilich nur dann, wenn man nur den Gegensatz der einen Weitenbehaftung zur anderen ausdrücken will (auch das Unendlichkleine zweiten Grades wäre unvergleichlichklein gegenüber dem Unendlichkleinen ersten Grades). Auch verschwindendklein wäre ein richtiger Ausdruck, soll indessen hier nicht gebraucht werden wegen der noch nicht erörterten Schwierigkeiten des Begriffes „Verschwinden".

Das Gebiet des Unendlichen oder die Weitenbehaftung des Unendlichen hat allerdings eine gewisse Beziehung zum Gebiete oder zur Weitenbehaftung des Endlichen, aber doch ist das Verhältnis eines Unendlichkleinen zu einem Endlichen nichts bestimmtes Endliches. $1 : \delta = \infty$ und $1 : \infty = \delta$.

Wenn hierdurch eine Beziehung des Endlichen 1 zum Unendlichkleinen δ und Unendlichgrofsen aufgestellt ist, so bezeichnet dies doch keineswegs ein Übergehen vom einen zum anderen durch Sprung oder Nichtsprung, sondern drückt nur eine allgemeine gewisse thatsächliche Stellung dieser geistigen Vorstellungsfähigkeiten zu einander aus.

δ ist eine dem Endlichen nicht mit endlichem oder bestimmtem Resultate vergleichbare kleine Zahl, ∞ eine solche nicht vergleichbare grofse Zahl; beide können in ihrem Gebiete beliebig grofs oder klein sein.

Ein Mangel des Wortes „unendlich". Übersinnlich- und Untersinnlich-vorstellbar.

Von einer Seite, auf der tiefes Verständnis und Interesse für die Schwierigkeiten des Unendlichen vorhanden ist, wurde mir vorgehalten: Wie kann eine Linie einen Punkt im Unendlichen haben! das wäre ja ein Endpunkt einer unendlichen Linie — eine Unmöglichkeit, ein Widerspruch schon im Worte!

Es steht allerdings nichts im Wege das Ende einer irgendwie begrenzten Linie mit der Punktvorstellung zu behaften, also von „Endpunkt" zu sprechen. Auch wenn man von einer unendlichen Linie spricht und verlangt, dafs man sich neben ihr eine zweite, etwa noch einmal so lange unendliche Linie vorstellen solle, so wird man auch hierbei von Endpunkten sprechen dürfen. Ebenso mufs man, wenn die unendliche Gerade im Unendlichen noch Punkte haben soll, einen derselben als den Endpunkt der soweit vorgestellten Geraden ansehen dürfen, also sagen dürfen: diese bis hierher vorgestellte Gerade hat hier ein Ende — und sie soll doch als unendlich vorgestellt

werden dürfen, dieser Punkt soll doch von irgend einem anderen unendlichweit liegen, die Strecke soll irgend einer „endlichen" gegenüber doch als „unendlich" gelten? Ja wenn unendlich nichts weiter heifst als „ohne Ende, ohne Endpunkt, ohne die Möglichkeit mit einem letzten Punkte behaftet zu werden", dann allerdings ist es ein Widerspruch von einem in der Unendlichkeit liegenden, einem unendlichfernen letzten Punkte, von der Behaftung mit einem solchen zu sprechen. Wie aber, wenn das Wort „unendlich" denn doch noch mehr bedeutet? Oder sogar etwas Anderes?

Läfst man einen Punkt auf einer Geraden bis in das Unendliche rücken, wie man zu sagen pflegt, so bedeutet dies sicherlich, dafs dort kein Gegenstand als vorhanden angenommen wird, welcher eine Punktvorstellung sinnlich veranlassen könnte. Auch der entfernteste Stern liegt noch im Endlichen auf der Geraden, in deren Richtung wir zu ihm hinsehen mögen. Diese Gerade ins Unendliche verlängert denken heifst jedenfalls soviel, dafs sie unvergleichlich viel weiter gehe, als solcher Stern steht. Also ein unendlichferner Punkt ist, entsprechend den Betrachtungen eines früheren Abschnittes, ein solcher, der nicht mehr als sinnlich-wahrnehmbar vorgestellt wird. Eine unendliche Linie heifst also nicht schlechthin ein solche „ohne Ende", sondern eine solche, die nicht im Endlichen aufhört d. h. die nicht in ihrer wirklich von uns verlangten Gröfse sinnlich-wahrnehmbar vorhanden sein kann, die durch keine Erscheinung der sinnlichen Welt in ihrer ganzen Gröfse angedeutet oder angeregt wird, welche von keiner sinnlichen Erscheinung so weit gewissermafsen begleitet werden kann, bis dahin, bis in die Gegenden der Vorstellung, deren unser Geist fähig ist. Und unendlich heifst aufserdem, dafs wir auch zweifellos darauf verzichten müssen, jemals durch irgendwelche Mittel dahin zu kommen sinnlich diese Gröfse wahrzunehmen. Also das Unendliche kann auch nicht als sinnlichvorstellbar betrachtet werden. Aber dennoch sprechen wir davon, aber dennoch sagen wir: die Gerade könne bis in das Unendliche verlängert gedacht werden. Das ist eine Thatsache.

Hierdurch schon ist bewiesen, dafs die Sprache mit dem negativen Worte „unendlich" nicht besonders glücklich ist. Auch der Sprachgebrauch des Wortes „ewig" möchte die Vorstellung eines Endpunktes verbieten: hat die ewige Zeit einen Endpunkt, kann es einen Zeitpunkt nach einer Ewigkeit geben, der das Ende dieser Ewigkeit ist und auf den noch Ewigkeiten folgen? Ist es nur dichterisch, wenn man von dem Plural Ewigkeiten spricht oder „von Ewigkeit zu Ewigkeit" sagt?

„Ewig und drei Tage“ ist gewifs nur ein scherzhafter Ausspruch. Warum? Darum, weil man hinter einer ewigen Zeit sich weiter keine Zeit mehr denken kann? Oder liegt das Scherzhafte nicht vielmehr in der Anfügung der geringen endlichen Spanne „drei Tage“? Es kann etwas nicht länger dauern als das unbestimmt Ewige; denn im Worte Unbestimmt und in der dazu gehörigen Vorstellung liegt der Ausschlufs eines Zeitpunktes, über den man durch das „Länger“ hinauskommt. Aber wie will man widerlegen, dafs es verschiedene Ewigkeiten in der Vorstellung geben könne, die irgend ein Längenverhältnis haben?

Durch viele Beispiele erkennen wir in den Betrachtungen dieses Buches, dafs die Unendlichkeit zur Raumvorstellung hinzugehört, wir brauchen uns gar nicht auf alte Schriften, Volkssagen und etwa solche Sprachen zu stützen, die vielleicht positive Ausdrücke für das Unendliche haben, wiewohl Beiträge hier sehr willkommen wären (bei Aristophanes, Lucian u. a. findet sich *ὑπερφυὴς τὸ μέγεθος*).

Die Gerade kann stets und zwar bis in das Unendliche verlängert vorgestellt werden; dies kann niemand leugnen. Auch eine verlängerte Gerade kann mit der Vorstellung von Punkten verbunden werden, auch das läfst sich nicht widerlegen und ist zum mindesten möglich. Also kann es uns nur darauf ankommen durch ein passend erfundenes Wort an Stelle von dem negativen „Unendlich“ den scheinbaren Widerspruch, den ich am Anfange dieses Abschnittes anführte, zu beseitigen. Ich schlage für Unendlichgrofs das Wort „Übersinnlichvorstellbar“ vor; es ist zwar sehr lang und soll auch im Folgenden nur dann und wann für „unendlichgrofs“ gebraucht werden, aber es ist nicht negativ; und unendlichklein möge heifsen: „Untersinnlichvorstellbar“. Ein Vorzug dieser Wörter liegt in ihrer gleichartigen Bildung, in ihrem Gegensatze zum Sinnlichen, der aber keine blofse Verneinung ist. Es soll darunter nicht verstanden werden, was über das Sinnlichwahrgenommene hinaus vorgestellt wird, das wäre noch nicht unendlich; auch nicht etwas, was über das Sinnlichwahrnehmbare hinausgeht. Sinnlichwahrnehmbar könnte man etwas nennen, was man zwar nicht gerade sinnlich wahrnimmt oder vielleicht auch noch nicht sinnlich wahrgenommen hat, was man aber, wenn man wollte, sinnlich wahrnehmen könnte oder genauer zu dessen Bildung im Geiste man sich durch sinnliche Wahrnehmung direkt anregen lassen könnte (ohne über diese Anregung hinauszugehen). Das Übersinnlichvorstellbare soll auch über das hinausgehen, was man sich als sinnlichwahrnehmbar vorstellen könnte, selbst wenn keinerlei Aussicht vorhanden ist, die Instrumente derart zu vervollkommnen,

daſs man es einmal wahrnehmen könnte; auf dessen sinnliche Wahrnehmung man zwar ein- für allemal wegen Aussichtslosigkeit verzichtet, das aber doch bei Annahme ausreichender Mittel als dadurch wahrnehmbar angesehen werden könnte. Das Sinnlichwahrnehmbare könnte, während es empfunden wird oder empiristisch ausgestaltet, infolge einer thatsächlichen Verknüpfung oder Beziehung zu geistigen Fähigkeiten, sogleich behaftet werden mit der Eigenschaft, die wir „endlich" nennen. Es könnte aber diese Behaftung mit dem Endlichen noch Vorstellungen erlauben, die nicht wahrgenommen werden, Vorstellungen von nicht wahrgenommenem Kleinen, sondern beliebig Kleinem — aber Endlichem! Und doch soll auch das Übersinnlich- oder Untersinnlichvorstellbare noch vorstellbar sein. Dies ist allerdings eine nicht beweisbare Voraussetzung. Wir sagen damit, daſs die unendlichlange Gerade und ähnlich ein unendlichkleines Dreieck wirklich zu dem gehört, was wir Vorstellung nennen — wozu sollte es auch sonst gehören? Vorhanden ist es sicherlich irgendwie im Geiste, sonst würde ja niemand verstehen, was man damit meint. Es kommt nun nur noch darauf an zu zeigen, daſs durch dieses bessere Wort nicht mehr der Widerspruch festgehalten wird, der durch das Wort „unendlich" zu tage trat. Die Gerade hat, wenn man sie sich soweit verlängert vorstellt, wie es thatsächlich möglich ist, eine dem Übersinnlichvorstellbaren angehörige Länge (statt unendlicher Länge). Eine solche mit der Weitenbehaftung des Übersinnlichvorstellbaren versehene Gerade möge ein Verhältnis haben zu einer zweiten Geraden derselben Weitenbehaftung oder einer zweiten in derselben Weitenbehaftung vorgestellten Länge dieser Geraden. Soll das widerspruchslos möglich sein, oder sollen sich z. B. zwei nicht ganz genau parallele Gerade (Abweichung um einen unendlichkleinen Winkel von gewissem Gröſsenverhältnis zu irgend einem zweiten unendlichkleinen Winkel) im Unendlichen schneiden d. h. vom Anfangspunkte aus bis dahin eine übersinnlich vorstellbare Länge haben, so wird man solchen Schnittpunkt auch als einen Endpunkt der Geraden bezeichnen dürfen. Zwischen der Vorstellung des „Endpunktes" und der „übersinnlichvorstellbaren Länge" aber existiert kein Widerspruch. Der Punkt an sich ist durchaus nicht etwas, was man nur dem „Sinnlichvorstellbaren" zurechnen dürfte, er ist überhaupt nicht sinnlich wahrnehmbar, kann allerdings infolge einer sinnlichen Anregung vorgestellt werden, ist aber nicht derart an das Sinnliche geknüpft, daſs man ihn ohne das für „Unsinn" erklären müſste. (An das Wort „Un-sinn" wird sich niemand stoſsen und etwa behaupten wollen, daſs es einen Sinn ohne das Sinnliche nicht geben könne! Sonst gäbe es ja überhaupt kein

Denken, keinen Schluſs etc., der vom Sinnlichen getrennt gedacht werden könnte.)

Auch der Umfang des unendlichgroſsen Kreises ist übersinnlich-vorstellbar, also vorstellbar. Man vergesse doch nicht wieder, daſs die wahre Kreislinie (ohne jede Dicke) ebenfalls unsinnlich ist, daſs unsere Vorstellung einer endlichen Kreislinie zwar durch sinnliche Eindrücke erregt, aber doch niemals dadurch direkt gebildet wird, daſs vielmehr der Geist nach Empfang (oder während Empfanges) der sinnlichen Eindrücke Wesentliches dazuthun muſs, um sich die Kreislinie richtig vorzustellen d. h. als das, was wir einen mathematischen Kreis nennen. Dies Dazuthun oder wie man es nennen mag, zeigt sich in etwas anderer Art, wenn wir uns den über- oder untersinnlich-vorstellbaren Kreis bilden. Wir werfen dabei absichtlich den Gedanken an die sinnliche Anregung wieder fort und wissen ganz bestimmt, daſs der genaue Anschluſs an das Sinnliche gerade das nicht giebt, was wir wollen. Aber trotzdem „stellen wir uns vor": wir stellen uns vor unendlichviele gleiche Radien, unendlichviele Punkte auf dem Umfange, diesen Umfang selbst, den wir uns krumm denken (was das heiſst, siehe später! Es ist dazu das Verhältnis eines derselben Weitenbehaftung angehörenden Stückes des Umfanges, also eines Stückes von unendlicher Länge zum unendlichen Radius nötig. Würden wir uns nun ein endliches Stück dieses unendlichen Umfanges vorstellen, so würde dies allerdings nicht mehr krumm, sondern wie eine gerade Strecke erscheinen oder uns vorkommen, da ein bestimmtes Verhältnis einer endlichen Linie zu einem unendlichen Radius nicht vorstellbar ist). Auch der Mittelpunkt eines unendlichen Kreises gehört dem Unendlichen oder Übersinnlichvorstellbaren an; freilich kann ein jeder Punkt auch als dem Endlichen angehörig vorgestellt werden, man kann an die Vorstellung eines Punktes die der endlichen Verhältnisse ketten oder umgekehrt die endlichen Verhältnisse mit Vorstellung eines Punktes behaften. Also ist man auch imstande sich einen Mittelpunkt eines unendlichen Kreises hier im Endlichen, sinnlich erregbar z. B. auf dem Papiere vorzustellen und darum herum auch beliebige Kreise oder andere endliche Figuren zu denken. Aber man vergesse nicht, daſs man dann sofort aus der Weitenbehaftung des Unendlichen zeitweilig herausgesprungen ist und ihn als Mittelpunkt des „unendlichen" sofort wieder mit dieser Weitenbehaftung verknüpft.

Weitengleichung und Beziehungsgleichung.

Es wird im Folgenden nicht selten von Gleichungen die Rede sein, in denen teilweise nur endliche, teils auch unendliche Gröfsen vorkommen. Schon aus den bisherigen Untersuchungen geht hervor, dafs scharfe Unterscheidungen nötig sind, um Widersprüchen aus dem Wege zu gehen. Oft kann schon durch vorsichtige Behandlung, durch Worte ein Fehler vermieden werden. Darum erscheint es zweckmäfsig Namen für Gleichungen verschiedener Art zu wählen.

Eine Gleichung, die nur endliche Werte enthält, heifse eine solche, die mit der Weitenvorstellung des Endlichen behaftet ist; entsprechende Namen erhalten solche, die entweder nur unendlichkleine oder nur unendlichgrofse derselben Ordnung enthalten. Freilich beschränkt man sich in der Mathematik nicht darauf einer Gleichung wie $y = x \cdot tan\, \alpha + b$ nur endliche Werte beizulegen, man untersucht auch, welchen Wert z. B. y erhält, wenn x gleich 0 oder δ oder ∞ wird; indessen ist diese Veränderung der Weitenbehaftung so wichtig für unsere Untersuchungen, dafs uns daran liegt, nach solcher Veränderung der Gleichung einen anderen Namen beizulegen.

Es heifse eine Gleichung eine Weitengleichung, welche nur Gröfsen derselben Weitenbehaftung enthält und so lange sie dies thut, und zwar je nach der Art der Weitenbehaftung eine Weitengleichung des Endlichen usw. z. B. $y = tan\, \alpha \cdot x + b$, solange y, x, α und b endliche Gröfsen haben.

Beziehungsgleichung aber heifse eine solche, die neben Gröfsen der einen Weitenbehaftung auch solche einer anderen enthält z. B. $a/\delta = \infty$.

Man wird zu untersuchen haben, wann die Weitengleichung in eine Beziehungsgleichung übergeht und umgekehrt und was das zu bedeuten habe. Der Ausdruck ∞/∞ kann einen Wert haben, der endlich und unbestimmt oder (bei bestimmtem Gröfsenverhältnis der beiden unendlichgedachten Gröfsen) bestimmt ist. Für alle Fälle ist zu fragen, welcher Art von Gleichung dann die Gleichung angehört. Ähnlich ist es mit $\delta \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $0 : 0$ und anderen. Ferner ist zu erforschen, welche Art von Wirklichkeit solchen Gleichungen in jedem Falle zuzuschreiben ist, eine metaphysische Aufgabe, an die wir erst herangehen können, nachdem wir metaphysisch die Begriffe des Endlichen und Unendlichen im Einzelnen versucht haben zu erklären.

Beispiele für Weiten- und Beziehungsgleichungen werden sich sogleich ergeben, wenn man bekannte Sätze über Hilfslinien und besondere Punkte beim Dreieck auf Dreiecke mit gemischter Weiten

behaftung überträgt. Auch wird sich hierbei zeigen, daſs unsere Vorstellung thatsächlich unendliche Gröſsen liefert, die bestimmte Verhältnisse zu einander haben, und sogar auf unendliche Gröſsen höherer Ordnung führt d. h. solche, die gegenüber einer unendlichen wieder unvergleichlich gröſser erscheinen. Damit wären diejenigen widerlegt, welche behaupten, wenn man sich einmal Unendliches vorstelle, so könne es nichts Gröſseres mehr geben. Freilich wird bei solchen Dreiecken die Existenz einer Weitenbehaftung des Unendlichkleinen oder Untersinnlichvorstellbaren wenigstens für eine einzige Strecke vorausgesetzt z. B. daſs der dritte Dreieckspunkt eines Dreiecks mit endlichen Seiten unter Umständen eine unendlichkleine Entfernung von der Gegenseite haben könne. Um dies zu rechtfertigen und nicht etwa als unbegründete Willkür erscheinen zu lassen, ist es mir wünschenswert erst einmal einen kleinen Abschnitt vorläufig einzufügen über den Begriff und die Vorstellung der Berührenden (Tangenten). Darin soll gezeigt werden, daſs diese in der Geometrie des Endlichen durchaus nötige und unbeanstandete Vorstellung die Existenz des Unendlichkleinen beweist.

Die Tangente endlicher Kurven.

Eine der Stellen, bei denen die elementare Mathematik auf das Unendliche stöſst, liegt bei der Erklärung der Tangente. Zwar scheint es, als könne man sich bei der Kreistangente helfen, indem man sie als Lot im Endpunkte eines Radius definiert und dann beweiſst, es könne ein solches keinen zweiten Punkt mit dem Kreise gemeinsam haben. Man pflegt zu sagen: angenommen, es hätte einen zweiten Punkt B auſser A mit dem Kreise gemeinsam, so entstände durch die beiden Radien MA und MB und die Sehne AB ein gleichschenkliges Dreieck ABM; dann wäre der Dreieckswinkel A gleich dem Dreieckswinkel B. Winkel A soll aber ein Rechter sein, also wäre auch B ein Rechter d. h. es bliebe für den Winkel M nichts übrig.

Wie aber, wenn man sagte, die beiden Punkte A und B lägen unendlich nahe, dann könnte Winkel M unendlichklein sein und das Dreieck trotzdem gleichschenklig, Winkel A und B aber unterschieden sich nur um unendlichwenig von Rechten, und dieses mache als Summand gegenüber allen endlichen Winkeln nichts aus und wäre ohne Bedeutung, sodaſs die Tangente allen endlichen Winkeln gegenüber doch einen Rechten mit dem Radius bildete? Man könnte also von unendlichnahen Punkten sprechen, und man würde sogar

behaupten dürfen, eine genaue Geometrie hätte diese Möglichkeit nicht aufser Acht zu lassen. Indessen würden die Feinde des Unendlichen sagen, sie wollten überhaupt nicht von dem Unendlichen sprechen, also unendlichnahe Punkte gar nicht in die Besprechung ziehen. Diese Ausflucht können sie nicht mehr finden, wenn sie von den Tangenten anderer Kurven, etwa der übrigen Kegelschnitte oder gar einer Spirale sprechen müssen. Bei ihnen giebt es eine solche Linie, wie den Kreisradius, dessen Anfangspunkt (Kreismittelpunkt) man von vornherein kennt, nicht mehr (die sogenannte Normale folgt erst aus der Tangente selbst). Man könnte dann versucht sein die Tangente zu definieren als eine Gerade, die nur einen Punkt mit der Kurve gemeinsam habe, doch erweist sich das z. B. bei einer Spirale sofort als falsch, die an irgend einer Stelle einer Windung gelegte Tangente schneidet die Kurve (andere Windungen) noch in vielen Punkten. Auch ein Versuch zu sagen, die Tangente schneide in derselben Gegend (ein übrigens recht ungenauer, unzureichender Ausdruck) nur einmal, nützt nichts, denn dies thut die Sekante auch. Endlich könnte man einfach dabei bleiben zu erklären, die Tangente oder Berührende sei eine Gerade, welche die Kurve in einem Punkte berühre.

Man beruft sich hier mit dem Worte „Berühren" oder etwa „Anschmiegen" einfach auf die Anschauung; jeder wisse ja, was „berühren" sein solle. Will man so verfahren, so kann man überhaupt die Genauigkeit sparen, sobald man nur irgend ein beliebiges Wort erfindet, was man sonst nicht gebraucht. Dies erlaubt die Mathematik wissenschaftlich nicht. Die Geometrie oder Raumlehre mufs so gestaltet werden, dafs darin alles zurückgeführt wird auf die einfachsten räumlichen Vorstellungen des Punktes, der Linie, Fläche und des Körpers. Sonst verliert sie ihre Sicherheit und Einfachheit, die gerade auf der geringen Anzahl der Grundbegriffe beruht. Allerlei Wörter zu erfinden, wenn man in Verlegenheit ist um Zurückführung auf das, womit es doch ganz offenbar zusammenhängt (z. B. die Tangente mit den Punkten der Kurve) ist nur ein Verzweiflungsmittel.

Da bleibt also schliefslich doch nichts weiter übrig als auf die unendlichnahen Punkte zu kommen. Punkte und unendliche Nähe sind jedenfalls etwas Räumliches, unendlichkleine Strecken gehören zu den Elementen der Geometrie; Wörter aber wie „Berühren", „Gleiten", „Rollen" oder „Geschwindigkeit" ohne räumliche Erklärung gehören zwar in das Gebiet des Räumlichen, hängen aber sicher mit Punkten und Strecken zusammen und bedürfen der Aufklärung ihres

Zusammenhanges mit diesen, selbst auf die Gefahr hin, dafs dies sehr schwierig ist und tüchtig zu denken giebt.

Es soll hier noch nicht die Frage entschieden werden, ob die Tangente nur zwei unendlichnahe Punkte mit dem Kurve gemeinsam hat oder etwa unendlichviele unendlichnahe oder eine unendlichkleine Linie, es genüge, dafs man ohne mindestens zwei unendlichnahe Punkte nicht auskommt und folglich auch eine unendlichkleine Strecke in der Anschauung bilden mufs, um das Berühren zu definieren. Mag also die unendlichkleine Strecke überhaupt an sich existieren oder nicht, die Geometrie und selbst die elementare kann sie als Vorstellungselement nicht entbehren, das Unendlichkleine mufs durchaus irgendwie vorkommen.

Dann aber — so werden wir bald sehen — müssen auch bestimmte Verhältnisse von mehreren unendlichkleinen und grofsen Strecken vorkommen, wenn man überhaupt die Geometrie auf Grund ihrer wenigen Elemente folgerichtig ausbaut.

Die harmonische Teilung.

Ähnlichkeit von Dreiecken mit gemischter Weitenbehaftung. Unendlichkleines zweiter Ordnung.

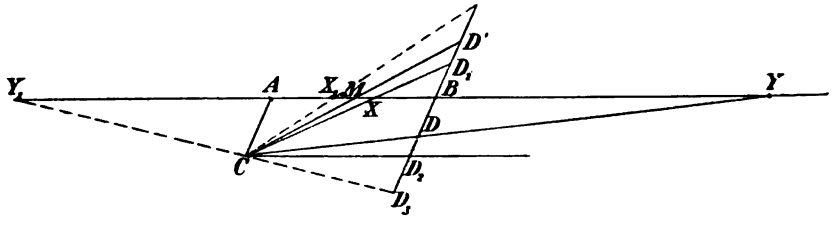


Fig. 9.

Die harmonische Teilung einer Strecke führt nach der gewöhnlichen, bisher üblichen Auffassung auf recht verwunderliche Resultate. Man findet die harmonische Teilung einer gegebenen Strecke AB (Figur 9) nach einem gegebenen Verhältnisse $p : q$ leicht, indem man unter irgend einem Winkel von A aus eine Gerade AC legt und darauf p Einheiten abträgt (bis C), dazu durch B eine Parallele legt und nach beiden Seiten hin q Einheiten abträgt; die Endpunkte seien D und D_1, und nun CD und CD_1 zieht bis zu den Schnitten X und Y mit der Strecke und ihrer Verlängerung. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ACX und BD_1X einerseits und ACY und BDY andererseits (gleiche Winkel) folgt, dafs $AX : BX = AY : BY = AC : BD$

oder $BD_1 = p : q$. Verändert man das Verhältnis $p : q$, teilt also die Strecke harmonisch d. h. innerlich und äufserlich nach dem neuen Verhältnisse, so kann man die Strecke AC beibehalten, aber BD und BD_1 entsprechend gröfser oder kleiner wählen und erhält danach anders liegende Teilpunkte X und Y. Beide Punkte liegen nahe an B, wenn BD sehr klein ist, aber Y liegt immer weiter von B ab als X. Rückt X von B aus immer mehr nach M, der Mitte von AB, indem BD_1 immer mehr gleich AC gemacht wird, so rückt Y gleichzeitig immer mehr von B ab nach rechts. Sobald $BD = AC$ wird, ist CD parallel AB, alsdann liegt X in M; denn es ist $BD = BD_2 = AC$. Wo aber Y liegt, erscheint unklar, gewöhnlich wird geschlossen, dieser Punkt sei in das Unendliche gerückt. Läfst man BD_1 und BD noch etwas gröfser werden als AC, etwa bis zu dem Punkte D_3, so schneidet die D_3 C die Gerade auf der linken Seite, zunächst in grofser Entfernung, und Y rückt von links nach A heran und trifft in A ein, sobald X von M her ebenfalls nach A gelangt ist. Sehr sonderbar ist es sich vorzustellen, was der Punkt Y thut, während X über die Mitte M hinwegrückt. Es wird da gewöhnlich geschlossen, Y rücke nach rechts in die Unendlichkeit und komme von links aus der Unendlichkeit wieder an, gleich als ob die Unendlichkeit links dasselbe wäre wie die Unendlichkeit rechts oder als ob die unendliche Gerade sich kreisartig im Unendlichen zusammenschlösse. Die sämtlichen Schwierigkeiten und Fragen der unendlichfernen Punkte, die wir bei den Parallelen fanden, tauchen wieder auf, nur scheinen sie hier noch dadurch verstärkt zu werden, dafs der Punkt X durch ein gewisses unsichtbares Band, die Vorschrift einer Proportion oder die Harmonie, mit Y verbunden erscheint, X aber nie verschwindet, sondern — wie flüchtig geschlossen wird!! — im Sinnlich-Endlichen bleibt. Also — so wird ebenso flüchtig geschlossen, könne auch Y doch nicht plötzlich ganz verschwunden sein, es müsse mithin nur einen Punkt in der Unendlichkeit auf der Geraden geben und zwar müsse man diesen ebensogut nach rechts hin wie nach links hin liegend ansehen. Allerdings ein höchst wunderliches Resultat, das mit Recht die Schüler, wenn sie es zum ersten Male hören, mit Staunen erfüllt!

Diese Schlüsse enthalten viele Fehler, die wir nach unseren bisherigen Untersuchungen aufdecken können. Betrachten wir das Ganze von vorn nach unserer Art!

Will man genau sein, so darf man nichts, gar nichts verschweigen. Wir müssen durchaus sagen, dafs AB eine endliche Strecke sein soll; später werden wir davon sprechen, wie es ist, wenn diese unendlich

wird. Im Verhältnis $p : q$ wird p und q ganz stillschweigend als endlich angesehen, aber wie ist's, wenn die Teilpunkte X und Y ganz dicht an A oder B heranrücken und schliefslich hineinfallen. In diesem Falle wird man eine der Gröfsen p und q unendlichklein annehmen müssen, während die andere endlich ist. Es ist dann AX (man zeichne eine annähernd richtige d. h. an das Unendlichkleine erinnernde Figur, indem man BD sehr winzig nimmt!) endlich und zwar gleich $AB - \delta$, $BX = \delta$, AY endlich und zwar $AB + \delta_1$, BY unendlichklein $= \delta_1$. Also die Proportion ist $AX : XB = AY : BY = AB - \delta : \delta = AB + \delta_1 : \delta_1$. Oder durch Umstellung der Innenglieder, was bekanntlich bei jeder Proportion erlaubt ist, $AB - \delta : AB + \delta_1 = \delta : \delta_1$. In dieser Form hat die linke Seite sowohl wie die rechte einen endlichen Wert und jede Seite gehört derselben Weitenbehaftung an; aber freilich unterscheiden sich die endlichen Glieder nur um Unendlichwenig, also müssen sich auch δ und δ_1 um etwas unterscheiden, das gegenüber ihrer Gröfse verschwindet. Etwas derartiges können wir nur Unendlichklein von zweiter Ordnung, vom zweiten Grade oder verschwindend gegenüber dem Untersinnlichvorstellbaren nennen. Für die Weitenbehaftung des Endlichen also hat die linke Seite den Wert 1, während sie sich für die Weitenbehaftung des Unendlichkleinen um sehr wenig von 1 unterscheidet und die rechte Seite $\delta : \delta_1$ hat für das Untersinnlichvorstellbare den Wert 1, aber beziehlich des Unendlichkleinen zweiter Ordnung unterscheidet es sich ein wenig von 1. Man sieht, dafs die Gleichung in diesem Falle eine Beziehungsgleichung ist, die für gewisse Betrachtungen ersetzt werden kann durch eine Gleichung mit endlichem Zahlenwerte 1 auf beiden Seiten.

Ferner mufste bei der gewöhnlichen Darstellung davon gesprochen werden, dafs Punkt X dicht an M herankommt und schliefslich hineinschlüpft. Auch hier ist die Weitenbehaftung mit dem Unendlichkleinen in Wahrheit vorgenommen worden, man stellt sich vor, dafs der Abstand MX unendlichklein sei und immer kleiner, bis er schliefslich 0 ist. Giebt es überhaupt Weitenbehaftungen noch unter dem Unendlichkleinen, so stecken auch diese alle darin. Es sei MX (Figur 9) unendlichklein $= \delta$, dann ist auch $D_1 D^1 = DD_2$ unendlichklein, etwa δ_2, $CD_1 D^1$ oder CDD_2 wird ein Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung und zwar mit zwei endlichen und einer unendlichkleinen Seite, ferner liegt Y im Unendlichen und es wird Dreieck ACY und BDY je ein Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung, nämlich mit zwei unendlichgrofsen und der dritten endlichen Seite. Die Proportionen lauten dann:

$AX : XB = AC : BD_1$ (oder BD) $= AY : BY$
oder $AM + \delta : BM - \delta = AC : AC - \delta_2 = AB + \infty : \infty$ (nämlich BY).

Hier haben wir zunächst das Verhältnis zweier endlichen Gröfsen vor uns, dann wieder das Verhältnis zweier endlichen, drittens aber das Verhältnis zweier unendlichgrofsen. Dabei ist jedesmal das erste Glied nur vom zweiten verschieden um etwas, welches unvergleichbar klein gegenüber beiden Gliedern ist, beim ersten Verhältnis ist es etwas Unendlichkleines, ebenso beim zweiten, beim dritten etwas Endliches. Betrachten wir jedes Verhältnis nur innerhalb der Weitenbehaftung seiner beiden Glieder, so dürfen wir es gleich 1 setzen, denn es ist AX nahezu gleich BX, und auch die beiden unendlichen Längen AY und BY unterscheiden sich nur um die mit dem Unendlichen unvergleichbare endliche Strecke AB. Wenn wir aber zugleich die andere Weitenbehaftung hinzuziehen, so sind die Werte nicht genau gleich 1, sondern unterscheiden sich um gewisse Gröfsen. Man sieht wieder, wie sehr es darauf ankommt von den Zwecken einer solchen Gleichung zu sprechen, wir sehen, dafs die ganze Figur in Wahrheit durch Behaftungen mannigfacher Art mit verschiedenen Weitenvorstellungen zu stande kommt und nur Sinn hat, insoweit diese Weitenbehaftungen auch berücksichtigt werden sollen.

MX sollte unendlichklein sein. Da man sich aber auch im Unendlichkleinen Verhältnisse verschiedener Art vorstellen kann, so kann MX verschieden unendlichklein vorgestellt werden; dementsprechend giebt es auch Punkte Y, die im Unendlichen liegen, aber doch verschiedene sind. Wenn aber schliefslich MX gleich 0 ist, so wird CD parallel zu AB, es giebt einen Schnittpunkt überhaupt nicht mehr, auch nicht Dreiecke mit gemischter Weitenbehaftung. Man könnte fragen: wo ist denn nun der Punkt Y geblieben, er mufs sich doch nach X richten? Wer das sagt, der hat noch nicht verstanden, was in den ersten Abschnitten dieses Buches behandelt wurde. Es liegt kein Punkt auf einer Geraden, sondern man behaftet eine Gerade mit der Vorstellung eines Punktes! Es liegt auch kein unendlichferner Punkt auf einer Geraden, sondern man behaftet sie mit der Vorstellung von unendlichfernen Punkten. Es ist deshalb falsch, überhaupt zu erwarten, dafs zu X stets ein Punkt Y gehören mufs. Einzig und allein das Proportionsgesetz macht die Existenz des Punktes Y aus, wenn der Punkt X angenommen wird d. h. AB mit solcher Punktvorstellung behaftet wird. Wenn man nun AB halbiert und sich einen Halbierungspunkt M darauf vorstellt, so ist damit noch lange nicht gesagt, dafs man sich nun auch einen entsprechenden Punkt Y vorstellen müsse oder könne. Die Vorstellung von Y bindet sich nicht einfach an die

Existenz oder an die bloſse Vorstellung von X, sondern sie bindet sich an das Gesetz, mit dem man beide Punkte oder vielmehr die Streckenvorstellung behaftet. Dies Gesetz ist die Proportion. Die Gleichheit von AM und BM verlangt nun zunächst, daſs die andere Seite der Gleichung, rein arithmetisch genommen, auch gleiche Glieder habe. Damit ist noch lange nicht gesagt, daſs solche gleichen Glieder Strecken überhaupt sein können. Es kommt darauf an, ob die hinzuverlangte Vorstellung der Erzeugung des Punktes Y überhaupt dann noch vorhanden ist und einen Punkt ergiebt. Zeichnet man aber BD_2 gleich AC und verbindet, so giebt es eine Parallele und diese schneidet nicht! Während es also inwendig ähnliche endliche Dreiecke für Punkt X ergiebt, giebt es Dreiecke für Y überhaupt nicht, damit ist dasjenige Behaftungsgesetz, welches überhaupt erst die Existenz oder die Vorstellung von Y erzeugt, nicht mehr vorhanden. Auch arithmetisch ist es nicht mehr vorhanden. Denn wenn AX ganz genau gleich BX sein soll, so müssen zwei Gröſsen, die unendlich sein mögen und AY und BY ganz äuſserlich genannt sein mögen, ganz genau gleich sein und sich durch keine Gröſse, auch nicht die einer anderen Weitenbehaftung mehr unterscheiden. Nun verlangt man aber andererseits, daſs der Punkt Y auſserhalb von AB liegen solle, daſs seine Entfernungen von A und B sich also stets um AB unterscheiden sollen. Dieses geometrische Verlangen ist unerfüllbar und damit fällt auch die daraus folgende arithmetische Bedingung, daſs beide Gröſsen sich um etwas unterscheiden sollen, fort. Denn, wie gesagt, ist die andere Bedingung der linken Seite, daſs sich beide Glieder gar nicht unterscheiden, um nicht das Geringste, also auch nicht um etwas Endliches gegenüber dem Unendlichen. Es bleibt also dabei, daſs wir einfach diejenigen Bedingungen, welchen die ganze Figur unterworfen werden sollte, die der Proportion und des Auſserhalbliegens von Y, durch die Annahme der genauen Gleichheit von p und q selbst wieder zerstört haben. Dann können wir auch nicht erwarten noch einen Punkt Y zu finden. Und wenn wir ihn doch suchen und nun einfach annehmen, er läge im Unendlichen, so thun wir so, als hätten wir unsere Bedingungen nicht selbst unlogischer Weise zerschnitten.

Ganz anders ist die Sache, wenn X zwischen A und M liegt und zwar unendlich wenig von M entfernt, dann sind sofort wieder Dreiecke da und sofort sind die Glieder der Proportion nicht mehr in jeder Beziehung gleich, dann tritt der Punkt Y auch wieder auf und kann auftreten, er ist logisch möglich und zwar kann er an verschiedenen Stellen im Unendlichen links liegen, je nachdem wie groſs wir die unendlichkleine Abweichung MX genommen haben. Haben

wir es aber unbestimmt gelassen, wie groſs sie sein soll, soll sie also unbestimmt unendlich sein, so liegt Y auch unbestimmt unendlichfern. Nicht aber liegt Y etwa in unbestimmt unendlicher Entfernung, wenn p gleich q, also CD parallel zu AB ist.

Das Problem erlaubt noch mannigfache Ausführungen. Zieht man z. B. im Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung ACY eine Parallele zu AC nicht in endlicher Entfernung wie BD, sondern auch in unendlicher, so hat man ähnliche Dreiecke mit entsprechend unendlichen Seiten, deren Verhältnis ein endliches ist und zwar nicht gleich 1, sondern irgendwie anders. Es wäre auch interessant den Fall durchzuführen, daſs die Hilfslinie AC unter einem unendlichkleinen Winkel zu AB gelegt würde, oder daſs AB unendlichklein angenommen würde usw.

Fernere Verhältnisse des Unendlichen bei Dreiecken mit gemischter Weitenbehaftung.

Wieder Unendlichkleines zweiter Ordnung.

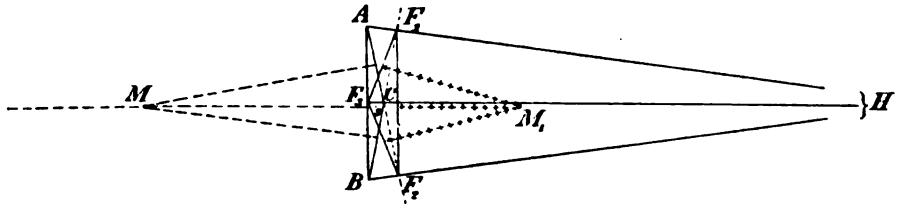


Fig. 10.

Die drei Seiten des Dreiecks ABC seien endlich und verschieden groſs, Winkel A und B dieses Dreiecks aber unendlichklein, d. h. also es sei der Abstand CF_3 unendlichklein, was aus der Weitenbehaftung der Winkel folgt (es gelten die Formeln $\sin A = CF_3 : b$ und $\tan A/2 = \varrho : (s - a)$, wobei $s - a = (b + c - a) : 2$ bedeute). Da das Unendlichkleine nicht sinnlichwahrnehmbar ist, ist die Figur natürlich fälschlich so hergestellt, daſs das Unendlichkleine endlich, aber doch beträchtlich kleiner als die eigentlichen endlichen Grössen gezeichnet ist. Aus dieser Voraussetzung einer einzigen unendlichkleinen Strecke (oder der Winkel A und B) und der endlichen Seiten und den Sätzen über das Dreieck überhaupt, welche der Weitenbehaftung des Unendlichen nicht widersprechen, also auch für dieses Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung giltig bleiben, ergeben sich nachstehende Folgerungen. Es werden dabei einige Sätze aus der elementaren Planimetrie als bekannt vorausgesetzt und nur angeführt. Es behandelt dieser Abschnitt also nur einige interessante Beispiele, darum habe ich auch nicht wie sonst die Beweise zugefügt.

Die drei Höhen AF_1, BF_2 und CF_3 schneiden sich in einem unendlich entfernten Punkte H (Höhenschnitt, in der Figur nur angedeutet), die Mittellote (unterbrochene Linien) in einem auf der anderen Seite von AB liegenden, unendlich entfernten Punkte M, dem Mittelpunkte des unendlichgroſsen, dem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises mit dem unendlichgroſsen Radius r. Der dem Fuſspunktendreieck $F_1F_2F_3$ umschriebene Kreis (Feuerbach'scher Kreis oder Neunpunktekreis) hat einen unendlich entfernten Mittelpunkt M_1 im Schnitte der drei unendlichen Mittellote des Dreiecks $F_1F_2F_3$ (in der Figur mit kleinen Kreuzen gezeichnet); er hat einen unendlich grossen Radius r_1 und geht nach einem bekannten Satze durch die Mitten der Seiten AB, AC, BC und durch die Mitten der unendlichen Höhenabschnitte AH, BH, CH. (Schnitten sich die drei Höhen im Innern des Dreiecks ABC, wie es bei einem endlichen Dreiecke oft der Fall ist, so wären diese sogenannten Abschnitte Teile der ganzen Höhen, hier sind sie gröſser als die ganzen Höhen AF_1 usw.)

Die drei Punkte H, M und M_1 liegen auf einer Geraden, der Eulerschen, und zwar M_1 genau in der Mitte von MH.

Der Schnitt der drei Mittellinien von ABC (in der Figur sind diese Linien nicht gezeichnet, nur ihr Schnitt) S liegt ebenfalls auf dieser Geraden und zwar doppelt so weit von M wie von M_1 entfernt. Zwischen den unendlichen Strecken, die verschieden lang sind, bestehen die folgenden Beziehungsgleichungen: $r : r_1 = 2 : 1$, $MM_1 = M_1H$ oder $MH : M_1H = 2 : 1$, $MS : SM_1 = 2 : 1$, also $MS : MS_1 = MH : M_1H$. Letzteres wird genannt der Steinersche Satz über die Eulersche Gerade, nämlich es ist die Entfernung der Mittelpunkte des Feuerbachschen und des umschriebenen Kreises harmonisch durch den Höhenschnitt und Mittellinienschnitt wie $2 : 1$ geteilt oder es sind H und S die Ähnlichkeitspunkte jener beiden Kreise. Die Ähnlichkeit zweier endlicher Kreise, die in der endlichen Geometrie einige Schwierigkeiten bereitet, wenn man sie auf die Ähnlichkeitserklärung von Dreiecken, Vierecken usw. zurückführen will, würde sich leicht ergeben, wenn man annehmen dürfte, daſs der Umfang aus unendlichviel unendlichkleinen Geraden bestehe. Dann würde die Kreisfläche zerlegt in Dreiecke mit gemischter Weitenbehaftung; ebenso der unendlichgroſse Kreis. Der richtige Ort für die Ausführung dieser Lehre wäre erst hinter genaueren Untersuchungen über den Kreis und die Umfangsberechnung.

Zeichnet man in unserem Dreieck ABC noch die Winkelhalbierenden der Dreieckswinkel und Auſsenwinkel, so erhält man den einbeschriebenen Kreis mit unendlichkleinem Radius ϱ und die anbe-

schriebenen mit den unendlichkleinen Radien ϱ_a und ϱ_b (weil $tan\ B/2 = \varrho_b : s$ und $tan\ A/2 = \varrho_a/s$) und dem unendlichgroſsen Radius ϱ_c. Da die halbe Seitensumme s endlich ist, so gilt dies auch von $s - a$ und $s - b$. Es ergeben sich die Beziehungsgleichungen $tan\ A/2 = \varrho : (s - a)$, $tan\ B/2 = \varrho : (s - b)$; die unendlichkleinen Gröſsen ϱ und Tangenten haben hierin ein bestimmtes endliches Verhältnis.

Die Gleichung $tan\ C/2 = \varrho : (s - c)$ wird, da $tan\ (R - \delta) = \infty$, zu $\infty = \delta : (s - c)$ oder $\delta = \infty \cdot (s - c)$; dies ist nur möglich, wenn $s - c$ unendlichklein von zweiter Ordnung ist. Dasselbe ergiebt sich aus den bekannten Beziehungen $tan\ A/2 = (s - c) : \varrho_b = (s - b) : \varrho_c$ oder $\varrho_c : \varrho_b = (s - b) : (s - c)$, d. h. unendlichgroſs : unendlichklein wie endlich : unendlichklein zweiter Ordnung. Ebenso ist $tan\ B/2 = (s - a) : \varrho_c = (s - c) : \varrho_a$ oder endlich : unendlich = unendlichklein zweiter Ordnung : unendlichklein. Wir hätten mithin eine Beziehungsgleichung zwischen vier Weitenbehaftungen. Zugleich sind wir im vorigen Abschnitte auf die Weitenbehaftung des Unendlichkleinen zweiter Ordnung geführt worden, die sich demnach als eine notwendige Folge aus der Betrachtung von Dreiecken mit gemischter Weitenbehaftung ergiebt. Ist in einem Dreieck (man zeichne es angenähert richtig!) Winkel B unendlichklein, die Winkel A und C aber endlich (oder $90 - \delta$), auſserdem Seite a und c endlich, so wird b unendlichklein und $s - c$ unendlichklein erster Ordnung, also $s - a = b/2$, da nahezu $c = a$; ebenso wird $s = a = c$. Nun ist $tan\ A/2 = \varrho : (s - a)$; und da $tan\ 45 = 1$, also das Verhältnis der beiden unendlichkleinen Grössen hier den endlichen Wert 1 hat, so wird $\varrho = b/2$. Ähnlich wird ϱ_a und $\varrho_c = a = c = s$. Da $tan\ B/2 = \varrho_b : s$, so haben die beiden unendlichkleinen Grössen ϱ_b und $tang\ B/2$ das Verhältnis a oder c.

Nimmt man b endlich, a und c aber unendlich, so findet man auſser ähnlichen Resultaten, wie die eben angeführten sind, wieder ein harmonisches Verhältnis von 4 unendlichgroſsen Strecken auf der Eulerschen Geraden, es haben die unendlichgroſsen Radien r und r_1 das Verhältnis 2 : 1 usw. (Man benutze die eben gezeichnete Figur!)

Eine neue Eigentümlichkeit für die Weitenbehaftung mit dem Endlichen.

Sowohl im allgemeinen wie an Beispielen lernten wir die Beziehungsgleichungen $1 : \delta = \infty$ oder $a : \delta = \infty$, wo a eine endliche Gröſse bedeutet, kennen, ferner, wenn δ_1 und δ_2 verschiedene unendlichkleine Gröſsen sind, $\delta_1 : \delta_2 = a$, ähnlich $\infty_1 : \infty_2 = a$, endlich

$\infty : a = \delta : \delta^{II}$, wobei δ^{II} die untersinnlichvorstellbare Gröfse zweiter Ordnung andeutet. In allen diesen Gleichungen sind die Beziehungen zwischen drei oder vier Weitenbehaftungen durch Division oder Multiplikation ausgedrückt; man kann sie auch schreiben $a = \delta \cdot \infty$, $a \cdot \delta_2 = \delta_1$, $\infty_1 = a \cdot \alpha_2$, $\infty \cdot \delta^{II} = a \cdot \delta$. Da aber $a = \delta \cdot \infty$, so kann man die letzte Gleichung auch schreiben $\infty \cdot \delta^{II} = \infty \cdot \delta \cdot \delta$ oder $\delta^{II} = \delta \cdot \delta = \delta^2$. Es folgt der Satz: Eine unendlichkleine Gröfse mit sich selbst multipliziert, giebt eine Gröfse von unendlichkleiner Weitenbehaftung zweiter Ordnung. Entsprechend, da $\delta = 1 : \infty$, also $\delta \cdot \delta = 1 : (\infty \cdot \infty)$, stellt $\delta^2 = 1 : \alpha^2$ oder $= a : \infty^2$ die Beziehungsgleichung zwischen dem Endlichen, dem Unendlichkleinen zweiter Ordnung und dem unendlichgrofsen zweiter Ordnung vor. Beziehungen wie $\delta : \delta^2 = \infty$ oder $\delta_1^2 : \delta_2^2 = a^2$ und $\infty_1^2 : \alpha_2^2 = a^2$ lassen sich leicht deuten.

Man findet stets, dafs ein Verhältnis zweier unendlichen Gröfsen derselben Weitenbehaftung einen endlichen Wert, also einen Wert hat, der einer anderen Weitenbehaftung als sie selbst angehört, und dafs ein Produkt zweier unendlichen Gröfsen derselben Weitenbehaftung einen Wert hat, der nicht endlich ist, aber doch einer anderen unendlichen Weitenbchaftung angehört.

Bildet man aber das Produkt oder den Quotienten irgend zweier endlichen Werte, so ergiebt sich wieder ein endlicher Wert. Darum kann die Weitenbehaftung des Endlichen, der wir früher bereits durch Beziehung auf die Sinnlichkeit eine eigentümliche Stellung anwiesen, nicht einfach als gleichwertig (irgend einer anderen) in die Reihe der Weitenbehaftungen eingereiht werden, sondern wir können ihr eine besondere Definition zu teil werden lassen.

Die Weitenbehaftung mit dem Endlichen ist diejenige, in welcher das Produkt oder das Verhältnis zweier Werte einen derselben Weitenbehaftung angehörigen Wert hat.

Wenn man beobachtet, wie das Unendlichkleine zweiter Ordnung sich ähnlich verhält zum Unendlichkleinen erster Ordnung wie dieses zum Endlichen usw., so wird man in Versuchung geführt, eine Reihe von beliebig vielen auf- oder absteigenden Weitenbehaftungen anzunehmen, oder zu vermuten, es wäre ganz einerlei, welcher von ihnen man den Namen der endlichen oder den irgend einer Ordnung beilegen wolle, wenn man nur von da ab richtig nach oben oder unten in der Reihe weiter zählt.

Dem ist nicht so. Die Stelle der Reihe, an der die endliche Weitenbehaftung steht, ist eigentümlich und nicht in jeder Beziehung

mit irgend einer anderen Stelle vertauschbar. Innerhalb der Weitenbehaftung des Endlichen läfst sich mancherlei anfangen, wozu man die übrigen Weitenbehaftungen nicht sofort braucht z. B. die Division von Gröfsen. Eine Division in einer anderen Weitenbehaftung führt aber sofort aus derselben heraus. Freilich soll damit nicht gesagt sein, dafs man nicht gewisse Operationen auch innerhalb einer anderen Weitenbehaftung vornehmen könnte, ohne aus ihr herauszugehen; z. B. $\infty + \infty$ giebt etwas Unendliches derselben Weitenbehaftung, und $\infty - \infty$ kann wenigstens einen unendlichen Wert ergeben.

Sind beispielshalber ∞_1 und ∞_2 die beiden Radien des umschriebenen und des Feuerbachschen Kreises für das Dreieck mit (zwei) unendlichkleinen Winkeln, so wäre $\infty_2 = \frac{1}{2} \cdot \infty_1$, also $\infty_1 - \infty_2 = \frac{1}{2} \cdot \infty_1$. Stellt aber ∞ und ∞ die unbestimmte Länge eines von einem Punkte ausgehenden Strahles vor, so kann $\infty - \infty$ die endliche Strecke AB ergeben; und zwar ist diese Strecke beliebig oder unbestimmt endlich; $\infty - \infty$ gehört zur Klasse der sogenannten unbestimmten Ausdrücke. Dieselben spielen auch beim Unendlichen eine wichtige Rolle. Sagt man, $\infty - \infty$ sei unbestimmt oder gleich unbestimmt, so mufs man sich zunächst der Bedeutung des Gleichheitszeichens vollbewufst werden. Zu allen den Werten, die man unter dem Namen unbestimmt hier zusammenfassen kann, gehört aufser endlichen und unendlichen auch die Null. Ich füge den folgenden kleinen Abschnitt ein, der auch über die Bedeutung des Gleichheitszeichens näheren Aufschlufs giebt.

Null. Die identische und nichtidentische Gleichung.

Es soll noch nicht logisch und metaphysisch genau untersucht werden, als was wir Null eigentlich betrachten müssen, aber es möge doch ihr Begriff mathematisch möglichst klar erfafst werden.

Auf Null pflegt man mathematisch zu kommen durch eine Nulldifferenz z. B. $3 - 3$. Eine solche hat zwar den Wert Null; es ist aber nicht richtig zu sagen, die Vorstellung $3 - 3$ sei genau dasselbe wie die Vorstellung Null. Erstere enthält gedanklich viel mehr, sie enthält die Zahlenvorstellung 3 sogar zweimal und dazu noch die Vorstellung des Wegnehmens. Dies ist bei der Vorstellung Null nicht mehr in genau demselben Umfange und Sinne der Fall, wenn es auch ganz richtig ist, dafs man durch jene Differenz auf die Vorstellung von Null hinleiten kann. Logisch würde man fragen: ergiebt sich die Null ohne weiteren Zusatz als reine Folgerung aus

$a - a$? Worauf beruht es, dafs wir statt $3 - 3$ auch $a - a$ und als dessen Resultat auch Null sagen können? Man dürfte mit Vorbehalt dieser Frage sagen: das Resultat jener zusammengesetzten Vorstellung, nicht aber die einfache Zusammenreihung der Begriffe 3 und 3 und des Subtrahierens ist Null. Noch genauer wäre: es giebt einen Grund dafür, dafs wir $3 - 3$, $5 - 5$ usw. oder $a - a$ als Verbindungen auffassen dürfen, welche alle einen und denselben Wert haben; diesen Wert, hervorgehend aus jenem Grunde, nennen wir die Zahl Null. Wenn es uns nicht darauf ankommt, welche Vorstellungen wir ursprünglich miteinander verbunden haben, ob wir $5 - 5$ oder $3 - 3$, kurz $a - a$ haben, wenn es uns nur auf das Resultat ankommt, so dürfen wir für diesen Zweck die Vorstellung $3 - 3$ ersetzen durch die Zahlenvorstellung Null.

Das Gleichheitszeichen in der Formal $a - a = 0$ bedeutet demnach nicht, dafs sich, logisch genommen, alles, was in $a - a$ stecke, auch genau mit dem decke, was 0 bedeutet, sondern nur, dafs der aus dem zweimal gesetzten Begriffe a, dem Begriffe des Subtrahierens und der Anwendung dieses Begriffes (freilich noch nicht ganz allein hieraus) hervorgehende Begriff sich deckt mit Null.

Ebenso ist die Gleichung $x = a$ logisch nicht identisch wie $a = a$ (logisch wäre zu fragen, wieso der Grundsatz der Identität und was noch dabei verwendet werde). Wenn wir absichtlich sagen x, so meinen wir damit, wir sollten uns doch noch etwas Anderes, nicht dem Werte nach, aber dem Umfange der Vorstellung nach Anderes bei x denken als bei a. Die Mathematik sagt, x bezeichne eine Variabele, welche in diesem Falle den Wert a habe; also die Vorstellung des Variabelen, des Veränderlichen kommt hinzu, wenn man statt $a = a$ sagt $x = a$.

Ähnlich ist $+ \cdot + = - \cdot -$, die bekannte Vorzeichenregel, nicht als identisch aufzufassen. Beobachtet man das nicht, so könnte man gar — wie man bisweilen hören kann — das Paradoxon ableiten: das Gröfsere sei gleich dem Kleineren.

Der Bruch $^a/_a$ ist logisch, nämlich dem Umfange nach, nicht genau dasselbe wie 1, nur der Zahlenwert ist derselbe (logisch und metaphysisch würde man dabei fragen müssen, was bedeutet eine Zahl?). Wenn man sagte, *sin* 30^0 bedeute das Verhältnis zweier Strecken (gegenüberliegender Kathete zur Hypotenuse), so wäre dies nicht völlig dasselbe, als wenn man sagte, es bedeute eine Zahl, nämlich eine auf der Sinuslinie ablesbare gebrochene Anzahl von Einheiten. Auch eine auf einer Linie ablesbare Zahl ist logisch ein weiterer Begriff als die reine Zahl $\frac{1}{2}$. *Sin* $30^0 = \frac{1}{2}$ ist keine

logisch identische Gleichung. Für gewisse Zwecke oder Umstände, nämlich für irgend eine Rechnung, ist es gleichgiltig, ob ich die ganze Vorstellung oder ob ich nur den numerischen Wert für *sinus* nehme. Solange ich aber für *sin* 30° nicht geradezu das Zeichen $^1/_2$ schreibe, sondern absichtlich noch *sin* stehen lasse, behalte ich absichtlich noch die in den Buchstaben *sinus* erkennbare weitere Vorstellung bei, verpflichte mich indessen zugleich durch das Gleichheitszeichen und das Rechnen mit den Grundrechnungsarten, das Zeichen *sin* für die numerische Rechnung nur als Zahl gelten zu lassen. Es liegt darin der Vorzug der benannten Zahlen, der Zeichen x, y, z usw. Bei allen diesen hat der Mathematiker zwei Reihen von Gedanken; innerhalb der Rechnung sind es Zahlen, aber im einzelnen knüpft er nebenbei noch stets daran gewisse Vorstellungen — des Veränderlichseins, des Räumlichen usw.

Ganz eigentümlich ist die Bedeutung des Gleichheitszeichens bei einer unbestimmten Gleichung z. B., falls w (wählbar) eine unbestimmte Gröfse bedeutet, der Gleichung $\infty - \infty = w$. Es fragt sich dann, in welchen Fällen man überhaupt irgend eine gewählte Gröfse durch eine andere ersetzen kann, ob nicht auch das Gleichheitszeichen unter Umständen richtig ist, falls man statt eines in der Gleichung vorkommenden Wertes zwar nicht wie bei w irgend einen beliebigen wählen kann, aber doch einen, der streng genommen oder unter anderen Umständen etwas Anderes bedeutet. Man denke z. B. daran, dafs o und δ gegenüber endlichen Gröfsen sehr ähnlich sind und wir den Grundsatz aufstellen konnten, dafs der unendlichkleine Summand neben endlichen fortgelassen d. h. dafür Null gesetzt werden darf. Wir bedürfen hierbei der allergröfsten Genauigkeit und wollen uns nicht scheuen Einzelbetrachtungen in dieser Richtung anzustellen, selbst wenn wir etwas, schon in anderem Sinne Besprochenes wiederholen müfsten.

Null und δ (das Unendlichkleine).

Es ist durchaus nicht richtig, dafs man statt Null auch sagen könne: Unendlichklein. Mit dem Begriffe klein ist immer der Gedanke des Vergleichens verbunden; man denkt an Anderes, was gröfser ist. Also auch bei Unendlichklein denkt man an Anderes, was gröfser ist, bei Null aber denkt man nicht mehr in demselben Sinne an Gröfseres. Das Wort „unendlichklein" an sich verlangt das Vorstellen von klein im Gegensatze von grofs oder gröfser oder weniger klein, und das Wort unendlich bedeutet die Thatsache, dafs unser Geist fähig ist

sich immer noch etwas Kleineres vorzustellen als irgend eine, wenn auch noch so kleine endliche oder sinnlichvorstellbare Gröfse. Diese Gröfse wie auch das Unendlichkleine gehören mithin zu der Gruppe oder Stufe vorgestellter Gröfsen; wir können dieses Wort nicht gebrauchen, wenn wir nicht unmittelbar Gröfsenvorstellungen hineinfassen, während wir uns im Begriffe Null keine Gröfse (im eigentlichen Sinne) vorstellen. Es folgt also der

Satz. Das Unendlichkleine ist nicht eine mit Null völlig zusammenfallende Vorstellung.

Der Punkt und δ.

Jeder Mensch verbindet mit der Raumvorstellung auch ohne Zweifel die Vorstellung des Punktes. Es ist aber falsch den Punkt als unendlichkleine Stelle im Raume zu definieren. Angenommen, ein Mensch kenne durchaus keine Punktvorstellung, so kann er durch fortwährendes Kleinerdenken eines räumlichen Gebildes nicht ohne Sprung zum Punkte gelangen. Er hat dazu etwas nötig, was man freilich mit Unrecht einen Sprung im räumlichen Sinne nennen würde, es ist ein Sprung von einer geistigen Grundfähigkeit zur anderen, von der Fähigkeit die so zu nennende Punktbehaftung anwenden zu können. Auch zum Unendlichkleinen gelangt man nach unseren Untersuchungen nicht durch einen räumlichen Sprung vom Endlichen aus, ebensowenig gelangt man innerhalb des Räumlichen ohne Sprung vom Endlichen aus dahin, sondern man hat wiederum eine „Weitenbehaftung" eigener Art nötig, um sich aufser dem Endlichen auch das Unendlichkleine im Raume vorstellen zu können. Dieser Übergang oder diese Anwendung von etwas Neuem ist eine andere Art von Übergang als der vom Räumlichendlichen zum Punkte. Man kann auch vom Unendlichkleinen sprechen und dann auf den Punkt kommen d. h. besser gesagt, erst das Unendlichkleine sich räumlich vorstellen und nun, unter Anwendung einer anderen Fähigkeit, die Punktvorstellung bilden. Und zwar ist nicht einzusehen, warum es leichter sein soll vom Unendlichkleinen zur Punktvorstellung überzugehen als vom Endlichen aus. Das Unendlichkleine, auch das Unendlichkleine höherer Ordnung giebt den Punkt ebensowenig wie das Endliche. Man kann einen Geist, der die Punktvorstellung besitzt — mag sie auch herstammen, woher sie wolle — wohl auf diese Vorstellung hinleiten, wenn man ihn auffordert, sich einen Körper immer kleiner zu denken; dieser Mensch gelangt dann zur Vorstellung des Unendlichkleinen, aber es wird in der Regel in seinem Geiste dann auch die Punktvorstellung,

entweder früher oder später als die des Unendlichkleinen, auftauchen, weil sie eine gewisse Verwandtschaft mit beiden Weitenbehaftungen hat, nicht aber weil sie im Raume vorhanden wäre. So kommt es, daſs die lateinische Bezeichnung Punkt von einem räumlichen Begriffe hergenommen ist; so verfährt die Sprache überhaupt, sie braucht oft Wörter nur infolge von Verwandtschaft; das Wort Augenblick oder auch das lateinische Moment sind ähnlich entstanden, und doch hat jeder dabei nicht mehr die Vorstellung einer Zeit, die vergeht, wenn man mit dem Auge blickt, sondern versteht etwas anderes unter Blick des Auges, Zeit eines Blickes und Augenblick, Moment oder Zeitpunkt (letzteres ist wieder eine Übertragung).

Wer noch nicht weiſs, was ein Punkt ist, aber die Fähigkeit besitzt diesen Begriff zu bilden, den bringt man darauf, indem man ihn veranlaſst sich beliebig Kleines vorzustellen, und ihm dann sagt, man meine noch etwas anderes, nämlich nicht etwas, das eine beliebig kleine, sondern etwas, was gar keine räumliche Ausdehnung mehr habe. Es ist darum verkehrt eine Definition des Punktes in mathematischen Lehrbüchern aufzustellen. Man dürfte nur sagen: der Punkt ist eine thatsächliche Vorstellung, die man mit dem Raume verknüpft; um sie hervorzurufen, dient jene Hinleitung. Man könnte auch behaupten, es gäbe eine gewisse Vorstellung, die sich auf mehrere Mannigfaltigkeiten anwenden lasse, nämlich Zahl, Zeit und Raum; bei Anwendung auf den Raum nenne man es Punkt, sonst Null oder Zeitpunkt. Der Ausdruck: Punkt sei die Grenze einer Linie, ist ebenfalls nichts weiter als eine Hinleitung, oder man müſste erst definieren, was Grenze ist, und das würde man hier, will man den Punkt treffen, auch nur durch den Punkt können. Eine Strecke ist nie ein Punkt, wenn man sie sich auch noch so kurz vorstellt, besteht auch nie aus Punkten, sondern kann nur mit der Vorstellung des Punktes behaftet werden. Auch giebt ein bewegter Punkt niemals eine Strecke, sondern diese besteht aus Strecken, einer bestimmten Anzahl endlicher oder einer endlichen Anzahl unendlichkleiner.

Geht man von einem Punkte o aus in einer positiv genannten Richtung um die Strecke a vorwärts und kehrt wieder in entgegengesetzter Richtung zurück, zieht also a ab, so gelangt man zum Ausgangspunkte zurück — falsch wäre es zu sagen, man erhielte den Punkt als Resultat. Ein Punkt ist nicht $a - a$; man könnte niemals die Punktvorstellung durch Abziehen zweier Strecken erhalten oder darauf kommen, wenn man die Fähigkeit dazu nicht ohnehin besäſse.

Die Ersetzung durch Ungleiches.

Darf man in gewissen Fällen das Unendlichkleine für einen Punkt oder für Null erklären oder umgekehrt den Punkt etwa als einen speziellen Fall des Unendlichkleinen ansehen? Nein, aber es ist wohl denkbar, daſs man unter gewissen Umständen an die Stelle der Vorstellung „Unendlichklein" die andere „Punkt" oder „Null" setzen darf. Man hat dann nicht Gleiches durch Gleiches ersetzt, es braucht aber durch die Ersetzung für den betreffenden Fall kein Fehler zu entstehen. Wir wollen einige solche Fälle in die Erinnerung rufen.

Definiert man $\sin \alpha$ als das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse, so kann man dies innerhalb einer Zahlenrechnung ersetzen durch das Verhältnis zweier benannten Zahlen, etwa a Centimeter : b cm und dies durch eine unbenannte Zahl, ohne einen Rechenfehler zu begehen. Nimmt man nun die Gröſse des Winkels als 0, stellt sich also (gemäſs der entsprechenden Definition) die Anzahl Grade als 0 vor, so darf man für die Rechnung statt der eigentlichen Vorstellung des Verhältnisses von 0 cm : b cm ohne Fehler den Wert 0 setzen, also schreiben $\sin \alpha = 0$. Es ist von vornherein keineswegs sicher, ob man für diese Null ohne die geringste Änderung unendlichklein sagen darf.

Für die Vorstellung ∞ besitzt man nicht, wie bei unendlichklein die Null, eine Vorstellung, die man in gewissen Fällen dafür einsetzen könnte. Das Unendlichgroſse unterscheidet sich also darin vom Unendlichkleinen beziehlich seiner Anwendung. Aber es ist ebenso wie das Unendlichkleine notwendig an die Vergleichung mit anderen Gröſsen geknüpft. Will man diese Zahl mittels Gleichheits- oder anderer Rechnungszeichen mit anderen Rechnungsgröſsen verbinden, so hat man zunächst stets an ihre ursprüngliche Bedeutung zu denken.

Der Begriff Unbestimmt.

Unbestimmt nennt man eine solche Gröſse, für die man jede beliebige setzen kann. Dieser Begriff hat also für sich gar nicht die Bedeutung einer einzelnen Zahl, auch nicht einer benannten wie a oder einer veränderlichen wie x. Denn eine Gröſse, die dasselbe ist wie irgend eine bestimmte Gröſse, ist diese bestimmte Gröſse selbst. Unbestimmt heiſst also weiter nichts wie der Begriff Gröſse, abgesehen von jedem besonderen oder irgendwie bedingten Falle. Wert hat solcher Begriff als Zahl nur inbezug auf bestimmte Umstände. Wir müssen also sagen: wenn man innerhalb einer Rechnung, innerhalb

einer gewissen, bestimmten Gröſsenbetrachtung an irgend einer Stelle ohne Änderung der Bedeutung des Ganzen jede beliebige Gröſse setzen kann, so nennen wir diese Gröſse, welche an diese Stelle zu setzen ist, eine unbestimmte. ∞ — ∞ (und ∞/∞) ist also unbestimmt. Denn es bedeutet diejenige Gröſse, die, zu ∞ addiert (bez. mit ∞ multipliziert) ∞ giebt. Wir sprachen früher von unbestimmten unendlichen Strecken; auch danach hat ∞ — ∞ nicht immer einen unbestimmten unendlichen Wert, sondern kann einen unbestimmten endlichen oder unendlichen Wert haben. Ferner ist o/o stets unbestimmt, d. h. man kann sich keinen einzigen Fall, keine besonderen Umstände vorstellen, in denen etwa o/o, falls man diesen Begriff wirklich in seiner ganzen Weite beibehält, gleich einer bestimmten Zahl sei; man kann sich nicht zwei Nullen denken, von denen die eine etwa gröſser als die andere wäre, so daſs o/o im vollen Sinne und im bestimmten Falle, d. h. in besonderer Auslegung der beiden Nullen etwa 2 gebe. Solche Auslegung von Nullen giebt es nicht; auch können zwei Nullen nicht als zwei ihrer Gröſse nach ganz gleiche Zahlen angesehen werden, auf welche das Gesetz Anwendung fände: zwei gleiche Gröſsen durcheinander dividiert, geben stets 1. o/o kann auch etwas anderes geben als 1, kann jede Zahl geben. Irgend eine andere Zahl, mit 1 multipliziert, giebt sich selbst, mit einem anderen Werte multipliziert, giebt aber nicht sich selbst, die Null dagegen mit irgend einer anderen Zahl multipliziert, giebt sich selbst. Sie hat ebensowenig eine Ausdehnungsgröſse wie der Punkt; auch dieser, seiner Gröſse nach mit irgend einer Zahl multipliziert, giebt nichts gröſseres als einen Punkt. Freilich 2 mal einen Punkt giebt zwei Punkte, die räumlich verschieden liegen können oder besser mit deren Vorstellung man den Raum behaften kann. Zweimal eine Null vorgestellt giebt zwei Nullen, aber der Ausdehnungswert dieser Nullen ist zusammen nur Null, wie der Ausdehnungswert von zwei Punkten nur der Punkt sein kann. Auch mit der Vorstellung Null kann man die Reihe der Zahlen irgendwo behaften z. B. kann man zu 5 erst 2 addieren, dann wieder 2 von dem Resultate subtrahieren, damit hat man die Vorstellung gebildet, daſs man hinter die 5 eine Null fügen wolle, ähnlich wie man das Ende von 5 Zentimetern mit der Punktvorstellung behaften kann. Wenn es auch richtig ist, daſs $3 \cdot 0$ eine 0 ergiebt, so folgt daraus keineswegs, daſs o/o den Wert 3 habe. Sondern es muſs heiſsen: ich darf o/o dem Werte 3 gleichsetzen. Solcher Unterschied ist ganz klar, wenn man sagt: ein Elefant sei ein Tier, aber nicht: Tier sei ein Elefant; wenn man den Begriff Tier in seiner ganzen Weite beibehält, darf man nicht dafür setzen: Elefant.

Anders steht es mit ∞/∞. Man kann sich hier sehr wohl den besonderen Fall ausdenken oder die besonderen Umstände hinzusetzen, dafs die eine unendliche Gröfse nebenbei ebensogrofs vorgestellt werden solle wie die andere. Dadurch ist nicht etwa der Begriff des Unendlichen in seiner Weite beschränkt; es bleibt dabei, dafs unendlich gröfser sein solle als jede beliebige bestimmte, noch so weite sinnlichvorstellbare Gröfse, und das andere Unendlich ebenfalls. In diesem besonderen Falle ist $\infty/\infty = 1$, in anderen gleich einer anderen Zahl, etwa a. Da $a/\delta = \infty$, so kann man zu dem unbestimmten Ausdrucke $\delta \cdot \infty$ Umstände denken, die ihn bestimmt machen (ich erinnere an die Integrale). Sprechen wir das in einem Satze aus.

Satz über das Verhältnis unendlicher Gröfsen. Zur Vorstellung des Verhältnisses unendlicher Gröfsen kann man ohne Widerspruch die Vorstellung hinzufügen, dafs sie untereinander ein bestimmtes Verhältnis haben sollen, d. h. das Verhältnis unendlicher Gröfsen braucht nicht unbestimmt zu sein, während 0/0 stets unbestimmt ist. (Wir wollen hier noch nicht darüber sprechen, ob nicht vielleicht umgekehrt zuerst Verhältnisse bestimmter Art zwischen unendlichen Gröfsen vorgestellt werden und die Vorstellung eines unbestimmten Verhältnisses erst durch Denken daraus gebildet werde).

Stetsunbestimmt und möglicherweiseunbestimmt.

Man mufs unterscheiden zwischen unbestimmten (möglicherweise-unbestimmten) und stets unbestimmten Gröfsen. Dadurch vermeidet man die Mifsdeutung, als ob unbestimmte Gröfsen mit einem Male, wie mit einem Zauberschlage bestimmte Werte erhielten. Man vermeidet den Irrtum, der thatsächlich in vielen mathematischen Lehrbüchern (auch höheren) sich findet, dafs man spricht vom wahren Werte unbestimmter Ausdrücke. Der wahre Wert unbestimmter Ausdrücke ist der Wert „unbestimmt“ oder: der wahre Wert irgend eines, unter anderen Umständen als unbestimmt auffafsbaren Ausdruckes, ist unter bestimmten Umständen nicht mehr unbestimmt, sondern bestimmt! Man sollte die Umständlichkeit des Ausdruckes nicht scheuen. Richtig wäre es ja auch nicht zu sagen: die wahre Bedeutung des Begriffes Tier ist Elefant! Ich weifs aus meiner eigenen Studentenzeit, dafs mich die Ungenauigkeit der Wortverbindung „der wahre Wert unbestimmter Ausdrücke“ in Vorlesungen und Büchern sehr unangenehm berührt und anfangs zu falscher Auf-

fassung geführt hat. Ich möchte auch durchaus nicht als sicher hinstellen, daſs alle Mathematiker, die über die Studienzeit hinaus sind, sich der Schwierigkeiten völlig bewuſst sind; man pflegt sich nachher über etwas, woran man anfangs ganz unwillkürlich Anstoſs nahm, hinwegzusetzen; thut man dies nicht, so bleibt man beim Studium an vielen Stellen stecken. Daher huldigen viele der Sitte, die sogar — wie ich selbst hörte — von Lehrenden empfohlen wird — „erst einmal weiter zu lernen oder zu lesen". Oft kommt es dann später überhaupt nicht mehr zu hinreichend gründlicher Überlegung. Man lernt allerdings alsdann durch die nötige Übung direkte Fehler im Rechnen zu vermeiden, aber gewinnt immer mehr die Ansicht, die höhere und überhaupt die Mathematik enthalte doch vieles „Wunderbare". Allerdings klingt es komisch: „die wahre Bedeutung des unter anderen und allgemeinen Umständen brauchbaren Begriffes Tier ist in diesem Falle Elefant"; aber nicht komisch ist es, wenn man sagt, der Elefant und andere einzelne Wesen werden zu einem Allgemeinbegriffe zusammengefaſst, der natürlich im Einzelnen Spielraum für vielerlei Bestimmtheiten läſst. In der Mathematik kommt es nicht einmal darauf an, ob etwas komisch klingt, wenn es nur durch Genauigkeit vor Miſsverständnissen bewahrt. Es ist durchaus nicht ausgemacht, ob δ/δ unbestimmt sein soll, weil 0/0 unbestimmt ist. Die Division von unendlichkleinen Gröſsen müſste bedeuten eine Gröſse, die mit Unendlichkleinem multipliziert oder unendlichwenig oft zu sich selbst addiert Unendlichkleines ergäbe, oder eine Zahl, die angiebt, wie oft man Unendlichkleines zu sich selbst addieren müſste, um Unendlichkleines zu erhalten. Dies ist beliebig oder unbestimmt, aber endlich. Aber man kann auch hier sehr wohl ohne Widerspruch die besondere Bestimmung hinzudenken, daſs die unendlichkleinen Gröſsen untereinander ein bestimmtes Verhältnis haben sollen. Es ist $\delta \cdot \infty$ d. h. $\delta : \delta$ unbestimmt, braucht aber nicht unbestimmt zu sein, ist nicht wie 0/0 stets unbestimmt (der Mathematiker denke an den Differentialquotienten, auf dessen Bedeutung ich später genau eingehen werde!).

Ich komme auf das Beispiel *sin* α zurück und betrachte das Verhältnis *sin* α : α. Dies wird für $\alpha = 0$ zum Werte 0/0 oder unbestimmt, nicht aber für $\alpha = \delta$. Man darf hier nicht ohne weiteres dafür setzen (*sin* 0) : 0 oder (*sin* δ) : 0 oder 0/0 oder $\infty : \infty$. Denn wir wissen ohne nähere Untersuchung durchaus nicht, ob (*sin* δ) /δ unbestimmt ist. Man hat für jeden einzelnen Fall genau besonders zu untersuchen, welchen Wert δ/δ besitzt, falls man mit Zähler und Nenner eine besondere Vorstellung z. B. die von *sinus* und Bogen

verbindet und falls man den Bruch in einem besonderen Zusammenhange z. B. als Summand neben endlichen Gröſsen gebraucht.

Limes oder mathematischer Grenzwert.

Eine Funktion wie $x : x$ hat für jeden endlichen Wert von x den Wert 1, nur für $x = 0$ wird sie völlig unbestimmt; im Unendlichen dagegen, sowohl im Unendlichgroſsen wie im Unendlichkleinen behält sie den Wert 1, obgleich man sie alsdann $\infty : \infty$ oder $\delta : \delta$ schreiben könnte. Bei dieser Schreibweise ist, falls man überhaupt noch an die ursprüngliche Funktion denkt und nicht ein beliebiges δ/δ im Auge hat, der in $x : x$ ausgedrückte Nebengedanke, daſs die beiden unendlichen Gröſsen gleich sein sollen, festzuhalten. Man könnte den Wert $x : x$ für $x = \delta$ oder $= \infty$ einen Grenzwert nennen, indem hierbei x über alle endlichen Grenzen hinaus groſs oder klein gedacht wird, und man müſste dann sagen, der Grenzwert der Funktion sei 1. Aber man pflegt von Grenzwert einer Funktion dann zu sprechen, wenn nicht wie hier dieser Wert der unter allen Nebennmständen wirklich ganz genaue Wert auch für diese unendliche Gröſse der Variabelen ist, sondern wenn man einen anderen, von dem wahren Werte unter allgemeinen Umständen ein wenig, allerdings nur unendlichwenig abweichenden Wert an Stelle des allgemein wahren annimmt. Z. B. bedeutet $\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}$ (gelesen limes $1/n$ für n gleich unendlich) nicht den Wert δ, den diese Funktion in Wahrheit unter allgemeinen Umständen hat, sondern den Grenzwert 0, den man dafür setzen muſs, wenn man sie als Summanden neben endliche Werte setzt. Man sagt, der Wert der Funktion komme einem Werte, hier 0, unendlichnahe, falls die unabhängige Variabele einem anderen Werte unendlichnahe komme. Man könnte sagen, n komme hier dem Werte Unendlich unendlichnahe, aber auch, n werde gleich unendlich oder noch besser es werde irgend eine Zahlengröſse im allgemeinen mit der Vorstellung des Unendlichen behaftet. Die Hauptsache ist, unter welchen Umständen man den so definierten Grenzwert an Stelle des allgemein wirklichen Wertes nehmen darf oder muſs. Der wahre Wert von $1/\infty$ ist anderen unendlichkleinen Summanden gegenüber durchaus nicht gleich 0 zu setzen, noch weniger anderen unendlichkleinen Faktoren oder Divisoren gegenüber. Aber eine wirkliche Verschiedenheit kann einem bestimmten Zwecke gegenüber gleichgiltig werden derart, daſs man ohne den geringsten Fehler bei diesem Zwecke die eine Gröſse für die andere setzen kann;

oder man könnte sagen: der unter anderen Umständen vorhandene Fehler sei in diesem Falle kein Fehler, sondern das einzig Richtige. Zur Vermehrung der Menge eines Gegenstandes ist es gleichgiltig, ob ich die Breite vergröfsere, obwohl auch letzteres nur durch Gröfsenhinzufügung geschehen kann. Wenn man einen endlichen Wert finden will, so ist es gleichgiltig, ob man eine 0 oder einen unendlichkleinen Wert hinzuaddiert; freilich wäre die Hinzufügung von unendlichviel unendlichkleinen Gröfsen nicht ohne Bedeutung für die endliche Vermehrung.

Wenn man also zu einer endlichen Gröfse eine unendlichkleine addieren will, so erlaubt und fordert diese Art der Zusammensetzung und der beabsichtigte Zweck eine endliche Gröfse zu finden, den Grenzwert 0 für δ einzusetzen. Folglich ist $\lim_{x=\delta}(a+x) = a$ und $\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$. Keineswegs aber ist diese Einsetzung erlaubt, wenn man $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bilden will, d. h. den für die endliche Weitenbehaftung (eine Weitengleichung des Endlichen) richtigen Wert dafür suchen, falls n selbst unendlich sein soll. Dann ist es nicht statthaft für die Grundzahl dieser Potenz, also für $1/n$ den Grenzwert 1 einzusetzen und also die Potenz 1^∞ zu schreiben. Die unendlichkleine Gröfse $1/\infty$ ist und bleibt an und für sich unendlichklein, als Summand neben einer endlichen Gröfse 1 verliert sie jede Gröfse und ist gleich Null zu setzen, falls man die ganze Summe $1 + 1/n$ wieder als Summanden innerhalb einer endlichen Rechnung behandeln will. Die Form $1 + 1/n$ ist an und für sich auch für $n = \infty$ eine logische Kombination, bei der man einerseits die endliche Weitenbehaftung anwendet, nämlich bei 1, und andererseits die untersinnlichvorstellbare, nämlich bei $1/n$, und bei der man aufserdem die logische Forderung des Addierens aufstellt. Es ist bei einer solchen äufseren Verbindung einer Anzahl von geistigen Grundfähigkeiten genau zu untersuchen, welche Bedeutung diese Fähigkeiten unter diesen, hier äufserlich geforderten Umständen des Addierens noch haben. Und da ergiebt sich denn nach unseren Untersuchungen, dafs eine unendlichkleine Gröfse, ohne weitere bedingende Umstände d. h. einfach als Summand neben eine endliche gestellt, keinen Gröfsenwert dieser gegenüber mehr haben kann. Es ergiebt sich aber nicht, ob die eigentliche Bedeutung von δ nicht etwa unter neuen hinzutretenden Umständen z. B. wenn $1 + \delta$ unendlich oft mit sich selbst multipliziert werden soll, berücksichtigt werden mufs. Wir haben bei jener Form oder Funktion durchaus nicht von vornherein blofs mit einer unendlichkleinen Gröfse gegenüber einer endlichen zu thun, vielmehr ist von vornherein durch

den Exponenten n eine ganz andere logische Zusammensetzung verlangt. Der Grenzwert von $1 + 1/n$ bedeutet eben nur denjenigen Wert, den dieser Ausdruck als Summand neben endlichen Summanden hat, hier aber tritt er nicht als Summand neben endlichen Summanden auf, sondern als Faktor neben unendlichvielen gleichen Faktoren. Die dem Mathematiker bekannte Methode der Ermittelung des Grenzwertes jenes Ausdruckes $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, nämlich $e = 2{,}7182818\ldots$ (worauf ich später noch ausführlich eingehen muſs) giebt fehlerlos den endlichen Wert (trotz der unendlichen Schreibweise. Siehe die Untersuchungen über das Irrationale!) oder die wirkliche Gröſse jenes Ausdruckes für $n = \infty$ allen endlichen Gröſsen gegenüber.

Weshalb, so könnte man hiernach einwenden, gebraucht man denn überhaupt den Ausdruck limes und sagt nicht einfach z. B. es sei der Wert von $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\infty}$, für $n, = \infty$? Gewissermaſsen um zu zeigen, daſs dies nicht ganz dasselbe sei, setzt der Mathematiker bewuſst oder unbewuſst (d. h. unter klarem Bewuſstsein der hier angeführten Gründe oder von anderen oder unter klarem Bewuſstsein, daſs der Grenzwert etwas Wunderbares sei, das sich praktisch als richtig bestätigt habe, oder ohne solches Bewuſstsein rein nach praktischen Rücksichten) das Zeichen lim davor und legt alsdann jenem Ausdrucke den Zahlenwert e bei, der sich unter die endlichen Zahlen einreiht. Dabei ist freilich bisher durchaus nicht allgemein anerkannt, daſs es eine mathematische klare Vorstellung einer unendlichen Gröſse oder des Verhältnisses von unendlichen Gröſsen gebe. Ja es haben sich bedeutende Stimmen dafür erhoben, daſs das eigentliche Unendliche in der Mathematik überhaupt nicht vorkäme; man glaubt vielfach durch die Einführung der Grenzbegriffe der Untersuchung über das eigentlich Unendliche aus dem Wege gegangen zu sein, und thut dies gern, weil man die Schwierigkeiten und scheinbaren Widersprüche des Unendlichen nicht hat lösen können.

Auch bei meinen Untersuchungen habe ich mich bisher d. h. soweit ich an dieser Stelle in diesem Buche vorgerückt bin, nicht entschieden, ob δ als Summand neben einem endlichen Summanden wirklich den Wert Null habe, ob der Wert von δ also überhaupt nicht an und für sich existierte oder ausgedacht oder vorgestellt werden könnte, sondern überhaupt nur durch Beziehung und in Beziehung im Geiste existierte. Ich habe die Möglichkeit noch offen gelassen und mit angeführt, daſs dies δ an und für sich vorgestellt werden könnte und man ihm nun nachträglich als Summanden neben

einer endlichen Gröfse die Bedeutung einer Gröfse rauben und durch eine Art Gewaltakt dafür 0 setzen könne, oder auch ob etwa δ stets, also auch hier δ bleibe, also durch Setzung von 0 ein Fehler entstehe, der für diesen bestimmten Zweck des Summierens mit endlichem aber uns gleichgiltig sein könne.

Ohne hier jetzt schon entscheiden oder, wenn das überhaupt nicht angehen sollte, meine persönliche Hinneigung zu einer dieser Auffassungen aussprechen zu wollen, möchte ich doch schon hier den Vorschlag machen, unter allen Umständen, bei jeder Auffassung des Unendlichen, die folgende Vorsicht bei Einführung des Grenzbegriffes walten zu lassen.

Limes eines Ausdruckes soll stets heifsen derjenige Wert des Ausdruckes, den man als den richtigen und einzig verwendbaren erkennt, sobald man den Ausdruck (mit seiner unendlichen Gröfse) als Summanden neben endliche Summanden reihen will.

Es ist in der That langweilig stets wieder diesen Zweck, diese Umstände oder diese Bedingung anzuführen; thäte man das aber, so hätte man das Zeichen *lim* überhaupt nicht nötig.

Fassen wir die bisherigen Beispiele kurz zusammen und ersparen uns die weitere Ausführung für spätere Abschnitte. $1/n$ bedeutet im Endlichen irgend einen endlichen Bruch. Sobald man aber n unendlich werden läfst oder — wie wir sagen würden — diese Gröfse mit der Weitenvorstellung des Unendlichen behaftet, wird $1/n$ unendlichklein oder δ. Diese Gröfse aber als Summand neben eine endliche a oder 1 gestellt, hat für diese Summierung dieselbe Bedeutung als wenn man 0 addierte d. h. der Grenzwert ist 0. $1 + 1/n$ bedeutet für $n = \infty$ nichts anderes als $1 + \delta$. Diese Summe aber hat innerhalb der Weitenbehaftung des Endlichen oder unter endlichen Gröfsen als Summand keinen anderen Einfluſs als wenn sie lautete $1 + 0$ oder 1, d. h. 1 ist ihr Grenzwert. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ endlich hat, als Summand neben endliche Gröfsen gestellt, den Wert der irrationalen Zahl e. Ob man für $(1 + \delta)^\infty$ auch andere Auslegungen machen kann, das möge hier als noch zu schwer nicht besprochen werden! Es ist dazu eingehendes Verständnis vom Wesen der unendlichen Reihen nötig; ich werde beginnen mit dem Einfachsten, den mit Unrecht als so leicht angesehenen periodischen Dezimalbrüchen.

Periodische Dezimalbrüche.

Es ist hier noch nicht meine Aufgabe das Wesen einer Zahl wie 3, der Einheit 1 oder des Verhältnisses 3 : 1 zu untersuchen. Es seien dies für uns vorläufig bekannte Begriffe. Dann sei auch die Umkehrung dieses Verhältnisses, also 1 : 3 uns etwas Bekanntes. Man lernt jetzt als Kind von früh auf sich der dezimalen Schreibweise zu bedienen, obgleich dies erst eine späte Erfindung ist, die trotz hoher geistiger Kultur lange gefehlt hat. Dafs z. B. die Schreibweise der hintereinander gestellten Ziffern 1 und 2 für zwölf Einheiten eine Willkür ist, kann man leicht einsehen; ebenso dafs man statt des Dezimalsystems auch ein anderes z. B. das Septimalsystem hätte einführen können, bei dem man nur die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 kennt und sieben durch Zusammenstellung von 1 und 0, also wie unsere dezimale 10 schreiben würde. Der Vorteil irgend eines solchen Systems anstatt der Benutzung von immer wieder neu erfundenen Zeichen für jede folgende Zahl oder gar der einfachen Hinzeichnung der entsprechenden Anzahl von Strichen wie ||| ist klar, wenn man bedenkt, dafs der Geist beliebig weit zählen, ja sich sogar unendliche Zahlen vorstellen kanu. Hiernach ist auch der Wunsch begreiflich ebenso wie man 6 : 2 als Zahl 3 schreibt, auch 2 : 6 oder 1 : 3 in dezimaler Form auszudrücken. Es ergiebt sich der bekannte, in jeder Schule mit den Kindern vorgenommene Versuch der Ausführung dieser Division nach denselben Regeln, wie man 6 : 2 oder eine mehrstellige Zahl wie 816 durch zwei dividiert. Selbstverständlich handelt es sich darum 816 aufzufassen als $8 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 6 \cdot 1$ und diese Summe durch 2 zu dividieren. Dann ergeben sich $4 \cdot 100$, aber kein einziger Zehner, also $0 \cdot 10$ und, indem man den einen Zehner zu 6 hinzuzieht, 16 : 2 oder 8 Einer d. h. 408. Entsprechend wird 8,16 in Summanden zerlegt als $8 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{100}$ und die Division ausgeführt zum Resultate 4,08.

„Geht die Division nicht auf", so sagt man in der Schule, „dann hängt man an den Rest immer wieder eine 0 und dividiert nach Belieben weiter". Was bedeutet diese Regel? Das ist bedeutend schwieriger zu beantworten. Beim Beispiele 1 : 3 bedeutet es zunächst, dafs ein Ganzes als 10 Zehntel aufgefafst werden kann, der Rest $\frac{1}{10}$ wieder als $\frac{10}{100}$ usw. In diesem „Undsoweiter" oder „Niemalsaufgehen" liegt die Schwierigkeit. Man kann nicht blos beliebig fortfahren, sondern mufs sich, da die Division niemals aufgeht, geradezu eine unendlichlange Kette von solchen Zahlenvorstellungen und Schlüssen denken. Die Glieder des Resultates 0,333... werden nicht blofs bis

zu beliebiger Kleinheit verfolgt, sondern gehen schliefslich ins Unendlichkleine. Dies ist nur deshalb möglich, weil das Unendliche thatsächlich im Besitze des Geistes ist und hier durchaus als Vorstellungsthatsache an die Vorstellung der beliebig langen endlichen Reihe herantritt.

Wir sind bei möglichst genauer Ausführung solcher Division thatsächlich gezwungen die Zahlenvorstellungen (Brüche) nicht nur mit der endlichen, sondern auch mit der unendlichen Weitenvorstellung zu behaften.

Das Auffällige ist, das sich hier unendlichkleine Glieder in einer Summe an endliche anreihen. Wir können dieselben nicht loswerden, wir wissen ganz gut, dafs 0,333 . . ., nur beliebig weit bis zu irgend einer beliebigen, endlichen Stelle ausgeführt, nicht den endlichen Wert $^1/_3$ genau darstellt. Diese Thatsache, dafs dann immer noch etwas Endliches, wenn auch beliebig Kleines fehlt, glauben wir dadurch fortzubringen, dafs wir die Reihe bis in das Unendliche gehen lassen, den Fehler des Weglassens unendlichklein machen und dann für das Gebiet der endlichen Zahlen als gar keinen mehr betrachten. Das sieht aus wie ein einfacher Übergang von endlichen Grössen zu unendlichkleinen; stehen doch alle diese Grössen als Summanden in derselben Reihe. Aber wir können nicht sagen, wo die unendlichkleinen Glieder anfangen! Fangen sie plötzlich an? Folgt ohne Sprung auf ein endliches, beliebig kleines Glied sofort ein unendlichkleines, oder machen wir von einem endlichen Gliede aus einen Sprung, indem zunächst nichts kommt — eine Art Abgrund — und nun plötzlich das unendlichkleine Glied? Beides ist falsch; es folgen auf jedes beliebig kleine Glied immer noch kleinere derselben Weitenbehaftung. Obgleich wir also gewohnt sind zu schreiben

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \ldots + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-2} + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \ldots \text{ usw.}$$

und dieses gar ganz kurz als 0,33333 . . . . . (in infinitum), so dürfen wir uns doch durch diese Schreibweise in einer einzigen Zeile nicht darüber täuschen lassen, wie verschiedenartige Dinge hier hintereinander gestellt sind. Wenn n die Anzahl der Glieder, also eine allgemeine und unbestimmte unendliche Gröfse bedeutet, so hat das zweite endliche Glied den Faktor $(\frac{1}{10})$, das dritte $(\frac{1}{10})^2$, folglich das n-te den Faktor $(\frac{1}{10})^{n-1}$. Es müssen die dem letzten vorhergehenden Glieder ebenfalls den Exponenten ∞ besitzen; aber doch mufs jeder Exponent des Faktors um 1 kleiner sein als der folgende; alle diese mit n geschriebenen Glieder sind unendlichklein und man kann nicht angeben, an welcher Stelle sie anfangen.

Will man angeben, bis zu welchem Gliede es unendlichviele sind, so ist es gleichgiltig, bei welchem von dem unendlichkleinen Gliedern man abbrechen will, jenes „unendlich" ist unbestimmt gesagt. Will man nur eine endliche, aber beliebige Anzahl berücksichtigen, so erweist der danach ausgerechnete Wert einen endlichen Fehler; z. B. ergeben die drei ersten Glieder $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}=\frac{300+30+3}{1000}=\frac{999}{3000}$. Es soll aber herauskommen $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1000}{3000}$. Der ausgerechnete Wert ist also um $\frac{1}{3000}$ zu klein.

Den genau richtigen Wert $\frac{1}{3}$ erhält man bekanntlich aus der Reihe auf folgendem Wege. Es ist das Bestreben die unendliche Anzahl von Gliedern, worin die Schwierigkeit liegt, zu entfernen. Irgend ein Glied z. B. $\frac{3}{10}\cdot(\frac{1}{10})^2$ könnte nur dann fortfallen, wenn davon ein ganz gleichlautendes Glied abgezogen würde. Also erschiene es wünschenswert die beiden gleichlautenden Reihen

$$x=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2+\ldots+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-2}+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}+\ldots$$

und $$x=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2+\ldots+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-2}+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}+\ldots$$

von einander abzuziehen. Das giebt $0=0$; die Unbekannte x ist damit verschwunden, wir können sie also nicht mehr berechnen. Sorgt man aber dafür, daſs die beiden Grössen der linken Seiten nicht genau gleich lauten und doch auf den rechten Seiten gleiche Glieder vorhanden sind, so müſste man dabei berücksichtigen, daſs ein Glied wie $\frac{3}{10}(\frac{1}{10})^1$ gleich einem anderen Gliede $\frac{3}{10}(\frac{1}{10})^2$ wird, wenn man es mit $\frac{1}{10}$, dem sogenannten Faktor oder Quotienten dieser geometrischen Reihe multipliziert; so giebt auch bei den unendlichkleinen Gliedern wie $\frac{3}{10}\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2}$ diese Multiplikation mit $\frac{1}{10}$ ein anderes unendlichkleines Glied $\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$. Man multipliziert also die ganze eine Gleichung mit $\frac{1}{10}$ und zieht von einander ab:

1) $$x=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2+\ldots+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-2}+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

2) $$\frac{1}{10}x=\quad\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n}.$$

Das ergiebt $x-\frac{1}{10}x=\frac{3}{10}-\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^n$ oder $x\left(1-\frac{1}{10}\right)=\frac{3}{10}\left(1-\left[\frac{1}{10}\right]^n\right)$, also

$$3)\quad x=\frac{3}{10}\,\frac{1-(\frac{1}{10})^n}{1-\frac{1}{10}}.$$

In einer solchen Summe einer geometrischen Reihe, die bekanntlich allgemein heiſst

$$x = a \cdot \frac{1-f^n}{1-f},$$

falls a das Anfangsglied, f den Faktor und n die Anzahl der Glieder bedeutet, kommt nur noch ein einziges Glied mit n vor. Ist die Reihe also unendlich, so läfst sie sich in dieser Summenform besser übersehen, als wenn unendlichviele unendlichkleine Glieder neben den beliebig vielen endlichen daständen, wie dies oben in der Reihenform der Fall war; freilich war angenommen, das alles mit $(\frac{3}{10})^n$ aufhört! Natürlich ist bei dieser Umformung vorausgesetzt, dafs unendlichkleine Grössen ein bestimmtes Verhältnis zu einander haben können, nämlich hier jedesmal zwei aufeinanderfolgende Glieder das Verhältnis $\frac{1}{10}$ oder f, und das gleiche unendlichkleine Glieder von einander subtrahiert, Null ergeben. Ferner steckt darin der Grundsatz: unendlichviele unendlichkleine Glieder dürfen als Summanden neben endlichen nicht fortgelassen werden, haben also einen Einfluſs auf die endlichen Gröſsen oder einen endlichen Wert ($\delta \cdot \infty =$ endlich). Durch die Umformung aber haben wir neben dem Summanden 1 in der algebraischen Summe $1 - (\frac{1}{10})^n$ ein einziges unendlichkleines Glied $(\frac{1}{10})^\infty$. Dieses ist zwar durchaus nicht an sich gleich Null, sondern nichts anderes als Unendlichklein; behandeln wir es aber als wäre es gleich Null, so erhalten wir $x = \frac{3}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3}$, erhalten mithin ganz genau den Ausgangswert.

Daraus müssen wir folgern, dafs entweder mehrere Fehler vorgekommen sind, die sich gegenseitig wieder gut machen, oder dafs alles ohne jeden Fehler ganz genau richtig war. Man mufs es gewifs als einen, wenn auch unendlichkleinen Fehler bezeichnen, wenn man an und für sich den unendlichkleinen Wert als 0 ansieht. Wo aber liegt dann der andere Fehler, der diesen dann wieder gut macht? Man könnte ihn höchstens im Folgenden vermuten. Vielleicht ist das Abbrechen der Reihe bei dem Gliede $\frac{3}{10}(\frac{1}{10})^{n-1}$ falsch. Indessen ergiebt sich derselbe Wert, wenn man etwa bei $\frac{3}{10}(\frac{1}{10})^{n-2}$ oder $\frac{3}{10}(\frac{1}{10})^{n+2}$ abbrechen wollte, nur dafs im Zähler der Summenform dann statt $(\frac{1}{10})^n$ steht $(\frac{1}{10})^{n-1}$ oder $(\frac{1}{10})^{n+3}$. Diese beiden Potenzen ergeben aber für $n = \infty$ ebenfalls unendlichkleine, wenn auch unter einander verschiedene Werte. Lässt man solchen unendlichkleinen Summanden in der Form $\frac{3}{10}\frac{1-\delta}{1-\frac{1}{10}}$ fort, so ergiebt sich wieder ganz genau der Wert $\frac{1}{3}$. Vielleicht ist überhaupt das Abbrechen der Reihen 1) und 2) an irgend einer, wenn auch unendlichen Stelle falsch. Soviel aber

ist gewifs, dafs gleiche, wenn auch unendlichkleine Gröfsen, von einander abgezogen, o ergeben, und dafs man sich an jeder beliebigen Stelle mit Ausnahme des Anfangs solche vorstellen kann (in Reihe 1) und 2) sind sie unter einandergestellt). Auch kann man unendlichkleine Gröfsen nur vergleichen, wenn sie nach bestimmten Gesetzen begrenzt sind. Das Gesetz ist hier derartig, dafs, an welcher Stelle gleichlautender Glieder man auch abbrechen mag, die Anzahl der vorausgehenden Glieder von 1) um eins gröfser als bei 2) ist; wollen wir demnach gleichviele Glieder von beiden Gleichungen vereinigen, so müssen wir aus Gleichung 2) noch ein der betreffenden Stelle folgendes Glied hinzudenken. Dann bleibt beim Abziehen das erste endliche Glied von 1) und das hinzugefügte unendlichkleine Glied von 2) übrig, wie in Formel 3) steht. Müssen wir aber gleichviel Glieder von beiden Gleichungen vereinigen? Wenn x wirklich einen bestimmten Wert vorstellen soll, so mufs auch $\frac{1}{10}x$ den zehnten Teil dieses Wertes angeben. Die rechten Seiten sind Summen; wenn man aber eine Summe mit einem Faktor multipliziert, dann behält sie ihre Anzahl von Gliedern. Ist also die untere Summe $\frac{1}{10}$ der oberen, so müssen auch gleichviele Glieder in ihr stehen. Und zwar mufs auch in der Unendlichkeit das Gesetz der Gleichheit bestehen bleiben. Mithin mufs das überschüssige Glied $(\frac{1}{10})^n$ stets berücksichtigt werden und nach Subtraktion der genau gleichen stehen bleiben. Mag man also auch das Abbrechen verbieten wollen, die Subtraktion auch der unabgebrochenen Reihen 1) und 2) läfst alle gleichen Glieder verschwinden und ein negatives übrig bleiben und zwar nur eines, welches im Resultate 3) als Summand neben einem endlichen steht.

Demnach wird es klar, dafs die Gleichsetzung von $(\frac{1}{10})^\infty$ und o, die zwar an und für sich um die Gröfse δ falsch, sagen wir: ein Gröfsenfehler ist, für jene Summenform nicht den geringsten Gröfsenfehler ergiebt, freilich unter der Voraussetzung, dafs kein anderer Gröfsenfehler mehr zu entdecken ist — wir wüfsten nicht, wo noch einer stecken sollte. Jene Form läfst sich auch leicht gestalten als $\frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9}(1 - \delta) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\delta$; und es ist auch $\frac{1}{3}\delta$ unendlichklein. Wir erhalten demnach arithmetisch den (schon oft vermuteten, an dieser Stelle unserer Untersuchungen aber nachgewiesenen) Satz:

Ein einziges, unendlichkleines Glied (oder eine endliche Anzahl von solchen) hat als Summand neben endlichen Summanden keinen Einfluſs, wir können es nach Belieben gleich o setzen d. h. fortlassen. Doch müssen wir hinzusetzen, dafs diese endliche Summe nicht in eine andere Rechnung, etwa Multiplikation oder Division mit anderen unendlichen Gröfsen ver-

wickelt ist, sondern nur aufgefafst wird als eine endliche Zahl, die man zu irgend welchen anderen endlichen addieren kann.

Da aber δ an und für sich nicht logisch identisch mit 0 ist, so drückt dieser Satz aus, dafs eine Zusammenstellung durch Addition von endlichen und einer unendlichkleinen Gröfse zu einem etwaigen neuen neben die übrigen endlichen zu stellenden Zahlenwerte nur etwas rein Äufserliches, Formales ist und keine weitere Bedeutung, keine als Zahl den übrigen anzureihende Wirklichkeit hat.

Wir nähern uns auf diesem Wege immer mehr der metaphysischen Untersuchung vom Wesen des Endlichen und Unendlichen.

Auffällig war die Aneinanderreihung der beliebig vielen endlichen und unendlichvielen unendlichkleinen Glieder in eine Reihe. War diese wohl ganz ohne Fehler richtig? Darf man überhaupt bei 10 : 3 die Division nach Dezimalfaktoren $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ usw. ohne jeden Fehler ausführen? Wenn jedes einzelne Glied als Summand keine Bedeutung hat, so sollte man vermuten, man könne einfach die Reihe

$$0{,}111\ldots = \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{10}\right)^{n-3} + \left(\frac{1}{10}\right)^{n-2} + \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

schreiben als

$$\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \ldots + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots = \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \ldots + \infty \cdot \delta$$

Aber man weifs hier nicht mehr, was $\delta \cdot \infty$ ist, dies ist keine unendlichkleine Gröfse mehr, sondern eine endliche, die ganze Reihe, die doch den Wert $\frac{1}{10} \cdot \frac{1-(\frac{1}{10})^n}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$ hat, besteht also, sobald man $\delta \cdot \infty$ als endlichen Wert ansieht, nur noch aus endlichen Summanden, aber man weifs nicht, aus wievielen, und auch nicht wie der letzte lautet. Es ist dies eine Schreibweise, die nicht mehr den beabsichtigten ursprünglichen Sinn hat, sie stellt dar: unbestimmt + unbestimmt; allerdings ist der erste Teil nicht gänzlich unbestimmt, sondern ist z. B. stets kleiner als 0, 2, aber wieviel noch fehlt, damit er genau gleich $\frac{1}{9}$ ist, ist nicht ausgedrückt, es soll etwas Unbestimmtes daran fehlen, das aber gleich dem unbestimmten $\infty \cdot \delta$ sei. Man hat hier fälschlicherweise die unendlichvielen unendlichkleinen Glieder, welche ganz bestimmte Form haben, und deren je zwei ein bestimmtes endliches Verhältnis haben, als unbestimmt hingeschrieben. Was für einen Sinn hat die Reihe in ihrer ersten Form?

Eine unendliche Reihe oder eine Addition von Gliedern mit der Weitenbehaftung verschiedener aufeinanderfolgender Ordnungen, hat dann jedenfalls (vielleicht auch sonst noch — siehe später!) einen Sinn, wenn je zwei Glieder mit der einen Weitenbehaftung dasselbe

endliche Verhältnis haben wie zwei Glieder der anderen Weitenbehaftung. Dies ist die wahre Bedeutung dieser Reihe, die Zusammenmischung des Endlichen und Unendlichen ist äufserlich und besitzt nur die Bedeutung und Wirklichkeit einer äufserlichen logischen Zusammenstellung von zwei zwar verwandten, aber doch nicht vereinbaren Vorstellungsweiten. Die Gewaltsamkeit, welche wir beim Nebeneinanderstellen anwenden, wird dadurch wieder gut gemacht, dafs wir $(\frac{1}{10})^{\infty}$ gleich Null setzen oder den sogenannten mathematischen Grenzwert bilden.

Es ist dies nicht so aufzufassen, als ob nun doch zwei Fehler sich gegenseitig aufhöben, also als ob das Vertauschen von $(\frac{1}{10})^{\infty}$ mit 0 ein Fehler sei. Das ist kein Fehler, sondern es hat als Summand des Endlichen den Wert 0. Aber wie kam der Wert δ, welcher ja falsch sein soll, überhaupt herein? Dies mufs durch einen Fehler geschehen sein und zwar nicht einen Gröfsenfehler, sondern — wie ich für kurze Zeit sagen will — einen „methodischen Fehler". Es ist falsch eine Methode anzuwenden, bei der überhaupt unendlichkleine Glieder als einzelne Summanden neben endlichen auftreten. Ein eigentlicher Gröfsenfehler ist es aber deshalb nicht, weil $\delta \cdot \infty$ dastand. In der Reihenform (1) also steckt ein methodischer, kein Gröfsenfehler, im Resultate (3) solange ein Gröfsenfehler, als man $\frac{1}{3} + \delta$ für eine andere Gröfse als $\frac{1}{3}$ hält; in Wahrheit aber ist dies auch nur der Schreibweise nach ein Gröfsenfehler. Es hebt sich der erste methodische Fehler auf durch das Dastehen des Summanden δ, also zwei äufserlich, formal entstandene „methodische" Fehler haben sich selbst berichtigt und es ergiebt sich das genau richtige Resultat, welches man voraussah und verlangte, indem man von der Divisionsaufgabe $\frac{1}{3}$ ausging.

Es zeigt sich danach, dafs die in jeder Schule den Kindern gestellte Aufgabe, $\frac{1}{3}$ genau in Potenzen von 1 : 10 auszudrücken, in Wahrheit unmöglich ist. Wenigstens ist es falsch zu behaupten, man stelle sich die endlichen und unendlichen Glieder der Reihe, also die ganze Reihe gleichzeitig einheitlich klar vor in einer Vorstellungsart, wie etwas, das eine wirkliche Einheit von gleichartigem Wesen bildet. Im Raume kann man, wie wir fanden, nicht ohne Widerspruch ein Gebilde in einer Dimension z. B. die gerade Linie behaften mit der Weitenvorstellung des Endlichen und Unendlichen. Der Widerspruch löst sich nur, wenn man sich bewufst ist, wesentlich Verschiedenes äufserlich verknüpft zu haben. Man kann auch nicht eine Strecke von $\frac{1}{3}$ cm sich vorstellen als bestehend aus Zehnteln, Hundertsteln usw. von Centimetern. Das ist eine unmögliche Aufgabe. Man müfste

dazu die Strecke gleichzeitig mit der Weitenvorstellung des Endlichen und Unendlichen behaften, was zu Widersprüchen führt, die man nur durch sorgfältige Trennung der Weitenbehaftungen wieder entfernen kann. Will man — was aus anderen Gründen Vorteile bietet — solche äufserliche Verbindung durchführen (ähnlich wie in der neueren Geometrie die Behaftung von mehreren Strecken mit unendlichvielen Punkten bei hinreichender Vorsicht zu den schönsten Resultaten führen kann), so mufs man sich der dabei benutzten äufseren Mittel als solcher bewufst bleiben und Fehler, die durch Vergessen des Behaftungsgesetzes entstehen, wieder gut machen.

Übersehen wir unsere Aufgabe noch einmal und versuchen gleichzeitig den etwas zu strengen Ausdruck „Fehler" zu ersetzen! Nimmt man in der Reihe (1) n als endlich, so ist das Gleichheitszeichen falsch, die rechte Seite ist stets kleiner als die linke und zwar um eine endliche, beliebig klein zu machende Gröfse; es entsteht ein Gröfsenfehler. Ist n unendlich, so sind beliebig viele endliche Anfangsglieder kleiner als die linke Seite; die mit ihnen durch ein Pluszeichen verbundenen, unendlichvielen unendlichkleinen Glieder kann man sich summiert als genau denjenigen Betrag vorstellen, der zu den endlichen hinzukommen mufs, um das Gleichheitszeichen richtig zu machen. Aber alsdann ist die Gröfse der beiden Summanden (der aus den endlichen und der aus den unendlichkleinen Gliedern bestehenden) unbestimmt. Etwas Bestimmtes läfst sich nur durch Hinzufügung der Reihe (2) aussprechen, die ebensoviele Glieder haben soll. Stellt man sich aber, wie es die Absicht jener Gleichung (1) ist, die unendlichvielen unendlichkleinen Glieder einzeln in bestimmter Form mit bestimmten Quotienten je zweier vor, so bedeutet das Gleichheitszeichen nicht mehr die Gleichheit der Gröfsen in dem Sinne sonstiger gleicher Gröfsen, nicht mehr in dem Sinne einer Weitengleichung, auch nicht in dem einer Beziehungsgleichung, sondern stellt ein nur äufserlich erfüllbares allgemeines Verlangen dar. Es sollen zwar die beiden Seiten gleich sein, und es haben die Pluszeichen zwischen den endlichen Gröfsen die gewöhnliche Bedeutung, ebenso die Pluszeichen zwischen den unendlichen, aber das Pluszeichen zwischen der Reihe der endlichen und der Reihe der unendlichen bedeutet nicht mehr, dafs man ein endliches oder irgend ein beliebiges unendliches Glied zusammenaddieren könnte. Man müfse darum eigentlich dieses Zeichen hervorheben und schreiben

$$x = \frac{3}{10} + \frac{3}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots\cdots$$
$$\dot{+}\left[\cdot\cdot + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-2} + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \cdots\cdots\right]\cdots\cdots$$

Es ist dann wegen der besonderen Bedeutung des mittleren Pluszeichens nicht richtig die in Klammern geschlossene Summe aufzulösen indem man jedes Glied mit gewöhnlichem Pluszeichen binzuschreibt. Also es wäre falsch zu schreiben

$$\tfrac{3}{10}+\tfrac{3}{10}\left(\tfrac{1}{10}\right)+\tfrac{3}{10}\left(\tfrac{1}{10}\right)^2+\ldots+\tfrac{3}{10}\left(\tfrac{1}{10}\right)^{n-2}+\tfrac{3}{10}\left(\tfrac{1}{10}\right)^{n-1}$$

Denn jedes gewöhnliche Pluszeichen bezieht sich immer nur auf die gewöhnliche Addition von Summanden derselben Weitenbehaftung. Schriebe man

$$+\ldots+\tfrac{3}{10}\left(\tfrac{1}{10}\right)^{n-2}+\tfrac{3}{10}\left(\tfrac{1}{10}\right)^{n+2}+\ldots$$

so wird dadurch wieder die gewöhnliche Addition der unendlichen Glieder unter sich gestört. Es bleibt also dabei, daſs ein einziges hervorgehobenes Pluszeichen — sagen wir: ein Mischungspluszeichen — als Zeichen der äuſserlichen Vereinigung der endlichen und der gesamten unendlichen Glieder zu setzen ist. Dasselbe bedeutet, daſs es keinen gröſsen- oder zahlenmäſsigen Übergang vom Endlichen zum Unendlichen giebt, weder mit einem Sprunge noch ohne einen Sprung.

Im Resultate (3) ist dann ebenfalls $+\left(\frac{1}{10}\right)^{\infty}$ mit Mischungspluszeichen zu setzen. Durch die Subtraktion von (2) und (3) ist der „methodische" Fehler nicht aufgehoben worden, er ist auf (3) übergegangen und verschwindet erst, wenn man $\left(\frac{1}{10}\right)^{\infty}=0$ setzt.

Wir vermeiden den Ausdruck „Fehler" in folgender Fassung. Die Verbindung von beliebig viel endlichen und unendlichviel unendlichkleinen Gliedern hat nicht dieselbe Bedeutung wie die Addition von Gliedern derselben Weitenbehaftung. Sie bedeutet in der geometrischen Reihe zweierlei, nämlich 1. daſs zwei Weitenbehaftungen in einer bestimmten gleichartigen Weise (mittels des steten Quotienten $\frac{1}{10}$) vorgestellt und äuſserlich zusammen auf dieselbe Gröſse $\frac{1}{3}$ angewendet werden sollen; 2. eine Gröſsengleichheit zweier endlichen, aber nicht genau unterschiedenen Summen. Die Berechtigung solcher Reihe als Darstellung einer Gröſse (also die Konvergenz) beruht darauf, daſs trotz der Behaftung mit zwei Weitenvorstellungen die Summen der Gröſsen beider Weitenbehaftungen derselben Weitenbehaftung (dem Endlichen) angehören. Ihr Nutzen besteht darin, mit anderen Reihen bequem verglichen werden zu können, selbst mit solchen, die überhaupt nicht in demselben Systeme wie etwa $\frac{1}{3}$ dargestellt werden können (siehe das Irrationale, später!), und darin ein Mittel zur Verbindung verschiedener Weitenbehaftungen zu geben; ihr Nachteil besteht darin, daſs man besondere Aufmerksamkeit nötig hat, um nicht in Miſsverständnisse hineinzugeraten, und nur bei genauer Berück-

sichtigung ihres eigentümlichen Wesens ohne Gröfsenfehler zum endlichen Anfangswerte zurückkehren kann. Eine solche — wir wollen sagen „gemischte" — Summe hat, falls die Glieder in beiden Weitenbehaftungen stets dasselbe Verhältnis zeigen, die Bedeutung dieses Verhältnisses und der Möglichkeit beide Weitenbehaftungen bei einem bestimmten Verhältnis auf dieselbe Ausdehnung (hier die Zahlenreihe) anzuwenden. Die Multiplikation des Ganzen wird ausgeführt durch Multiplikation aller einzelnen Glieder, der endlichen wie der unendlichen. Bei der Addition solcher Reihen ist das Summieren in jeder Weitenbehaftung für sich erlaubt (man zog endliche gleiche und unendliche gleiche voneinander ab). Dadurch verschwindet die Unbestimmtheit, es bleibt aber die Gleichheit und die äufserliche Verbindung von Gröfsen verschiedener Weitenbehaftung. Das eine übrigbleibende unendlichkleine Glied aber fällt neben einem endlichen Summanden fort, d. h. die formelle Addition von Endlichem und Unendlichem ist jetzt gesondert von dem Begriffe der Gröfsengleichheit (zweier ein endliches Resultat gebenden Summen) zu Tage getreten und fällt darum schliefslich ganz fort.

Hiermit ist der doppelte Weg, die Hinzuführung zur unendlichen Reihe und die Zurückführung zum endlichen Resultate, in seinem Wesen angegeben.

Achileus und die Schildkröte.

Schon im Altertume erkannte man die Schwierigkeiten, welche gewisse Auffassungen des Räumlichen unserem Nachdenken bereiten. Man glaubte beweisen zu können, dafs der schnellste Läufer, etwa der Held Achileus, nicht imstande sein könne eine Schildkröte — oder sagen wir sogar eine Schnecke einzuholen. Es befinde sich Achileus (oder genauer sein Schwerpunkt) in einem Punkte A 1000 m von einem zweiten Punkte B entfernt, und die Schnecke (oder ihr Schwerpunkt) in S auf der Strecke AB, aber nur 1 m von B entfernt. Es möge sich nun A (Achileus) tausendmal so schnell fortbewegen wie die Schnecke; dann langen beide nach einer gewissen Zeit, in der A 1000 m zurücklegt, in B an d. h. A hat die Schnecke thatsächlich eingeholt.

Dafs er dies kann, läfst sich nicht bezweifeln. Man stelle aber folgende Überlegung an. Ist es richtig, dafs A, um nach B zu gelangen, auch erst einmal nach S, dem Ausgangspunkte der Schnecke, gelangen mufs? Zweifellos. Wo ist dann die Schnecke? Da sie 1 m macht, wenn A 1000 m macht, so macht sie $\frac{1}{1000}$, wenn A 1 m

macht, also $\frac{9999}{10000}$, wenn A den Weg AS gleich 999 m zurücklegt. Sie sei dadurch gekommen bis zu einem Punkte S_1 ziemlich nahe vor B. Ist es richtig, dafs A auch einmal nach S_1 kommen mufs? Zweifellos. Wo ist alsdann die Schnecke? A hat von S aus zurückgelegt $\frac{9999}{10000}$ m, also die Schnecke den tausendsten Teil davon d. h. $\frac{999}{(1000)^2}$. Nun fragt man weiter, ob A auch einmal diesen nun von der Schnecke erreichten, noch näher an B liegenden Ort erreichen mufs und ob die Schnecke alsdann noch da ist, vorausgesetzt, dafs sie in gleichmäfsiger Weise fortkriecht. Kann man in derselben Weise weiter fragen? Das kann man wohl, und es ist sicher, dafs A alle die jedesmal vorhergehenden Orte der Schnecke S, S_1, S_2, S_3, ... der Reihe nach erreichen mufs. Kann man also sagen, dafs A der Reihe nach zurücklegt die Strecken, deren Addition in Metern die Form hat

$$999 + \frac{999}{1000} + \frac{999}{(1000)^2} + \frac{999}{(1000)^3} + \ldots ?$$

Aber nun kommt die Schwierigkeit. Kann man behaupten, dafs eine solche Strecke einmal die letzte ist? Kommt A nach dieser Auffassung nach Zurücklegung irgend einer dieser Strecken wirklich genau in den Ort der Schnecke? Nein! Und doch weifs man aus der Erfahrung bestimmt, dafs A einmal die Schnecke einholt und zwar nach einer ganz bestimmten Zeit in einem ganz bestimmten Orte von endlicher Entfernung. Das scheint sich zu widersprechen.

Sagt man, A könne auf diese Weise niemals an den Ort der Schnecke gelangen, so sagt man in der That einen Widerspruch zur Erfahrungsthatsache. Ebenso, wenn man nach jener Betrachtung sagen wollte, er gelange nirgends an die Schnecke heran.

Man pflegt zu sagen, die Alten hätten den Widerspruch nicht lösen können, weil sie den endlichen Summenwert der unendlichen geometrischen Reihe nicht erkannt hätten. So leicht aber sind sie nicht abzufertigen. Wenn sie auch auf irgend einem Wege, etwa so, wie es jetzt in den Schulen gelehrt wird, gefunden hätten, dafs jene Reihe nach Hinzufügung eines Gliedes $999 \cdot \frac{1}{(1000)^{n-1}}$ die Summe habe $999 \frac{1 - \left(\frac{1}{1000}\right)^n}{1 - \frac{1}{1000}}$, wobei $\left(\frac{1}{1000}\right)^n = 0$ zu setzen sei, also den Wert 1000 m, so wäre doch noch nicht gezeigt, ob nicht etwa die Schwierigkeit einfach in die Summierung der Reihe geschoben sei, ohne in Wahrheit fort zu sein. Wir haben im vorigen Abschnitte gesehen, dafs in der unendlichen Reihe wirklich noch Schwierigkeiten von jener Art enthalten sind. Will man vom Widerspruch frei bleiben, so mufs

man sagen: A gelangt nicht nach Zurücklegung irgend einer jener Strecken in denjenigen Ort, den dann gerade die Schnecke inne hat. Aber vielleicht widerspricht das gar nicht der Thatsache, daſs er endlich die Schnecke einholt. Wenn nun die Zerlegung der Strecke AB bis zu ihrem Endpunkte B in der geschilderten Art ein unmögliches Verlangen, eine falsch gestellte Aufgabe wäre?

Dagegen könnte man sagen, es sei ja von mir selbst zugegeben worden, daſs A, erst einmal nach S, dann nach S_1, dann nach S_2 usw. gelangen müsse, ehe er nach B kommen kann. Gewiſs. Aber ist damit zugegeben worden, daſs man durch die Betrachtung der Strecke AS, dann derjenigen der Strecke SS_1 usw. genau in den angegebenen Verhältnissen, überhaupt genau zur Gesamtstrecke AB gelangen könne? Wenn man das nun nicht kann? Wenn man nun auf dem Wege von A nach B, den man sonst einfach durch die Streckenverhältnisse wie 1000 m : 1 m betrachtet, plötzlich eine Betrachtungsweise anwendet, die sich überhaupt nicht mit der vorhergehenden als wesensgleich zusammenstellen läſst? Kurz wenn man den Zwang auferlegen möchte, die Weitenbehaftung des Endlichen mit der des Unendlichen zusammenzulegen in einer Weise, die dem Wesen, der thatsächlichen Stellung beider Vorstellungsarten widerspricht? Wohnen die Vorstellungen des Endlichen und Unendlichen derart im Geist, daſs sie nicht ohne weiteres durcheinander gemischt werden dürfen, so muſs Widerspruch entstehen, falls man dies aus Mangel an Erkenntnis thut.

Man darf sich nicht einbilden, es liege schon im Wesen einer Strecke AB auf ihr in irgend einer Weise Strecken zu tragen. Es gehört etwas Neues, ein neuer Akt dazu, eine Behaftung mit (!) etwas Neuem, wenn man das in irgend einem Maſse und dem Unendlichkleinen thut.

Es ist demnach unrichtig eine Strecke AB ganz genau so zu zerlegen, wie es in der unendlichen geometrischen Reihe steht. Zwar ist es wahr: man kann sich vorstellen, daſs A erst einen gewissen Teil $\frac{999}{1000}$, dann wieder einen Teil $\frac{999}{(1000)^2}$ usw. zurücklegt, und man kann sich andererseits vorstellen, daſs er die ganze Strecke AB zurücklegt; man kann sich aber nicht genau vorstellen, daſs bei einer derartigen Teilvorstellung nach $\frac{1}{1000}$ und Potenzen hiervon die Strecke AB sich ergebe. Und zwar deshalb, weil bei einer solchen Teilvorstellung die gerade Linie auſser mit der Weitenbehaftung des Endlichen auch mit der des Unendlichkleinen versehen werden muſs. Diese Behaftung

ist zwar neben- und hintereinander möglich, aber nur so weit und so lange man sich dabei bewufst bleibt, dafs jene Vorstellungsarten zwar verwandt, aber in anderer Beziehung verschiedenen Wesens sind.

Ein grobes Beispiel wäre (man vergleiche auch die ersten Kapitel über die Punkte auf Linien!): es ist zwar möglich nebeneinander zu setzen die Begriffe „apfelgrün" und „Bewufstsein". Beides hat eine gewisse Verwandtschaft, denn beides gehört zu den Vorstellungen unseres Geistes, wird von uns begrifflich gebildet usw. Man kann auch äufserlich dicht hintereinander denken „apfelgrün" und „Bewufstsein", kann über ihren eben angedeuteten Zusammenhang nachsinnen, aber man kann sie nicht so zusammenstellen wie etwa „apfelgrün" und „Papier". Apfelgrünes Papier hat einen Sinn, apfelgrünes Bewufstsein keinen.

In der unendlichen Reihe darf man die Verbindung des Endlichen und Unendlichen durch ein Pluszeichen nicht mehr völlig in dem Sinne deuten wie sonst die Pluszeichen zwischen nur endlichen oder zwischen unendlichen Gröfsen.

Es ist also nach den Ausführungen des vorigen Abschnittes richtig, dafs A auf seinem Wege je zwei Strecken hintereinander zurücklegt, deren Verhältnis $\frac{1}{1000}$ ist. Und es ist auch richtig, dafs man sich das sowohl anfangs im Endlichen, wie auch schliefslich im Unendlichkleinen vorstellen kann, es ist aber falsch, dafs durch gewöhnliche Addition der endlichen und unendlichkleinen Gröfsen die Strecke AB in der Vorstellung entstehen könne.

Selbstverständlich läfst sich dieselbe Aufgabe in vielen Formen stellen. Z. B. steckt derselbe Fehler in der Behauptung: kein Mensch könne aus der Stube gehen; denn er müsse ja erst den halben Weg, dann wieder die Hälfte des Restes usw. zurücklegen. Oder man könnte behaupten wollen, eine Bewegung durch irgend eine beliebige grofse oder kleine Strecke hin sei überhaupt unmöglich, es gebe gar keine Bewegung. Denn bei jeder Bewegung lege man erst die Hälfte (oder $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{10}$ usw.), dann wieder denselben Bruchteil des Restes u. s. f. zurück, was nie zur Zurücklegung der anfangs vorgestellten, wenn auch noch so kleinen Bewegungsstrecke führe. Der Trugschlufs wird nicht anders, wenn die Strecke AB als unendlichklein vorgestellt wird. Denn alsdann werden die Teilstrecken schliefslich unendlichklein von zweiter Ordnung.

Daraus wieder könnte man die metaphysische Behauptung aufstellen wollen, in der Vorstellung läge der angeborene Widerspruch, dafs man erstens die Vorstellung einer Strecke thatsächlich habe und

zweitens eine Vorstellung thatsächlich habe, die jener direkt widerspricht.

Nach unseren Untersuchungen ist kein Widerspruch vorhanden, oder man müfste etwa behaupten wollen, die Vorstellung einer Dimension und aufserdem einer zweiten widersprächen sich, oder es widerspräche sich die Punktvorstellung mit derjenigen der Linie. Der Widerspruch ergiebt sich nur bei falscher Anwendung der verschiedenen thatsächlichen Eigentümlichkeiten. Aber freilich die Geschichte lehrt, dafs die Ähnlichkeit dieser Eigentümlichkeiten sehr leicht zur falschen Anwendung führt, und dafs die Erkenntnis des Anwendungsfehlers schwer zu finden war. Mag auch die Lösung einfach erscheinen, das Einfache wird nicht immer zuerst gefunden. Beim Nachdenken über unsere Erkenntnis sind wir so sehr an das Verwickelte gebunden, dafs die Auflösung dem Entwirren eines höchst verschlungenen Knäuels gleicht.

Die arithmetische unendliche Reihe.

Die Einheit und die natürlichen Zahlen in Beziehung zur Weitenbehaftung.

Eine arithmetische Reihe erster Ordnung nennt man bekanntlich eine Reihe von Zahlen, deren je zwei sich um dieselbe Zahl unterscheiden. Ein sehr einfaches Beispiel ist die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... mit dem Unterschiede 1 und dem Anfangsgliede 1. Es mögen alle Glieder zur endlichen Weitenbehaftung gehören und es heifse das letzte n. Dann ist die Summe der Reihe $n/2 \cdot (1+n)$. Dies kann man durch Addieren der Reihe in folgender Form finden:

$$(1) \quad x = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$
$$(1) \quad x = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$$

Also $2x = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)$, nämlich n mal wiederholt (man zähle immer die untereinanderstehenden Glieder jener beiden Formen zusammen!). Also $2x = n \cdot (1+n)$. Die Summe der Reihe ist demnach $x = \frac{n}{2}(1+n) = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}$.

Um die unendliche arithmetische Reihe richtig zu verstehen, ist eine Untersuchung des Wesens der Einheit nötig. Man weifs sonst gar nicht, was z. B. $1+n$ bedeuten soll. Soll dann 1 eine endliche Zahl sein? Oder wäre es auch möglich unter 1 eine unendliche Einheit und unter n eine Anzahl von unendlichen Einheiten zu verstehen? Oder bedeutet n eine unendliche Anzahl von endlichen Einheiten?

Die unendlichgroſse Zahl ist insofern mit jeder endlichen unvergleichbar, als ihr Verhältnis zu jeder endlichen keinen bestimmten von anderen (unendlichen) unterscheidbaren Wert giebt, sondern stets unbestimmt unendlich ist. Es ist eine in ihrem Werte zweifelhafte und mangelhafte Erklärung, wenn man sagt: eine unendliche Zahl hat unendlichviele Einheiten. Was soll dann bedeuten „Einheit"? Soll durch diesen Satz das Wesen des Unendlichen erklärt sein? Ist die endliche Einheit zugleich die Einheit des Unendlichen? Kann man etwas Unendliches nicht zur Einheit zusammenfassen und muſs man dies nicht nennen eine unendliche Einheit oder Einheit des Unendlichen? Kann man nicht ebensowohl etwas Unendlichkleines begrifflich zusammenfassen wie etwas Endliches?

Einheit ist zu jeder Begriffsbildung nötig, zum Begriffe von etwas Endlichem oder Unendlichem. Sie ist etwas, was mit jeder Weitenvorstellung behaftet werden kann oder mit dem jede Weitenvorstellung zu behaften ist. Das heiſst: Einheit und Weitenbehaftung sind begrifflich trennbare, aber geistig kombinierbare Elemente.

Was ist aber die mathematische Einheit? Ist dies eine nur endliche Gröſse? Kann man die mathematische Einheit von der Weitenbehaftung losmachen, oder thut man besser zu reden erstlich von endlicher, dann aber noch von unendlicher Einheit verschiedener Ordnung? Man ist versucht zu sagen: die unendlichgroſse Zahl hat unendlichviele unendliche Einheiten. Ist das richtig?

Ist die unendliche Gröſse nicht mit einer anderen unendlichen Gröſse verglichen, so ist sie unbestimmt auch im Unendlichen. Soll sie im Unendlichen als bestimmt vorgestellt werden, so heiſst das nicht etwa, sie habe eine bestimmte, der endlichen Einheit 1 gegenüber angebbare Anzahl, sondern ihr Verhältnis zu einer anderen bestimmten unendlichen Gröſse sei dasselbe wie das von zwei bestimmten endlichen Gröſsen z. B. $\omega_2 : \omega_1 = 2 : 1$. Sollen zwei unendliche Gröſsen als gleich vorgestellt werden, so ist ihr Verhältnis $\omega_1 : \omega_1 = 1$, wobei 1 nicht als eine endliche Gröſse betrachtet wird, sondern gar keiner bestimmten Weitenbehaftung angehört oder das Verhältnis zweier gleichen Gröſsen irgend einer Weitenbehaftung bedeutet. Es ist $\omega_2 = 2 \cdot \omega_1$, $\omega_1 = 1 \cdot \omega_1$; so kann man weiter bilden $3 \cdot \omega$, $4 \cdot \omega$ u. s. f. Man zählt demnach im Unendlichen ebenso wie im Endlichen, nur muſs man irgend eine unendliche Gröſse z. B. ω_1 als die betreffende Einheit im Unendlichen betrachten. Also die Ziffer 1 kann andeuten das, was man logisch hinzugeben muſs, wenn man irgend welche, irgend einem Gebiet angehörende Elemente zur Einheit des

Begriffes zusammenfaſst; dies heiſse die „logische Einheit"; sie kann aber auſser dieser Thätigkeitseigentümlichkeit auch noch die Nebenbedeutung bekommen, es solle darunter eine endliche Einheit verstanden werden, d. h. irgend welche endliche Elemente, zur Einheit zusammengefaſst, einschlieſslich ihres endlichen Charakters. Dies heiſse die auf das Endliche angewendete oder mit dem Endlichen benannte Einheit. Die Bildung dieses letzteren Zahlenbegriffes „ein Endliches" kann nur geschehen im Gegensatze zu mehreren Endlichen, während die bloſse logische Einheitlichkeit rein formal als ein logisches Einzelelement angesehen werden kann. Die unendliche Einheit wie ω_1 bedeutet die begriffliche Einigung, aber von etwas mit der Weitenbehaftung des Unendlichen Versehenem, darauf Angewendetem oder damit Benanntem; und dieses ist nur verstellbar im Gegensatze zu anderem Unendlichem. Man kann irgend welche Gruppe von mit dem Unendlichen behafteten Elementen als eine unendliche Einheit zusammenfassen oder auch dieselbe Gruppe wieder zerlegt denken in zwei unendliche Einheiten, kurz von solcher Einheit ist nur die Rede in Vergleichung mit anderem. Entsprechend können die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 usw. etwas bedeuten, was nicht nur mit dem Endlichen, sondern auch mit dem Unendlichen benennbar ist; die Bildung der natürlichen Zahlen ist ein Vorgang, den man auf die einzelnen Arten der Weitenbehaftung anwenden kann.

Umgekehrt ist aber auch stets die Möglichkeit vorhanden, irgend eine Weitenbehaftung auf die logische Einheit anzuwenden und zu bilden eine endliche Anzahl von logischen Einheiten oder auch eine unendliche Anzahl von solchen. Zählt man von 1 aus nach 2, 3 usw., so hat man die Behaftung des Endlichen auf die logische Einheit angewendet, so lange die natürlichen Zahlen bis zu einem endlichen n darunter verstanden werden. Sollen diese Zahlen bis in das Unendliche gehen, wie man sagt, so heiſst das, man hat aufserdem (!) auch noch die Weitenbehaftung des Unendlichen darauf angewendet. Diese entweder mit dem Endlichen oder dem Unendlichen behaftete sogenannte natürliche Zahlenreihe kann nun umgekehrt wieder auf das Endliche oder das Unendliche angewendet werden, dann erhält man Anzahlen von endlichen oder unendlichen Einheitsgröſsen.

Die „logische Einheit" bedeutet eine zusammenfassende geistige Thätigkeit, bei der noch nicht entschieden wird, ob sie auf etwas Endliches oder Unendliches angewendet wird, bei der man auch noch

nicht sagen kann, daſs darauf schon irgend eine Weitenbehaftung angewendet werde; sie ist für sich etwas von der Weitenbehaftung Unabhängiges. Sobald man aber 1, 2, 3 usw. zählt, so verwendet man dabei erstlich etwas ganz Eigentümliches, die Eigentümlichkeit der „Zahl" oder „des Zählens", welche in ihrem Wesen verschieden ist z. B. von der Eigentümlichkeit der räumlichen Vorstellung. Man wendet aber sofort auch darauf an eine Weitenbehaftung, nämlich zunächst die des Endlichen, wenn man „endliche" natürliche Zahlen bildet; ähnlich wendet man auch bei räumlicher Vorstellung von Strecken sofort an entweder die Weitenbehaftung des Endlichen (endliche Strecken) oder des Unendlichen. Wendet man zweimal die Weitenbehaftung des Endlichen auf Centimeter an, indem man bildet etwa dreimal 4 cm, also indem man nicht aus der Dimension der Linie herausgeht, so ergiebt sich wieder die Weitenbehaftung des Endlichen, nämlich 12 cm. Wir sahen früher, daſs dies eine besondere Eigentümlichkeit der endlichen Weitenbehaftung ist. Wendet man die Behaftung mit dem Unendlichkleinen zweimal an und bildet z. B. $\frac{1\text{ cm}}{\infty} \cdot \delta$, so ergiebt dies eine unendliche Weitenbehaftung von zweiter Ordnung. Wenn man aber die unendliche Weitenbehaftung das eine Mal in der einen Dimension, das zweite Mal in einer anderen Dimension anwendet z. B. bildet einen unendlichkleinen Teil eines Centimeters, multipliziert nicht mit δ, sondern mit δ cm, so ergiebt sich als Anschauung ein unendlichkleines Quadrat mit unendlichkleinen Seiten oder die Behaftung zweier Dimensionen mit dem Grade δ^1, nicht ein Quadrat im Unendlichkleinen zweiter Ordnung. Bildet man aber $1 \cdot \delta$ oder $\delta \cdot 1$ (im Verhältnis zu $\delta \cdot 2$) und behaftet dies wieder mit δ, so ist dieses $1 \cdot \delta^2$ oder $(\delta \cdot 1)^2$ die Einheit behaftet mit dem Unendlichkleinen zweiter Ordnung (z. B. vorkommend im Verhältnis zu δ_2^2).

Die ganzen, gebrochenen und irrationalen Zahlen haben nur eine Dimension d. h. wenn man zwei endliche solche Zahlen miteinander multipliziert, so ergiebt sich Endliches, wenn man aber zwei unendlichkleine miteinander multipliziert, so ergiebt sich Unendlichkleines von zweiter Ordnung. Nach den Betrachtungen dieses Abschnittes kann das so ausgedrückt werden: Wenn man auf die logische Einheit anwendet zweimal die endliche Weitenbehaftung (und zugleich das dem Wesen des „Zählens" Charakteristische, von dem Wesen des Räumlichen Verschiedene), so entstehen wieder Zahlen mit endlicher Weitenbehaftung, wenn man aber darauf anwendet zweimal die Weitenbehaftung des Unendlichkleinen, so entstehen Zahlen mit der

Weitenbehaftung des Unendlichkleinen zweiter Ordnung. Wenn man andererseits irgend eine Zahl n (sei sie nun endlich oder unendlich d. h. selbst mit der einen oder anderen Weitenbehaftung versehen) anwendet auf Vorstellungen mit endlicher Weitenbehaftung z. B. $n \cdot a$, und dies multipliziert mit einer anderen entsprechenden Gröfse $n_1 \cdot a_1$, so ergiebt die Multiplikation von $a \cdot a_1$ dieselbe Weitenbehaftung des Endlichen; wenn man aber bildet $n \cdot \delta$ und dies multipliziert mit $n_1 \cdot \delta_1$, so ergiebt die Multiplikation von δ und δ_1 dieselbe Weitenbehaftung, falls die Gröfsen δ und δ_1 verschiedenen Dimensionen angehören, sonst aber eine Weitenbehaftung anderer Ordnung.

Kehren wir nun zur arithmetischen Reihe zurück! Sind die Zahlen 1 bis n alle mit endlicher Weitenvorstellung behaftet (oder ist die endliche Weitenbehaftung darauf angewendet), z. B. bei der Reihe $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, so gehört ihre Summe $\frac{n}{2}(1 + n)$ ebenfalls zu dieser Weitenbehaftung. Bildet man aber die Reihe $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 2) + (n - 1) + n$ und behaftet n mit der Weitenvorstellung des Unendlichen, ebenso $(n - 1)$, $(n - 2)$, usw., so hat in der Summe $\frac{n}{2}(1 + n)$ die endliche Gröfse 1 als Vermehrung der unendlichen n gar keine Bedeutung mehr und umgekehrt. Es ist dies nur noch eine äufserliche Zusammenstellung, es wird die unendliche Gröfse n durch eine Vermehrung um das endliche 1 nicht im mindesten als unendliche Gröfse verändert (nebenbei ist aber festzuhalten, dafs die 1 angewendet auf endliche Elemente, nur Sinn hat im Verhältnis zu anderen endlichen Elementen, entsprechend das unendliche n angewendet auf endliche oder auch auf unendliche Elemente). Die Summe $\frac{n}{2}(1 + n)$ kann man in unserem Falle also auch schreiben $\frac{n}{2} \cdot n = n^2 : 2$ oder man kann rechnen $\frac{n}{2}(1 + n) = \frac{n}{2} \cdot 1 + \frac{n^2}{2} = \frac{n^2}{2} = \frac{\infty^2}{2}$ oder anderer Weitenbehaftung gegenüber $= \infty^2$. Das Resultat ist unendlich von zweiter Ordnung, und daneben hat das Unendliche von erster Ordnung keine Bedeutung.

Natürlich hat das Resultat in der Form ∞^2 keineswegs die volle Bedeutung der Reihe (1), denn es könnte auch aus ganz anderen Summen entstanden sein, z. B. aus $\infty + \infty + \infty + \ldots$ (∞ mal wiederholt). Schreibt man $\infty^2 : 2$, so steckt darin noch soviel, dafs die ursprünglichen Summanden in zwei Arten geteilt waren, deren jede gleiche Anzahl von Gliedern hatte (vergleiche die Addition der Reihen-

formen (1) und (2)), und daſs von den unendlichen und endlichen sich je zwei um dieselbe Differenz unterscheiden. Schreibt man $\frac{\infty}{2}(1+\infty)$, so ist dabei noch die Verschiedenheit der beiden hier vorkommenden Weitenbehaftungen beibehalten, und daſs die Differenz je zweier Glieder (als logische Einheit gerechnet) gleich dem Anfangsgliede ist; soll aber auch die Differenz gesondert vom Anfangsgliede dastehen, so muſs man schreiben $\frac{\infty}{2}(1+1+(n-1)\,.\,1$ oder allgemein für die Reihe $a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+(a+[n-1]d)$ die Summe $\frac{n}{2}(a+a+[n-1]d)$. Es kommt auf die Umstände an, unter denen die Reihe aufgestellt und verwertet wird, ob man diese oder jene der ursprünglichen Vorstellungen im Resultate aufgeben will oder nicht. Sind a endliche Einheiten, so ist $a+(n-1)d$ nur eine äuſserliche Verknüpfung.

Will man übrigens die ursprünglich nur äuſserlich oder logisch zusammengefügten verschiedenen Weitenbehaftungen, angedeutet durch ein starkes Pluszeichen in

$$1+2+3+\ldots\dot{+}(n-2)+(n-1)+n$$

im Resultate beibehalten, so müſste man auch bei der Addition der Reihen (1) und (2) stets schreiben $1\dot{+}n$, $2\dot{+}(n-1)$, usw. also auch im Resultat setzen $\frac{n}{2}(1\dot{+}n)$. Es hat dabei das n vor der Klammer nicht ganz dieselbe Bedeutung wie das n innerhalb derselben. Ersteres bedeutet, daſs ebensoviel endliche wie unendliche Summanden vorhanden sein sollten und zwar jedesmal unendlichviel, nämlich $n/2$, das letztere bedeutet, daſs auch eine Weitenbehaftung des Unendlichen angewendet war und innerhalb einer jeden Weitenbehaftung sich je zwei Glieder um dieselbe Differenz unterscheiden sollten, nämlich hier um eine endliche oder um eine logische Einheit, auf welche die Weitenbehaftung des Endlichen angewendet war, entsprechend um eine mit dem Unendlichen behaftete logische Einheit.

Die Vermischung der Weitenbehaftungen bildet die Schwierigkeit der unendlichen Reihe. Die Form für ihre Summe kann sehr nützlich sein, wenn die Umstände erlauben diese äuſserliche Vermischung wieder aufzugeben. Dann führt die Betrachtung der Reihe zu einem z. B. physikalisch brauchbaren Werte, sie ergiebt uns mit Hilfe des Unendlichen eine Ableitung für gewisse Erfahrungsthatsachen wie die Fallstrecke $g/2$. Die Vermischung des Endlichen mit dem Unendlichen welche die Reihe zeigt, haben wir äuſserlich genannt, um anzudeuten,

daſs dabei zwei ganz verschiedene Vorstellungsarten logisch zusammengebracht werden. Aber freilich unsere Vorstellung der Natur verlangt eine solche Zusammenstellung. Die Fallstrecke der ersten Sekunde $g/2$ gleich etwa 4,9 m ist eine endliche Gröſse, die Vorstellung des Fallens selbst verlangt das Unendlichkleine. Beides muſs also in logischen Zusammenhang gebracht werden; aus der Vermischung muſs als Resultat das Endliche hervorgehen; aber das Wesen der Vermischung muſs erkannt, und es muſs klar gemacht werden, was erstlich die Vermischung und zweitens die Entmischung bedeutet, und wie ohne Widerspruch beides geschehen und zusammenhängen kann.

Unser Abschnitt erfordert zur Abrundung noch einige Betrachtungen. Soll die 1 in der Reihe die unendliche Einheit bedeuten, oder etwa eine unendlichkleine zweiter Ordnung (wie bei Ableitung der Fallformel im nächsten Abschnitt g/n^2), so liegen noch folgende Möglichkeiten vor. Entweder kann n in der Reihe eine endliche Anzahl von solchen unendlichen Einheiten bedeuten, also $n+1$ eine um 1 gröſsere endliche. Man müſste dann genauer schreiben $n\,\omega_1 + 1\cdot\omega_1 = (n+1)\,\omega_1$. Oder aber es könnte n eine unendliche Anzahl von unendlichen Einheiten bedeuten. Dann müſste man genauer schreiben $\omega\cdot\omega_1 + 1\cdot\omega_1$. Im ersteren Falle ist die Summe $\frac{n}{2}(n+1)$ einfach eine endliche Anzahl von unendlichen Einheiten ω_1. Im zweiten Falle entsteht wieder ein stark zu setzendes Pluszeichen mit seiner genannten Bedeutung.

Theoretisch ist eine Reihe, bei der a die endliche und ω_1 die unendliche Einheit bedeutet, schreibbar:

$$(1)\quad x = 1\,a + 2\,a + 3\,a + \ldots\ldots \dotplus \ldots + (n-2)\,\omega_1 + (n-1)\,\omega_1 + n\cdot\omega_1$$

oder

$$(2)\quad x = n\,\omega_1 + (n-1)\,\omega_1 + (n-2)\,\omega_1 + \ldots \dotplus \ldots + 3\,a + 2\,a + 1\,a$$

Die Addition $2x = (a \dotplus n\cdot\omega_1) + (2a \dotplus [n-1]\,\omega_1) + (3a \dotplus [n-2]\,\omega_1) + \ldots + ([n-1]\,\omega_1 \dotplus 2a) + (n\,\omega_1 \dotplus a)$ giebt formell

$$2x = \begin{cases} a \dotplus n\,\omega_1 + 2a \dotplus (n-1)\,\omega_1 + \ldots \\ + a \dotplus n\,\omega_1 + 2a \dotplus (n-1)\,\omega_1 + \ldots \end{cases}$$

Das Addieren bedeutet dann bloſs: dieselbe äuſsere Verknüpfung, die wir vorher mittels des mittleren starken Pluszeichens mit Zahlen verschiedener Weitenbehaftungen angestellt haben, stellen wir hier mit jeder Zahl jeder Weitenbehaftung und der entsprechenden der anderen Behaftung an. Nennen wir eine solche Summe wie $a \dotplus n\cdot\omega_1$ eine Summe mit gemischter Weitenbehaftung, wobei n zunächst irgend

eine endliche Zahl sei, so stehen in jeder Doppelsumme $2x$ in jeder Zeile $n/2$ solche Summen, also im Ganzen n. Natürlich ist dabei angenommen, daſs n die Anzahl der Summanden mit endlicher Einheit und der mit unendlicher Einheit (in der ursprünglichen Reihe x) zusammen sei. Vergleichen wir die gemischten Summanden z. B. $a + n \cdot \infty_1$ und $2a + (n - 1)\infty_1$, so sehen wir, daſs die Anzahl der endlichen und unendlichen Einheiten zusammengezählt in jedem Summanden stets dieselbe ist, nämlich im ersten Summanden $1 + n$, im anderen $2 + n - 1$ also auch $1 + n$ usw. Natürlich läſst sich diese Zählung nur ausführen, wenn man die daneben stehenden Einheiten fortläſst. Folglich ist unser Resultat:

Bezeichnet $n/2$ die beliebige Anzahl sowohl der endlichen für sich' wie der unendlichen Summanden für sich einer äuſserlich mit Einheiten zweier Weitenbehaftungen hergestellten Reihe, so besteht die äuſserlich gebildete Summe aus $n/2$ Summanden gemischter Weitenbehaftung, in deren jedem die Zahl der endlichen und unendlichen Teilsummanden zusammen $n + 1$ ist.

Ich bemerke noch, daſs ein Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung doch nicht ganz analog einer Reihe mit gemischter Weitenbehaftung ist. Es ist nicht schwer dies im Einzelnen auszuführen, wenn man bedenkt, daſs ein Dreieck mehrere Dimensionen zeigt, freilich die einfache Bildung der Seitensumme oder Gradanzahl nicht mehr die Verschiedenheit der Dimension betrifft.

Von gröſstem Interesse wird es sein, die Anwendungen der unendlichen arithmetischen Reihe in der Physik nach Vorstehendem in ihrer Bedeutung zu prüfen. Die gewöhnlichen, so wichtigen Fallformeln und die Ableitung der Form $m/2 \cdot v^2$ für die aktive Energie, welche auch in der Schule behandelt zu werden pflegen, seien als Beispiele gewählt.

Die Fallstrecke $g/2$.

Die genaue Beschreibung der physikalischen Erscheinungen ist ohne das Unendliche nicht möglich. Besonders auffällig ist dies bei allen krummen Bewegungen. Aber schon die geradlinige beschleunigte Bewegung läſst sich durch endliche Maſse nicht ohne den Weg über das Unendlichkleine so zum Ausdruck bringen, daſs man den Zusammenhang für irgend welche Zeiten und Strecken versteht. Der fallende Körper, der im Augenblicke, da man ihn losläſst, in Ruhe ist (mag es nun eine absolute Ruhe geben oder nicht; gemeint ist: in Ruhe beziehlich des sich nun Ereignenden), befindet sich am Ende

der ersten Sekunde seines Fallens in einem Zustande, in dem er ohne weitere Einwirkung der Anziehungskraft (d. h. der Ursache dieser Bewegung) in der nächsten Sekunde eine gewisse Strecke, genannt g, zurücklegen würde. Man sagt, er habe alsdann die Geschwindigkeit g. In Wahrheit zeigt er niemals eine gleichmäfsige Bewegung d. h. in allen gleichen, beliebig klein gedachten Zeiten denselben Weg, sondern er wird immer schneller.

Wie dies „immer" oder „in jedem Augenblicke" oder dies „fortwährende, kontinuierliche, stetige Beschleunigen" bewirkt wird, ist nicht vorstellbar, ohne dafs man an sehr kleine Zeitteilchen und Strecken denkt und zwar so kleine, dafs mit einer einzelnen ein einziges Endliches kein bestimmtes Verhältnis mehr bildet — an unendlichkleine. Teilt man also eine Sekunde für diese Zwecke in n Teile, so mufs man sich dies n unendlichgrofs vorstellen.

Wenn man ferner voraussetzt, die von der sogenannten Anziehungskraft bewirkte Endgeschwindigkeit entspräche genau der Zeit der Einwirkung, in gleichen Zeiten werde dieselbe Endgeschwindigkeit bewirkt und diese komme stets zur bisherigen Endgeschwindigkeit hinzu, so erhält man für beliebige Anzahl von Sekunden das von Galilei gefundene Gesetz, dafs die Endgeschwindigkeit proportional der Anzahl der seit Beginn des Falles verstrichenen Sekunden sei, also $g \cdot t$ betrage. Man nehme an, dies Gesetz gelte auch für beliebig kleine und sogar unendlichkleine Zeitteilchen; es gilt dabei natürlich auch Galiläis Beharrungssatz $s = c \cdot t$ d. h. bei gleichmäfsig vorgestellter Bewegung sei der Gesamtweg gleich dem in einer Sekunde zurückgelegten, multipliziert mit der Anzahl der Sekunden.

Eine genauere Untersuchung gehört zum Teil in eine Philosophie der Mechanik, zum Teil kann sie erst bei der Besprechung der Grundbegriffe der höheren Mathematik später in diesem Buche erfolgen. Hier liegt uns nur daran, zu zeigen, wie bei solchen Voraussetzungen das Unendliche benutzt wird, um die übrigen Fallgesetze, vor allem die Länge des Weges in der ersten Fallsekunde abzuleiten.

Welchen Weg der fallende Punkt in der ersten $1/n$ Sekunde nach der Ruhe zurücklegt, vermag man nicht anzugeben, jedenfalls ist derselbe als unendlichklein von irgend welchem Grade anzusehen, wenn n unendlichgrofs und der in einer endlichen Zeit erzeugte Weg endlich ist. Dieser unbestimmte kleine Teilweg heifse ε. Nun sollte ja die Endgeschwindigkeit am Ende der ersten $1/n$ Sekunde, soweit sie durch die Anziehung innerhalb dieser ersten $1/n$ Sekunde erzeugt wird, nach jener Annahme g/n sein d. h. der Körper würde dann in der auf diese $1/n$ Sekunde folgenden ganzen Sekunde ver-

möge dieser Endgeschwindigkeit den Weg g/n zurücklegen. Folglich würde er in der nächsten $1/n$ Sekunde hierdurch nur den $n$ten Teil dieses Weges machen d. h. g/n^2. Die Anziehungskraft selbst ist aber auch innerhalb dieser zweiten $1/n$ Sekunde nicht unthätig, vielmehr ist sie ebenso thätig wie innerhalb der ersten $1/n$ Sekunde, wo sie den Weg ε hervorbrachte; sie bringt demnach auch hier noch von neuem den Weg ε hervor. Der gesamte Weg innerhalb der zweiten $1/n$ Sekunde ist mithin $\frac{g}{n^2} + \varepsilon$.

Die Gröfse ε, also der Weg in der ersten $1/n$ Sekunde kann nicht gröfser sein als g/n^2, weil durch Fortgehen der bisherigen Geschwindigkeit und durch Weiterwirken der Anziehungskraft stets auch innerhalb der ersten $1/n$ Sekunde eine Vergröfserung der Endgeschwindigkeiten und Einzelwege eintritt. Also ist ε wie g/n^2 entweder auch unendlichklein vom zweiten Grade oder noch niedrigerer Ordnung. In der dritten 1/n Sekunde ist entsprechend der Weg $2\frac{g}{n^2} + \varepsilon$, in der vierten $3\frac{g}{n^2} + \varepsilon$, in der $n$ten $(n-1)\frac{g}{n^2} + \varepsilon$.

Der Gesamtweg in einer Sekunde ist demnach $\frac{g}{n^2} + 2\frac{g}{n^2} + \ldots . + (n-1)\frac{g}{n^2} + n \cdot \varepsilon$. Summiert man diese Reihe nach gewöhnlicher Methode, so erhält man, da die Anzahl der Glieder ohne die Gröfsen ε gleich $n - 1$ ist, $\frac{n-1}{2}\left(\frac{g}{n^2} + (n-1)\frac{g}{n^2}\right) + n \cdot \varepsilon$ oder

$$\frac{n-1}{2} \cdot n\frac{g}{n^2} + n \cdot \varepsilon \text{ oder } \frac{n^2}{2} \cdot \frac{g}{n^2} - \frac{g}{2} \cdot \frac{n}{n^2} + n \cdot \varepsilon.$$

Hierbei ist $n \cdot \varepsilon$ unendlichklein erster Ordnung oder noch kleiner, $\frac{g}{2} \cdot \frac{n}{n^2}$ ebenfalls unendlichklein erster Ordnung, während das erste Glied $\frac{g}{2} \cdot \frac{n^2}{n^2}$ oder $\frac{g}{2}$ endlich ist. Nach dem uns bekannten Grundsatze haben neben dem endlichen die unendlichkleinen Summanden keine Bedeutung für Messungen im Endlichen. Folglich ist der endliche Gesamtweg in der ersten Sekunde des freien Falles $1/2\,g$, ein Resultat, dafs im Galileischen Gesetze ausgesprochen wird. Entsprechend ergeben sich die Fallstrecken für die weiteren Sekunden als $3 \cdot g/2$, $5 \cdot g/2$ usw.

Es sind darin enthalten die Sätze, dafs die im Verlaufe von einer unendlichkleinen Zeit, nämlich $1/n$ Sekunde, bewirkte Endgeschwindigkeit g/n (ein Weg für eine nun eventuell folgende ganze Sekunde) dieselbe Weitenbehaftung hat wie die Zeit $1/n$ Sekunde, dafs aber der in unendlichkleiner Zeit bei unendlichkleiner Geschwindigkeit

(wenn dieser Begriff für eine endliche Sekunde gilt) zurückgelegte Weg unendlichklein von zweiter Ordnung ist.

Wie steht es nnn mit der Bedeutung der unendlichen arithmetischen Reihe, deren Summation hier einfach nach der Formel ausgeführt wurde? Bei der Reihe, die man auch schreiben kann

$$\frac{g}{n^2}(1 + 2 + 3 + \ldots + [n - 1])$$

gehört die erste Hälfte der Glieder einer anderen Weitenbehaftung an wie die zweite. Es ist dabei wichtig, daſs bei den ersteren, also $1 \cdot \frac{g}{n^2} + 2\frac{g}{n^2} + \ldots$ ein Fortschritt stets um $\frac{g}{n^2}$ stattfindet oder, wenn wir die Gröſse $\frac{g}{n^2}$ als Einheit betrachten, ein Fortschritt um die Einheit stattfindet. Derselbe Fortschritt findet auch beim zweiten Teile der Reihe statt, welcher der Weitenbehaftung des Unendlichkleinen erster Ordnung angehört. Diese thatsächliche Gleichartigkeit wirkt bestimmend auf die Entstehung des Nenners 2 im Resultate $1/2g$.

Ferner wirkt mit für das Resultat, daſs es unendlichviele Glieder sind, und daſs in den entstehenden Summen gemischter Weitenbehaftung (siehe den vorigen Abschnitt!) z. B. $\frac{g}{n^2} + (n - 1)\frac{g}{n^2}$ jedenfalls die Anzahl n vorkommt. Der so entstehende Faktor n^2 ist wichtig für die Entstehung des Resultates $\frac{g}{2} \cdot \frac{n^2}{n^2}$. Alles Übrige hat für das Endliche keinen Sinn und ist ohne Einfluſs auf das Resultat. Dieses hat nicht mehr gemischte Weitenbehaftung, sondern gehört nur dem Endlichen an. Die Unmöglichkeit, Glieder mit verschiedener Weitenbehaftung wirklich zu addieren in der vollen Bedeutung des Wortes Addieren, stört das Resultat nicht. Die ganze Methode ist eine derartige, daſs zwar gewisse unmögliche Aufgaben formell hingeschrieben werden, man aber bei der Behandlung dieser Aufgabe das Unmögliche wieder aufgiebt und keine für das Resultat störende Verwendung davon macht.

Es ergiebt sich ganz dasselbe Resultat, falls man von vornherein ε fortläſst und die Reihe mit n Gliedern statt mit $n - 1$ schreibt. Dann ist

$$\frac{g}{n^2}(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{g}{n^2} \cdot \frac{n}{2}(1 + n) = \frac{g}{2}\frac{n}{n^2} + \frac{g}{2}\frac{n^2}{n^2} = \frac{g}{2} \cdot \frac{n^2}{n^2} = \frac{g}{2}.$$

Überschauen wir das Ganze! Weil die Körper thatsächlich so fallen, daſs in jedem beliebigen Zeitteilchen, also auch im unendlichkleinen Bewegung stattfindet, und weil wir sowohl die Zeit wie auch die Fallstrecke mit der Weitenvorstellung des Unendlichen behaften

können, so müssen wir das Unendliche zu Hilfe nehmen, um den Fall gründlich zu verstehen. Das thatsächliche Vorhandensein von endlichen und unendlichen Vorstellungen im Geiste ist an sich kein Widerspruch. Behaften wir aber gleichzeitig die Strecke mit beiden Weitenvorstellungen, so fängt unsere Vorstellung an sich zu verwirren. Auch wenn wir uns unendlichkleine Zeit- oder Raumteilchen und im unmittelbaren Anschlusse daran endliche vorstellen wollen, geraten wir in Widersprüche und erkennen, dafs es keinen Übergang von den einen zu den anderen ohne Widersprüche geben kann, weder mit Sprung noch ohne Sprung. Ferner erkennen wir die Thatsache, dafs unendlichviel unendlichkleine Teilchen etwas Endliches geben, unendlichviele Teilchen von der Behaftung δ^2 aber die Behaftung δ. Darum ist es nicht unmöglich sich (in der ersten Hälfte der Reihe) unendlichviele Teilchen vorzustellen und diese Vorstellung an andere anzuknüpfen (zweiter Teil der Reihe), deren Summanden eine andere Weitenbehaftung haben als die einzelnen (!) Summanden des anderen Teiles der Reihe. Wir erlauben uns sogar zwischen beide Teile der Reihe ein Pluszeichen zu setzen, obgleich wir wissen, dafs dies sich nicht auf zwei einzelne Glieder der einen bez. der anderen Weitenbehaftung beziehen darf und dafs auch keine bestimmte Stelle vorstellbar ist, wo die eine Weitenbehaftung aufhört und die andere anfängt. Soviel aber ist richtig, dafs alles zusammen ein Resultat derselben Behaftung ergeben kann. Ferner ist richtig, dafs wir uns in beiden Weitenbehaftungen denselben Fortschritt vorstellen können (Differenz) und müssen, wenn der Fall eine regelmäfsig zunehmende Bewegung sein soll. Bei der äufserlichen Zusammenfügung des ersten und letzten Gliedes, des zweiten und vorletzten usw. halten wir wieder fest, dafs dies auch nur dieselbe Richtigkeit besitzt, wie das thatsächliche Vorkommen beider Weitenbehaftungen im Geiste. Aber die vorstellbare Bedingung, es solle in der einen Weitenbehaftung von Glied zu Glied entsprechend fortgeschritten werden wie in der anderen, eine Bedingung, welche die Gleichartigkeit der Fallbewegung verlangt, ist kein Widerspruch in sich, und diese Bedingung erlaubt uns die äufserlich zusammengestellte Summe von zwei Summen verschiedener Weitenbehaftung auf je zwei Glieder zu übertragen und nach dieser Übertragung diese äufserlichen gemischten Summen als etwas anzusehen, wobei man gleiche Zahl von logischen Einheiten irgendwie verwendet. Wir wissen sehr wohl, dafs sie nicht Zahlenwerte sind, die gleich sind, sondern dafs die sich ergebenden gemischten Summen zusammengestellt sind aus je einem Gliede der einen und je einem Gliede der anderen Behaftung. Ohne also je-

mals in den Fehler zu verfallen diese gemischten Summen für wirkliche ausrechenbare Zahlenwerte zu halten, können wir doch behaupten, es seien $n/2$ solche Summen, also $n/2$ Glieder von der einen Weitenbehaftung und $n/2$ von der anderen im Ganzen vorhanden. Auf dieses $n/2$ kommt alles an, darin liegt das Richtige unserer Vorstellung und das Mögliche! Statt daſs wir also nun noch zu thun haben mit einer halben Reihe von Gliedern der einen Weitenbehaftung und einer halben Reihe von Gliedern der anderen, haben wir nun $n/2$ mal uns vorzustellen, es sei ein einziges Glied der einen Weitenbehaftung äuſserlich nebengeordnet neben ein einziges Glied der anderen. Vorher wuſsten wir, daſs die unendlichvielen Glieder der niedrigeren Weitenbehaftung zusammen wohl eine Rolle in der höheren Weitenbehaftung spielen dürfen, da sie als Summe ein Element dieser höheren Weitenbehaftung ergeben, daſs aber beziehlich der Stelle des mittleren Summenzeichens Schwierigkeiten herrschen, ja sogar eine Unmöglichkeit. Diese Unmöglichkeit ist jetzt auch noch geblieben, aber sie ist hineingeschoben worden zwischen ein einziges Glied der einen und der anderen Behaftung. Und da wissen wir nun nach unseren Grundsätzen ganz klar, es habe dieses einzige Glied der niedrigeren Weitenbehaftung neben dem der höheren überhaupt keinen Zahlenwert, müsse also einfach fortgelassen werden, wenn wir den Zahlenwert feststellen wollen. Was wir vorher nicht konnten, als wir noch die vielen Glieder jeder Weitenbehaftung bei einander hatten, das können wir jetzt, wo in unserer Vorstellung je eines zu je einem der anderen Behaftung zugeordnet ist. Vorher wäre es ein Fehler gewesen, die sämtlichen Glieder der niedrigeren Weitenbehaftung zusammen einfach fortzulassen, jetzt aber ist es das einzig richtige, jedes vereinzelte Glied fortzulassen. Dafür aber haben wir die Anzahl $n/2$ erhalten! Also haben wir durch diese eigentümliche sonderbare Zusammenstellung, die man unendliche Reihe nennt und deren noch eigentümlichere sogenannte Summierung, ganz richtige Vorstellungs- und Denkoperationen vorgenommen und kommen auf ein ganz richtiges Resultat.

Aber wir müssen durchaus über die Eigentümlichkeit dieses ganzen Verfahrens klar werden und uns nicht einbilden, solche gemischten Summen seien ebenso sehr Zahlenwerte wie Summen aus einer einzigen Weitenbehaftung. Es sind nur Mittel zum Zwecke und gehören der Mathematik in deren bisherigem Sinne nicht mehr an. Sie springen gewissermaſsen in ein weiteres philosophisches Gebiet hinaus. Darum ist es auch kein Wunder, wenn die Mathematiker immer wieder auf die Idee kommen, das Unendliche in eigentlichem Sinne gehöre gar

nicht in die Mathematik hinein (Gauſs). Wir werden indessen sagen, auch solche gemischte Summen rechnen wir mit zur Mathematik. Wir erweitern damit die Mathematik. Nach den sonst in der Mathematik angewendeten Grundsätzen können wir allerdings diese Summen nicht behandeln. Wollen wir das mit Gewalt, so entstehen Sonderbarkeiten, Schwierigkeiten, sogar Widersprüche. Nehmen wir aber in die Mathematik die Grundsätze mit auf, die wir hier über das Unendliche und die verschiedenen Weitenbehaftungen aussprachen, wenden wir sie z. B. auf Reihen an und rechnen nun solche Reihen voll und ganz mit in die Mathematik hinein, dann verliert diese Wissenschaft ihre logische Richtigkeit und widerspruchslose Schärfe durchaus nicht, sie muſs sich allerdings oft einer gröſseren Vorsicht, Genauigkeit und auch Ausführlichkeit bedienen, als dies sonst üblich ist. Es dürfen selbst in der niederen Mathematik diejenigen Stellen, wo das Unendliche unabweisbar eingreift, nicht so stiefmütterlich behandelt werden. Das wollen wir aber nicht bedauern, denn es sind gerade die interessantesten Stellen. Gewiſs werden auch die Mathematiker nicht mehr die Neigung zeigen, darüber schnell hinweg zu kommen, wenn sie sehen, es liegen hier unüberwindliche Schwierigkeiten nicht vor.

Die aktive Energie $m/2 \cdot v^2$.

Wenn ein Körper mit dem Gewichte $m\,g$, also der sogenannten Masse m, sich bisher in Ruhe befand, nun aber sich in Bewegung setzt, so tritt in Erscheinung eine bestimmte Menge von sogenannter aktiver oder lebendiger Energie, die verschieden groſs ist, je nach dem der Körper eine Endgeschwindigkeit v von gewisser Gröſse erreicht.

Mit der Entwicklung einer Form für diese aktive Energie mittels der am Ende der Umsetzung sich zeigenden Geschwindigkeit v und der Masse m steht es ähnlich wie mit der Entwicklung von $g/2$ im vorigen Abschnitte.

Energie (Arbeit) bedeutet das Produkt von Kraft und Weg, den die Kraft, z. B. das bewegte Gewicht, zurücklegt. Für unendlichkleine Strecken ergeben sich zuerst $\frac{m \cdot v}{n}$, multipliziert mit $\frac{v}{n}$; denn die Kraft ist gleich dem Produkte aus der Masse und der Beschleunigung $\frac{v}{n}$. Für das nächste Streckchen ergiebt sich $m \cdot \frac{2v}{n} \cdot \frac{v}{n}$ usw., also die Summe ist $m \frac{v}{n} \cdot \frac{v}{n} (1 + 2 + \ldots + n)$ oder auch

$$n \cdot \varepsilon + \frac{mv}{n} \cdot \frac{v}{n} (1 + 2 + \ldots + [n-1])$$

(man vergleiche den vorigen Abschnitt!). Nach der äufserlichen Herstellung der Summation, die ohne Schwierigkeit wäre, wenn n eine beliebige endliche Grösse wäre, erhielte man

$$m \cdot \frac{v^2}{n^2} \cdot \frac{n}{2}(1+n) \text{ oder } n \cdot \varepsilon + \frac{mv^2}{n^2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot n,$$

also entweder

$$\frac{m}{2} v^2 \cdot \frac{n}{n^2} + \frac{m}{2} \cdot v^2 \cdot \frac{n^2}{n^2} \text{ oder } n \cdot \varepsilon + \frac{m}{2} \cdot v^2 \frac{n^2}{n^2} - \frac{m}{2} \cdot v^2 \cdot \frac{n}{n^2}.$$

Beides ergiebt für das Endliche den einzig und genau richtigen Wert $\frac{m}{2} \cdot v^2$.

Es ist sehr auffällig, dafs jene beiden Formen verschieden sind und nur in dem Gliede $\frac{m}{2} \cdot v^2 \cdot \frac{n^2}{n^2}$ übereinstimmen. Sie blieben in der That verschieden, oder es käme gar kein bestimmtes Resultat heraus, wenn die übrigen Summanden überhaupt oder als Summanden neben dem Endlichen noch einen Sinn haben. Die Betrachtungen über den Sinn der hier vorkommenden Reihe mit gemischter Weitenbehaftung können entsprechend den früheren ausgeführt werden. Die Methoden der höheren Mathematik zur Ermittelung von $m/2 \cdot v^2$ aus der Gröfse $m \cdot v$ oder umgekehrt von $m \cdot v$ aus $m/2 \cdot v^2$ können erst später behandelt werden, wenn von Integralen und Differentialquotienten die Rede sein wird. Sie hängen übrigens sehr eng mit dem hier Gesagten zusammen, wie überhaupt die höhere Mathematik dann nicht mehr von der niederen sich prinzipiell unterscheidet, wenn man alle die Fragen, die mit dem Unendlichen zusammenhängen, berücksichtigt. Nach meiner Ansicht heifst es aber dem Verstande Gewalt anthun, wenn man jene Fragen in der niederen einfach fortläfst oder umgeht oder gar Resultate der höheren verstohlener Weise hineinfügt (siehe Maximum und Minimum etc.!), ohne sie gründlich zu erklären.

Vielleicht kommt es dahin, dafs man die Mathematik, niedere und höhere, als eine (!) Wissenschaft auffafst und behandelt und eine Trennung für Schule und Studium nicht durch die Worte „niedere" und „höhere" eintreten läfst, sondern einfach auf der Schule den Anfang der Wissenschaft lehrt, so weit wie man eben kommen kann und in derartiger Weise, dafs der jugendliche Geist daran im möglichst gründlichen, rein logischen Denken und im möglichst vielseitigen Vorstellen sich bildet. Man wird dann nicht mehr im Unterrichte sagen: „diese Sache kann genau nur durch eine Wissenschaft entschieden werden, die zu hoch für die Schule ist", und nicht mehr in Vor-

lesungen, „es entbehre die Differentialrechnung der ganz strengen logischen und einfachen Begründung, deren sich die niedere Mathematik erfreue".

Die Teilung durch Unendlich und das Krumme.

Wenn man das Verlangen stellt, eine gerade Strecke zu halbieren und die Hälfte stets wieder zu halbieren, so kommt man auch auf das Unendlichkleine. Inwiefern solches Verlangen möglich ist und inwiefern nicht, diese Frage hat uns bereits beschäftigt. Begrifflich kann man den unendlichen Teil einer endlichen Strecke bilden, es ist aber sehr zweifelhaft und uns bereits mehrfach unwahrscheinlich geworden, dafs eine Vorstellung eines bestimmten unendlichen Teiles einer endlichen Gröfse existiert. Zwar kann man sagen und mufs es: der unendliche Teil eines Körpers sei ein Körper und nicht etwa eine Fläche (vergleiche die Abschnitte über Cavalleri!), der einer Fläche sei eine Fläche, der einer Linie eine Linie. Und zwar deshalb kann man das begrifflich finden, weil thatsächlich z. B. die Linie zunächst beliebig weit immer wieder geteilt werden kann und dann, freilich ohne Übergang, auch so, dafs die Teilchen unendlichklein sind und doch immer jeder die Hälfte eines anderen unendlichkleinen; dabei ist das, was man sich vorstellt, immer noch eine Linie.

Ganz besondere Schwierigkeiten bieten sich bei der krummen Linie. Mufs man sagen, der unendliche Teil eines endlichen krummen Linienstückes sei krumm? Oder kann man etwa behaupten, er sei gerade? Hier soll es sich zunächst nur um solches „kann" handeln.

Es ist eine Thatsache, dafs bei Betrachtung eines immer kürzeren Teiles einer krummen Linie z. B. eines Kreises die Vorstellung ihrer Krümmung — was diese auch sein mag — mehr und mehr zu schwinden scheint und uns das kleine Stück mehr und mehr geradlinig vorkommt. Freilich wissen wir, dafs, wenn wir genau zusehen, also das Stück z. B. sinnlich wahrnehmen, doch immer noch eine Krümmung wahrzunehmen ist. Ebenso scheint uns ein beliebiges endliches etwa 3 cm langes Stück eines Kreises mit immer gröfserem Radius immer mehr sich der Geraden zu nähern. Freilich auch hier wird man sich sinnlich zu überzeugen versuchen, ob eine uns hingezeichnete Strecke, die, wie uns gesagt wird, ein Stückchen eines sehr grofsen Kreises sein soll, nicht doch krumm aussieht. Man wird dann verlangen ein gröfseres Stück zu sehen, wird sich vom Papiere entfernen, um besseren Überblick über das grofse Stück zu gewinnen, und denkt dann leichter zu merken, ob es krumm ist. Kurz, es

kommt offenbar darauf an ein solches Stück anzublicken, bei dem wir schon nahezu ein kreisartiges Bild haben, bei dem wir schon einigermafsen uns die Gröfse des Radius zugleich mit vorstellen können. Es scheint so, als wäre zur Entscheidung des Krummen oder Geraden das Verhältnis eines betrachteten Stückes zum Radius von Wichtigkeit. Wird der Radius unendlichgrofs, so ist nach unserer Vermutung ein bestimmtes Verhältnis desselben zu einem endlichen Stücke der Peripherie nicht mehr angebbar, und dann, so scheint es, könnten wir auch nicht mehr zwischen krumm und gerade unterscheiden. Es weist dies immer wieder auf die Frage hin, ob überhaupt der unendliche Teil von irgend etwas oder das Verhältnis von Endlichem zu Unendlichem oder überhaupt etwas Unendliches ganz für sich vorgestellt werden kann — eine metaphysische Frage, die uns später beschäftigen wird. Machen wir erst noch einige ganz allgemeine Betrachtungen über den unendlichen Teil.

Der unendliche Teil eines Stückes Kreide braucht keine Kreide mehr zu sein (man denke an die Atome des Molekels $Ca_2\ CO_3$!). Angenommen, man wüfste das Gewicht eines Molekels von Kreide, so würde irgend ein endlicher Teil dieses Gewichtes nicht immer das Gewicht von Kreide zu sein brauchen, sondern etwa dasjenige eines Atomes Calcium, das in jenem Molekel steckt. Es soll natürlich hier keineswegs etwas darüber gesagt sein, ob man sich Atome oder Molekel unendlichklein, endlich oder überhaupt irgendwie grofs vorzustellen habe.

Ein blofser Sammelbegriff gewisser Eigenschaften, der nicht räumlich ausgedehnt gedacht wird, braucht nicht das Wesen einer einzelnen dieser Eigenschaften zu haben. Der Teil von Unsinn oder Widerspruch braucht kein Unsinn zu sein, sondern kann ein vernünftiges Urteil sein. Der Teil von Bürgerschaft kann ein Bürger sein oder besser Bürgerschaft ist ein Sammelbegriff für die Bürger; der einzelne Bürger verdient nicht mehr die Bezeichnung Bürgerschaft. So könnte ja der unendliche Teil einer endlichen krummen Linie etwas andersartiges sein, nicht etwas vollkommen davon verschiedenes, aber doch nicht gerade etwas Krummes. Freilich wäre es auch hierbei dann besser, nicht zu sagen „Teil", sondern nur zu sagen, man kann sich vorstellen, das Krumme sei ein Sammelbegriff für gerade unendlichkleine Strecken unter gewissen Umständen. In der That fühlt man etwas Unrichtiges heraus, wenn man das Unendlichkleine für einen Teil des Endlichen ausgeben will.

Der unendlichkleine Teil einer Linie ist zwar begrifflich eine Linie, aber derjenige einer krummen braucht keine krumme zu sein, aufser

wenn man ganz bestimmt weifs, dafs man eine endliche krumme Linie wirklich in das Unendliche wieder in krumme Teile zerlegen kann. Nun kann man einen Kreis sicher in zwei, vier usw. Stücke teilen und dies so weit fortsetzen, wie man will d. h. so weit man mit endlichen Zahlen gehen will. Wir wissen längst, dafs beliebigweit nicht dasselbe wie unendlichweit ist. Es könnte sein, dafs jemand beliebigweit weiter zählen könnte, ohne doch für den Begriff „Unendlich" eine Vorstellung zu haben. Es gehört noch etwas Besonderes dazu, wenn man mit dem Fortfahren des Teilens plötzlich inne hält und nicht blofs sagt, man hätte ja auch fortfahren können, sondern sagt, man solle in Gedanken sofort das fassen, was man „unendlich fortfahren" nennt.

Es kann also die Kreislinie oder die Kugeloberfläche beliebig oft geteilt immer noch etwas Krummes liefern, aber vielleicht, ins Unendliche geteilt, keine krummen Elemente mehr. Es könnte sein, dafs etwa gerade oder ebene Elemente, welche das Krumme zusammensetzen, derartig konstituiert würden, dafs sie dann einen Begriff bilden, den sie allein nicht darstellen, und zwar, dafs unendlichviele davon zusammen erst das ausmachen, was man krumm nennt, oder auch unter anderen Umständen das, was wir gerade nennen.

Ebenso wären möglicherweise endliche Strecken, unendlichmal zusammengesetzt gedacht, eine im Unendlichen krumme Linie oder auch, bei anderen Umständen, eine im Unendlichen gerade. Im ersteren Falle könnten sie vielleicht auch einen unendlichgrofsen Kreis bilden, obgleich die bestimmten Teile des Unendlichgrofsen, also ein unendlichgrofser Teil des unendlichgrofsen Kreises, jedenfalls etwas Krummes wären.

Auf einer Kugel giebt es zu jedem Punkte einen genau entgegengesetzten (Pole bei der Erde) und zwischen zwei solchen lassen sich unendlichviele kürzeste, auf der Fläche liegende Verbindungen vorstellen (gröfste Kreise; zickzackartige oder schlangenartige Verbindungen sind gröfser). Wenn nun die Kugel unendlichgrofs vorgestellt wird, so wären zwar alle in das Unendliche hineingehörenden Linien auf derselben krumm (z. B. zwischen zwei unendlichfernen Polen gäbe es immer noch unendlichviele kürzeste Kreislinien und nicht etwa gäbe es plötzlich zwischen ihnen unendlichviele gerade Linien — zwischen zwei Punkten giebt es auch dann nur eine Gerade. Aber ein endlicher Teil einer solchen Kreislinie könnte als gerade angesehen werden, ja vielleicht bestimmt für gerade erklärt werden. Nur dieses „könnte" soll hier festgestellt werden, nicht, ob es etwa so sein mufs. Krumm und Gerade würden also, wie es scheint, nicht an sich einen

Sinn haben, sondern nur durch besondere Umstände. Die Beschreibung solcher Umstände behalten wir uns noch vor, wissen aber jetzt für künftig, dafs der Ausdruck: „der unendliche Teil des Krummen kann gerade sein" kein Widerspruch in sich selbst ist.

Das Tangentenradiendreieck. Die unendlichkleine Gebrochene. Das wesenswichtige Dreieck.

In einem früheren Abschnitte entschieden wir uns dafür zu sagen, eine Tangente sei eine Gerade, die durch zwei unendlichnahe Punkte einer Kurve gehe, und sahen auch, dafs diese Definition für alle Kurven nötig war, obgleich man beim Kreise die Tangente auch als das Lot im Endpunkte eines Halbmessers definieren könnte.

Geht durch die unendlichnahen Punkte A und B (Figur 11) des Kreises mit endlichem Radius AM oder BM eine Tangente, ist also die eine Dimension AM oder BM mit der Weitenvorstellung des Endlichen, die andere AB mit der des Unendlichen behaftet, so ist Winkel M unendlichklein, Winkel A und B aber sind je $90^0 - \delta$ oder dem Endlichen gegenüber als Rechte zu behandeln.

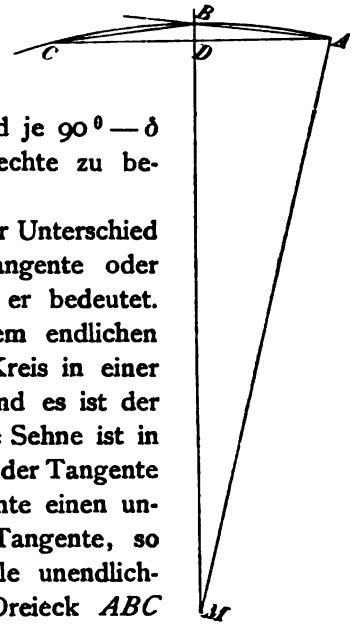


Fig. 11.

Es fragt sich nun, ob ein deutlicher Unterschied zwischen einer durch A gehenden Tangente oder Sekante stets vorhanden ist und was er bedeutet. Geht durch A eine Sekante unter einem endlichen Winkel mit AB, so scheidet sie den Kreis in einer endlichen Entfernung von A oder B, und es ist der Unterschied zur Tangente klar, denn die Sehne ist in ihrer Dimension endlich, während sie bei der Tangente unendlichklein ist. Bildet aber die Sekante einen unendlichkleinen Winkel BAC mit der Tangente, so sind die Strecken AB, BC und AC alle unendlichklein, aufserdem gehört aber dem Dreieck ABC eine gemischte Weitenbehaftung zu. Es ist die Höhe (sie möge heifsen BD und fällt mit BM zusammen) unendlichklein von zweiter Ordnung, da Winkel α und γ und die Seiten unendlichklein sind. (Man denke sich zuerst ohne Rücksicht auf den Kreis α als endlich, aber die drei Seiten unendlichklein, also $BD \perp AD$ unendlich klein. Nun lasse man α undlichklein werden, während AB und AD unendlichklein bleiben; wie wird BD?)

Die um einen unendlichkleinen Winkel gebrochene Linie *ABC* ist in Beziehung auf endliche und unendlichkleine Gröfsen ersten Grades als gerade zu betrachten, in Beziehung auf unendlichkleine Gröfsen zweiten Grades (wie *BD*) aber als gebrochen. Freilich ist es auch im Endlichen nur insofern gestattet sie als unendlichkleines Stück einer Geraden anzusehen, als man eine Dimension berücksichtigt; fügt man hinzu, dafs in der zweiten Dimension eine unendlichkleine Abweichung (zweiten Grades) stattfindet, so darf man *ABC* nicht mehr als Gerade innerhalb der zweidimensionalen Ebene ansehen (gegenüber unendlichkleinen Gebilden zweiten Grades innerhalb der zweiten Dimension),

Man fragt unwillkürlich: wie ist es möglich, dafs ein und dasselbe einmal als Gerade, das andere Mal als gebrochen angesehen werden kann? Ist dies Ansehen nur eine Willkür? Liegt es nur an unserer Auffassungsweise? Das wäre doch sehr eigentümlich, da die geometrischen Gebilde doch allesamt nur Gröfsen sind, die wir anschauen, die wir durch unsere Anschauung kennen. Ein räumlich ausdehnungsloser Punkt, eine Linie von keiner Breite, eine Ebene ohne Dicke findet sich sicherlich nicht als objektiv-selbständig in der dreidimensionalen Natur (wenn man diese objektiv selbständig nennt). Dann bleibt nichts weiter übrig als folgende vorläufig aufgestellte Sätze.

Der Unterschied einer gebrochenen und nichtgebrochenen Linie existiert nur, insofern man eine zweite Dimension gleichzeitig mitvorstellt.

Eine Linie wie die obige *ABC*, die beziehlich der einen Dimension mit der Weitenbehaftung des Unendlichkleinen erster Ordnung vorgestellt wird, existiert für die unendlichkleine Weitenbehaftung erster Ordnung in beiden Dimensionen nicht als gebrochen, sobald in der zweiten Dimension nur unendlichkleine Gröfsen zweiter Ordnung (infolge einer Knickung um einen unendlichkleinen Winkel) entstehen. Stellt man sich den Winkel *BAC* endlich vor, so wird $\sin \alpha = h/\delta$, also h auch unendlichklein, also *BD* unendlichklein erster Ordnung, und es ist alsdann *ABC* gebrochen innerhalb der Ebene bei unendlichkleiner zweidimensionaler Weitenbehaftung.

Im Allgemeinen ist eine Linie *ABC* dann gebrochen, wenn die Bruchstücke derselben Weitenbehaftung angehören wie die in der zweiten Dimension liegende Höhe des entstehenden Dreiecks; dann aber gerade beziehlich der mit derselben Weitenvorstellung behafteten zwei Dimensionen der Ebene, wenn ein Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung (unendlichkleinem Winkel) entsteht.

Wir sagten jetzt nicht mehr, es werde die Linie als gerade oder gebrochen angesehen beziehlich gewisser Weitenbehaftungen in verschiedenen Dimensionen, sondern es sei dieselbe gebrochen oder gerade, sprachen also damit aus, es könne der Begriff des Geradeseins oder Gebrochenseins überhaupt nur mit Hilfe solcher Vergleichung in zwei Dimensionen bestehen! Zwar wollen wir das Gesagte noch nicht als einen Beweis für das Wesen des Gebrochenen ansehen, sondern uns später allgemein mit dem Wesen beschäftigen; aber doch erscheint es schon hier, als würde durch solche Wesenserklärung das höchst auffällige Schwanken in der Auffassung vermieden.

Man könnte die Dreiecke *ABC* oder *ABM* und *BCM* gleichzeitig mit *ACM* „charakteristisch" für das Wesen des Gebrochenen nennen, weil sie die Definition des Gebrochenen in gewisser Beziehung hindern, falls sie gemischte Weitenbehaftung haben, aber die Definition zu stande bringen, falls dies nicht der Fall ist. Da aber nach Barrow und Leibnitz in der Mathematik diese Bezeichnung für ein anderes Dreieck (mit unendlichkleinen Seiten und endlichen Winkeln — siehe später!) gebräuchlich ist, will ich lieber jenes Dreieck *ABC*, auf welches es vornehmlich ankommt, das wesenswichtige Dreieck nennen. Der Satz lautet demnach:

Hat ein Dreieck gemischte Weitenbehaftung, so bilden zwei Seiten desselben keine gebrochene Linie innerhalb der Ebene für gleiche Weitenbehaftung beider Dimensionen.

Wenden wir unsere Aufmerksamkeit wieder der krummen Linie zu, welche zwischen *AB* und *BC* verläuft. Es seien jene Punkte wieder alle drei unendlichnahe und man definiere die Tangente als eine Gerade, die mit der Kurve zwei unendlichnahe Punkte gemeinsam hat, so mufs man schliefsen, es wäre sowohl *BA* wie *BC* eine durch *B* gehende Tangente und sowohl *AB* wie *AC* eine durch *A* gehende. Dann hätten wir zwei Tangenten an einer Kurve in derselben Stelle oder gar noch mehr, da man im Punkte *A* und *BA* unzählig viele unendlichkleine Winkel antragen kann. Es sieht so aus, als würde damit der Begriff der Tangente ebenso wie der Begriff der Krümmung an dieser Stelle ein ganz verschwommener. Um dem zu entgehen, hat man wohl versucht, sich mit dem Ausdrucke „benachbarte Punkte" zu helfen (z. B. Liersemann). Punkte, die aneinanderstofsen und die Linie zusammensetzen, kann es nach unseren bisherigen Untersuchungen über Punkte nicht geben, der Punkt hat keine Ausdehnung, oder man müfste ihn für einen kleinen Kreis halten, der aber als solcher wieder unzählig viele Punkte haben würde. Will man aber mit dem Worte einfach verbieten sich aufser zwei un-

endlichnahen Punkten andere in dieser unendlichkleinen Gegend vorzustellen, so wäre die Unbestimmtheit der Lage dieser Punkte geradeso wie sie vorhanden ist, wenn man sagt, es seien unendlichviele unendlichnahe Punkte da, von denen man irgend zwei heraussucht. Die „benachbarten Punkte" sind keine Erleichterung, bringen aber neue Schwierigkeiten mit sich, die ihren Wert völlig in Frage stellen. Wer den Ausdruck gebraucht, ist schuldig genau zu sagen, was „benachbart" heifsen soll und zwar so, dafs die dann genannte Definition auch dem Begriffe „Punkt" nicht widerspricht.

Die eigentümliche Verschwommenheit oder Unbestimmtheit, die sich oben bei dem wesenswichtigen Dreiecke zeigt, ist nichts in sich Widerspruchsvolles, vielleicht gehört sie gerade zum Wesen der Sache, vielleicht finden wir auch später, dafs sie in gewisser Weise, unter gewissen Umständen verschwindet und Bestimmtheiten Platz macht. Eine gewisse Unbestimmtheit ist kein Fehler, wenn man einsehen könnte, dafs die Sache selbst eine in gewisser Beziehung unbestimmte ist.

Die Tangente in einem Punkte. Die Tangente an einer Stelle. Vorläufige Definition von Krumm und Gerade.

Zwischen zwei unendlichnahen Punkten einer geraden oder krummen Linie liegen stets noch unbestimmt unendlichviele Punkte. Wie wir sahen, ist es inbezug auf die in beiden Dimensionen mit dem Endlichen behaftete Ebene gleichgiltig, ob man AB oder AC (Figur 11) oder sonst irgend eine der unter unendlichkleinem Winkel von einander abweichenden Geraden als Tangente definiert. Nur wenn der mit AB gebildete Winkel endlich wird, entsteht eine Sekante und nur dann schneidet diese Linie die Krumme in einem von A endlich entfernten Punkte. Man darf darum überhaupt nicht von Tangente in einem Punkte einer Kurve sprechen, falls man damit meint, es gebe nur eine Tangente, die durch diesen Punkt geht. Man darf sagen, es gehe eine Tangente durch einen Punkt, aber freilich sei damit nicht ausgeschlossen, dafs sie auch noch durch andere Punkte gehe. Will man angeben, wo eine im Endlichen (!) von allen übrigen Tangenten unterscheidbare Tangente liegt, so mufs man sprechen von Tangente an einer Stelle der Kurve und definieren Stelle durch irgend ein unendlichkleines Stück der Kurve, welches irgend einen für das Endliche angenommenen Punkt der Kurve enthält (oder mit der Vorstellung eines solchen behaftet werden kann); dies ist dann die Stelle

dieses Punktes. Also man darf sprechen von einer zu einem Punkte einer Kurve gehörigen Tangente, darf auch sagen, dafs die Tangente für die Weitenbehaftung des Endlichen (oder allgemein für diejenige Weitenbehaftung, in der die Linie als krumm vorgestellt wird) durch den betreffenden Punkt gehe, wenn auch für alle möglichen Weitenbehaftungen, also allgemein ohne Behaftungsangabe dieser Ausdruck nicht korrekt bleibt. Die Tangente BC z. B. geht nicht durch den Punkt A, und doch gehört inbezug auf die endliche Weitenbehaftung, also die endliche Kurve zu den drei Punkten ABC und überhaupt zu allen unendlichnahen Punkten einer Stelle, in der A und B liegt, nur eine Tangente der endlichen Kurve.

Die Sache sieht wie ein Widerspruch aus, doch würde derselbe sofort wegfallen, falls man das unendlichkleine Stück der im Endlichen krummen Linie als gerade (für die Weitenbehaftung des Unendlichkleinen erster Ordnung) hinstellt. Dann fiele die Tangente innerhalb dieser „Stelle" völlig mit der Kurve zusammen, oder es hätte die Tangente mit der Kurve unendlichviele unendlichnahe Punkte gemeinsam. Für das Endliche (oder überhaupt für irgend eine Weitenbehaftung der Ebene) könnte man sagen, es gehe eine Tangente durch einen Punkt einer Kurve, die gleichzeitig durch alle unendlichnahen Punkte der Kurve gehe (durch Punkte mit Entfernungen einer um einen Grad niedrigeren Weitenbehaftung). Wir werden diese Sätze noch nicht als genügend durch die bisherigen Betrachtungen festgestellt ansehen, immerhin aber erkennen wir den Vorteil solcher vorläufigen Ansicht.

Krumm könnte man nur eine Linie oder ein Stück einer Linie nennen, insofern das wesenswichtige Dreieck (Dreieck dreier Punkte der Kurve, darunter die irgendwie vorgestellten Grenzpunkte des betrachteten Stückes) dieselbe Weitenbehaftung zeigt. Zeigt es gemischte Weitenbehaftung, so ist die Linie für die dabei vorkommende Weitenbehaftung der höheren Ordnung gerade (δ heifse dabei von höherer Ordnung als δ^2 u. s. w.). Man sieht hiernach, dafs die Definition von gerade oder krumm überhaupt nur durch Hinzuziehung zweier Dimensionen möglich ist.

Tangente und Radius, insbesondere beim Kreise.

„Beim Kreise steht der Radius senkrecht auf der im Berührungspunkte gelegten Tangente" — was bedeutet dieser, gewöhnlich in der genannten Form ausgedrückte Satz? Wir werden zunächst das Wort „Berührungspunkt" nur gelten lassen können, wenn man die Vorstellung der Kreislinie nur mit solchen Punkten behaftet, die endliche Entfernungen von einander haben, werden also höchstens den Ausdruck erlauben: die Tangente, gelegt in einem Kreispunkte, der von allen anderen zugleich vorgestellten Kreispunkten endliche Entfernung hat. Besser aber erscheint es uns bereits zu sagen: irgend ein Radius des endlichen Kreises steht senkrecht auf der Tangente, die durch alle dem Endpunkte unendlichnahen Punkte des Kreises geht; oder: der Radius steht senkrecht auf demjenigen unendlichkleinen Stücke des Kreisumfanges, in dem sein Endpunkt liegt und gleichzeitig auf der dieses Stück enthaltenden Tangente.

Man wird fragen, ob es also unendlichviele, unendlichkleine Winkel miteinander bildende Radien gebe, die alle auf derselben Tangente senkrecht ständen und auch, gerechnet bis zu dem unendlichkurzen geraden Stücke des Umfanges gleich wären, oder ob man von einem Punkte, dem Mittelpunkte des Kreises nur ein Lot auf die Tangente fällen könne. Wir sahen bereits, dafs in einem Dreiecke mit einem unendlichkleinen Winkel die beiden endlichen Seiten gleich sein müssen, wie auch der Winkel sonst sein mag, und beide als senkrecht zu der unendlichkleinen dritten Seite in Beziehung auf das Endliche gelten müssen.

Wie ist das zu verstehen? Sind sie wirklich senkrecht? Kann eine Gerade auf einer anderen in Beziehung auf das Endliche senkrecht stehen, sonst aber etwa nicht genau senkrecht? Auch dieser scheinbare Widerspruch ist kein Widerspruch mehr, wenn wir uns entschliefsen zu sagen:

Senkrechtstehen bedeutet Gleichheit der beiden Nebenwinkel. Die Gröfsen derselben können mit der Weitenvorstellung des Endlichen oder auch unter Hinzuziehung einer niederen Weitenbehaftung betrachtet werden (z. B. bei unendlich geringer Abweichung von 90 °); von Gleichheit kann man bei Winkeln überhaupt nur sprechen, wenn man sie mit denselben Weitenvorstellungen behaftet. Behaftet man aber Winkel mit der endlichen Weitenvorstellung, so hat daneben ein unendlichkleiner Summand überhaupt keine Bedeutung. Spricht man also von einem Lote, das von einem Punkte auf eine Gerade gefällt ist, so mufs man zuerst unterscheiden, ob es sich dabei z. B. nur um

die Weitenbehaftung des Endlichen handeln soll; erst dadurch ist die Anschauung eines bestimmten Lotes festgestellt und nur in diesem Sinne giebt es ein Lot im Endlichen.

Der bekannte geometrische Satz mufs also lauten: Von einem Punkte kann auf eine Gerade im Endlichen (für die Weitenbehaftung des Endlichen) nur ein Lot gefällt werden. Allgemeiner: von einem Punkte kann man auf eine Gerade bei Betrachtung der Gleichheit beider Nebenwinkel unter denselben Weitenbehaftungen nur ein Lot fällen (z. B.: $90 - \delta^2 = 90 + \delta^2$ für Endliches und die Behaftung δ).

Man vergleiche damit die bekannte geometrische Konstruktion des Lotfällens und wird die Übereinstimmung mit dem Gesagten erkennen.

Der Begriff der Tangente aber ist nicht möglich ohne das Unendlichkleine der Berührung gegenüber der endlichen Weitenbehaftung des Radius. Also mufs man berücksichtigen, dafs unendlichviele vom Mittelpunkte nach einer Berührungsstelle gehende Radien untereinander unendlichkleine Winkel bilden, also Betrachtungen mit der Weitenbehaftung des Unendlichkleinen darüber anstellen; aber man mufs auch sagen, dafs sie für Figuren mit endlicher Weitenbehaftung alle zur Tangente senkrecht stehen und ein und dasselbe „Lot im Endlichen" bilden. Die hier vorkommenden Ausdrücke „gegenüber" oder „für" eine bestimmte Weitenbehaftung sind nicht Zusätze, die nach Belieben zur Vorstellung der unendlichvielen um unendlichkleine Winkel abweichenden Radien gemacht werden könnten, sondern sie bedeuten etwas Wesenswichtiges, ohne sie hat der Begriff und die Anschauung solchen Lotes keinen Sinn. Der im Anfange des Abschnittes zitierte Satz mufs also lauten:

Für alle mit der Weitenbehaftung des Endlichen versehenen Figuren steht je ein Radius senkrecht auf der Tangente, die durch seinen, von allen anderen Punkten im Endlichen unterschiedenen Endpunkt gehend vorgestellt wird. Danach kann die Tangente des Kreises als Lot im Endpunkte des Radius definiert werden. Für den genauen Begriff der Tangente bei irgend einer Kurve und für alle mit der Weitenbehaftung des Unendlichkleinen versehenen Figuren stehen auf einer Geraden in unendlichvielen unendlichnahen Punkten derselben auch unendlichviele genaue Lote. Es existieren aber für den Kreis Dreiecke mit gemischter Weitenbehaftung, sodafs in der Dimension der Tangente unendlichviele unendlichnahe Punkte unterschieden werden und entsprechend unendlichviele kleine Winkel am Mittelpunkte, sowie unendlichviele Winkel von

der Gröſse $R - \delta$ an der Tangente; für andere Behaftungen aber sind die endlichen Seiten dieser Dreiecke alle gleich und stellen den endlichen Radius des endlichen Kreises vor, der für das Endliche den Winkel 90^0 mit der Tangente bildet.

Bei genauer Betrachtung erkennt man, daſs Widersprüche nicht hierin enthalten sind, sobald man nur den Grundsatz festhält, daſs die verschiedenen Weitenbehaftungen für jede Dimension getrennt und auch hintereinander möglich sind oder gleichzeitig, aber mit genauer Unterscheidung vorgenommen werden können, oder daſs man auch auf die eine Dimension die eine Weitenbehaftung und gleichzeitig auf die andere die andere Weitenbehaftung anwenden kann.

Der Kreis mit unendlichgrossem Radius.

Wenn ich an jemanden das Verlangen stelle sich einen Kreis mit unendlichgroſsem Radius vorzustellen, so wird er ganz rasch die Vorstellung von endlichen Kreisen bilden und dann ebenfalls ganz ungemein rasch eine Vergröſserung vornehmen, bis er — allerdings plötzlich — die Vorstellung des Unendlichgroſsen erfolgen läſst. Es ist dies sehr natürlich, da man gewohnt ist sich zunächst stets das Sinnlichwahrnehmbare vorzustellen, dann solches, das wenigstens als möglicherweise sinnlichwahrnehmbar gelten könnte, um dann erst das Übersinnlichvorstellbare zu bilden. Für die Weitenbehaftung mit dem Endlichen fanden wir ein bestimmtes charakteristisches Merkmal, für das Unendliche, auch höherer Ordnungen, die Möglichkeit es durch Anlehnung aneinander oder an das Endliche in seiner Eigenart zu charakterisieren. Der Kreis mit unendlichgroſsem Radius hat allgemein vorgestellt keinen bestimmten Radius mehr, ein solcher ist bloſs vorstellbar bei Verhältnissen mehrerer unendlichgroſser Radien.

Vergleicht man die Umfänge immer gröſserer Kreise oder besser bestimmte endliche Stellen derselben, so scheint die Krümmung sich immer mehr dem Geraden zu nähern, je gröſser der Radius ist. Nun sahen wir schon, daſs eine Vorstellung von Gerade und Krumm nur durch Benutzung beider Dimensionen der Ebene möglich ist und daſs es bei der Unterscheidung auf das wesenswichtige Dreieck ankommt. Auch hier würden wir durch genaue Überlegung der Frage, wann denn eigentlich das Kreisstück gerade werde, auf dasselbe Resultat kommen. Den endlichgroſsen Bogen des unendlichen Kreises werden wir als als gerade ansehen, ja sogar behaupten, er sei (!)

gerade, indem derjenige Gegensatz, der für das Wesen des Geraden nötig sei, vorliege. Die Tangente eines endlichen Kreises kann also, soweit sie in endlicher Ausdehnung in betracht kommt (!), auch als Kreisbogen eines unendlichgroſsen Kreises angesehen werden. Wir wissen freilich nicht anzugeben, wie groſs denn eigentlich dieser endliche Kreisbogen oder diese endliche Berührungsstrecke eines solchen unendlichen Kreises mit einer Tangente des unendlichen Kreises sei. Diese Frage scheint auch nur Sinn zu haben, wenn man mehrere endliche Strecken mit einander vergleicht. Auch eine bestimmte endliche Strecke scheint nur einen Sinn zu haben, wenn sie im Verhältnisse zu einer anderen endlichen Strecke vorgestellt wird, ein Satz, der bereits an die metaphysische Erklärung einer räumlichen Gröſse heranstreift und hier noch nicht als richtig oder möglich behauptet werden soll.

Wollte man unter einer absoluten Tangente eine Gerade verstehen, die für die zweidimensionale Weitenbehaftung jeder Ordnung gerade ist, so würde dieselbe nur solange Sinn haben, als man sich wirklich solche zweidimensionale Weitenbehaftung dabei vorstellt z. B. die des Unendlichgroſsen; dann würden unendlichgroſse Kreise bei irgend welchem Radiusverhältnis mit der Tangente endliche Berührungsstrecken gemeinsam haben, ob eine oder verschiedene, in irgend welchem Verhältnis zu einanderstehende oder unbestimmte — das zu entscheiden erfordert weitere Untersuchungen. Jedenfalls ist die Berührungsstrecke irgend eines endlichen Kreises mit einer Geraden (für das Endliche Geraden oder auch für höhere Weitenbehaftungen Geraden) unbestimmt unendlichklein, die eines unendlichen Kreises unbestimmt endlich usw.

Ich kann mich nicht enthalten hier eine Stelle eines an mich gerichteten Briefes wiederzugeben, weil sie so hübsch gesagt ist. Dem Absender sind meine vorstehenden Auseinandersetzungen erst nachher mitgeteilt worden.

„Ich wollte meine gerade unendliche Stange (es war vorher gesagt worden, daſs man sich eine endliche Gerade mittels einer Stange gut vorstellen könnte) dadurch in ihrer Geradheit sichern, daſs ich sagte, sie solle nie krumm werden; denn ich will mir überall Lote auf ihr denken, und die sollen senkrecht zu ihr und untereinander parallel bleiben. Zwei Punkte dieser Geraden A und B treffen sich nun nicht wieder (wenn sie nach beiden Seiten auf der Geraden hinlaufen). Nun zeichne ich mir ein Stück der Peripherie des unendlichen Kreises. Was finde ich? Das ist ja meine mit Loten gesicherte Stange wieder, aber mit erschreckenden Prädikaten. A und B müssen einmal zu-

sammenkommen, ein Punkt eines Lotes mufs in unendlicher Entfernung auf einen auf der anderen Seite der Geraden laufenden Punkt des verlängerten Lotes treffen, der Kreismittelpunkt ist da, wo alle die Lote auf der einen Seite sich schneiden und wo sie sich auf der anderen Seite schneiden, ist er auch. Das ist ja etwas ganz Anderes, als wenn man ein (auch unendliches) Stück einer Parallelen vor sich hat! Dem unendlichkleinen Kreise bin ich gewachsen, weil er ein Punkt ist, dem unendlichgrofsen Kreise bin ich nicht gewachsen. R.... sagt in seiner englischen Geschichte zu Shakespeareschen Stücken, die Konfinien der sinnlichen und übersinnlichen Welt seien zugleich die Konfinien der Vernunft und des Wahnsinns. Sollte es wahr sein, dafs man sich in der Behandlung des Unendlichen diesen „Konfinien" nähert?..."

Hierzu will ich nur noch Folgendes bemerken, da das Übrige sich für den Leser leicht ergiebt. Ist AB gerade für jede beliebige Weitenbehaftung, so kommen die Punkte A und B in der That niemals wieder zusammen, wenn sie nach beiden Seiten auseinanderlaufen. Die Lote schneiden sich ebenfalls nicht, wenn auch sie für jede Weitenbehaftung genau rechte Winkel mit AB bilden. Haben wir aber einen unendlichen Kreis in der Vorstellung, so ist ein endliches Stück AB für die endliche Weitenbehaftung gerade. Sollen die darauf in irgend welchen Punkten errichteten geraden Radien des unendlichen Kreises sein, so schneiden sie sich im Unendlichen alle (d. h. soweit sie alle zu diesem endlichen Stücke AB gehören) im Kreismittelpunkte, für das Endliche aber schneiden sie sich nicht, oder was dasselbe ist, im Endlichen schneiden sie sich nicht. Sie sind zwar nicht Parallele nach der genauen Definition des Wortes; denn diese Definition verlangt, dafs sie sich niemals schneiden, aber sie sind für die Weitenbehaftungen mit dem Endlichen und alles, was sich darauf in angemessener Weise (nach unseren Grundsätzen) bezieht, nicht unterschieden von den Eigenschaften, welche die wirklich Parallelen im Endlichen zeigen. Sie bilden zwar untereinander unendlichkleine Winkel, aber diese sind für das Endliche nicht vorhanden, sie sind also keine Lote auf AB im allgemeinen oder für alle Weitenbehaftungen, aber für das Endliche zeigen sie dieselben Eigenschaften, welche Lote auf einer wirklich (für alle Weitenbehaftungen) geraden Linie zeigen. Sondert man derart alles genau nach Behaftungen, so verschwindet die Furchtbarkeit, weil die Widersprüche verschwinden. Jener Vergleich des Sinnlichen und Übersinnlichen mit Vernunft und Wahnsinn kann für diese mathematischen Betrachtungen wenigstens nicht mehr passen. Wahnsinn ist da, wo der Verstand mit seinen Vorstellungen und Schlüssen aus-

einanderfällt; das ist hier nicht mehr der Fall. Mag auch das Unendliche etwas Furchtbares an sich haben — wir werden uns erst viel später mit dem allgemeinen Sinne des Wortes befassen — die Furchtbarkeit ist hier sehr richtig empfunden, so lange der Verstand Widersprüche vor sich zu haben glaubt. Kann er einsehen, daſs sie durch tiefere Begründung und Erforschung sich in Richtiges auflösen — nun dann fort mit der Furcht und fort mit dem Gedanken an Wahnsinn!

Zum Problem der kürzesten Entfernung (cf. den Abschnitt über den Sinn des Satzes von der Seitensumme beim Dreiecke mit gemischter Weitenbehaftung) möchte ich Folgendes hinzufügen. Durch zwei endlich entfernte Punkte AB einer unendlichgroſsen Kugelfläche kann man unendlichviele ebene Schnitte legen, welche unendlichgroſse Kreise ausschneiden. Die endlichen Bogen AB dieser Kreise sind alle als Gerade zu betrachten, falls man in der zweiten Dimension die Weitenbehaftung des Unendlichkleinen fortläſst (Höhe des wesenswichtigen Dreiecks!). Es sind aber doch nicht unendlichviele Geraden zwischen A und B, denn für die Fortlassung von δ fallen diese Bogen vollkommen zusammen, bei Berücksichtigung von δ aber sind es keine Geraden.

Die Berührungsstrecken verschieden grosser endlicher Kreise und einer Geraden.

Berühren verschiedene groſse endliche Kreise an derselben Stelle eine Gerade, so würde man im Endlichen diese Stelle dadurch bezeichnen können, daſs es einen Punkt giebt, der gleichzeitig allen Kreisen und der Geraden angehört. Aus mehrfachen Gründen aber müssen wir, wie wir einsahen, die Vorstellung unendlichkleiner Berührungsstrecken bilden. Es kann nicht ohne weiteres angenommen werden, die Berührungsstrecke sei für alle diese Kreise gleichlang, denn sie war an sich unbestimmt unendlichklein. Es könnte aber vielleicht sein — so sollte man vorläufig denken — daſs die Berührungsstrecke des kleineren Kreises zu der eines gröſseren ein bestimmtes Verhältnis habe, sodaſs man durch den Vergleich und nur bei einem Vergleiche von verschiedenen Gröſsen der Berührungsstrecke sprechen könnte. Da die Unterschiede der Kreise im Verhältnisse ihrer Radien vorgestellt werden, so müſste auch das Verhältnis der Berührungsstrecken alsdann in irgend einer Beziehung zum Verhältnisse der Radien stehen. Das ist insofern möglich, als das Verhältnis zweier

unendlichkleiner Strecken ebensowohl eine natürliche Zahl (oder gebrochene usw.) ist, wie dasjenige von endlichen Strecken.

Wäre aber kein Verhältnis der Berührungsstrecken vorstellbar, so würde man zwar bei dem Verlangen, daſs die Kreise die Gerade berühren sollen, auf die Berührungsstrecke gelangen, man könnte aber umgekehrt von der einfach als gerade (in Beziehung auf die mit gleicher Weitenbehaftung vorgestellte Ebene) vorgestellten Berührungsstrecke aus nicht auf die Verhältnisse der endlichen Radien schlieſsen. Wir können vorläufig noch nicht entscheiden, welche Auffassung die richtige ist und ob nicht etwa noch andere Anschauungen in der Gegend der Berührung zulässig sind.

Man wird auch von der Berührung zweier Kreise untereinander sprechen wollen und auf den Gedanken kommen, ob etwa eine unendlichkleine Berührungsstrecke eines kleineren oder gröſseren Kreises vorhanden sei und dem Gröſsenverhältnisse nach zwischen der Berührungsstrecke des kleineren mit der Tangente und der des gröſseren mit der Tangente läge. Oder aber auch hierbei wären vielleicht Verhältnisse der als geradlinig aufgefaſsten Berührungsstrecken nicht vorhanden. Aber es könnte dann sein, daſs die Dreiecke mit gemischter Weitenbehaftung, deren Vorhandensein zur Vorstellung der „geraden Berührungsstrecke beziehlich der zweidimensionalen Ebene mit gleicher Weitenbehaftung“ zwingt, derartig verschieden vorzustellen seien, daſs in ihrer Beschaffenheit die Berührungsverschiedenheit liege und erkennbar sei. Die Gröſse der unendlichkleinen Winkel könnte bei verschiedenen Dreiecken verschieden sein, ferner könnten auch in demselben Dreieck vielleicht verschiedene Seitenverhältnisse je nach Art der Krümmung vorliegen. Das erfordert besondere Untersuchungen.

Die Lage der Normalen. Drei unendlichnahe Punkte eines Kreises.

Es sei zunächst wieder die Tangente eines Kreises das in dem Endpunkte eines Radius errichtete Lot, dann hieſse umgekehrt ein Radius, errichtet im Berührungspunkte der Tangente, die zugehörige Normale. Es schneiden sich demnach irgend zwei Normalen im Kreismittelpunkte. Wenn nun aber die Tangente mit der Kurve eine unendlichkleine Strecke gemeinsam hat, was ist alsdann die Normale? Sie soll jedenfalls ein Lot sein und es sollen auch zwei Normalen sich derart schneiden, daſs ein endlicher Radius von diesem Schnitte aus bis zur Kurve hin

sich erstreckt. Wo steht ein solches Lot? In einem bestimmten oder in einem beliebigen Punkte der Berührungsstrecke?

Hat das wesenswichtige Dreieck mit unendlichkleinen Seiten *ABC* (Figur 11, S. 107) gemischte Weitenbehaftung, so ist Winkel *BAC* und Winkel *BCA* unendlichklein, Höhe *BD* aber unendlichklein vom zweiten Grade. Und es sind dem Endlichen gegenüber sowohl *AM* wie *BM* wie *CM* Lote sowohl auf *AB* wie *AC* wie *BC* d. h. alle sind Lote auf der dem Endlichen gegenüber eine gerade Linie bedeutenden Strecke *ABC*. Es wären also jene drei Lote die Normale. Die Normale des endlichen Kreises ist demnach eine einzige Gerade von bestimmter Länge *CM* oder *BM* oder *AM* oder (für die Behaftung mit dem Endlichen oder δ) auch *DM*. In der analytischen Geometrie und dadurch überhaupt in der Mathematik wird allerdings als Länge der Normalen einer Kurve für einen bestimmten Punkt der Kurve ihre Länge gerechnet bis zum Schnitte mit der sogenannten *X*-Axe des Koordinatensystems. Hier soll vorläufig darunter ihre Länge bis zum Schnitt mit irgend einer anderen Normalen verstanden sein (bis wir zum Begriff des Krümmungsradius kommen).

Ebenso wie aber die Tangente der endlichen Kurve nur genau angebbar ist, wenn man in der einen Dimension die Weitenbehaftung mit dem Unendlichkleinen vornimmt, so wäre auch die zur Krümmung an der Berührungsstelle gehörige Normale nur dadurch verständlich. Man hätte danach die folgende Vorstellung mit gemischter Weitenbehaftung. Es haben für die unendliche Weitenbehaftung die Geraden *MA*, *MB*, *MC* eine derartig von einander abweichende Richtung, daſs man von ihrem Schnittpunkte *M* sprechen kann und von den Gröſsen der unendlichkleinen Strecken *CB* gegenüber *AB* oder *CD* gegenüber *AD*. Die von *M* ausgehenden Dreiecke haben gemischte Weitenbehaftung, ihre Seiten *MB*, *MA*, *MC*, *MD* haben dem Endlichen gegenüber keinen Unterschied, können ihn aber haben bei einer Weitenbehaftung niederer Ordnung. Die Strecken *CD* und *CB*, ebenso *AD* und *AB* haben für die unendlichkleine Weitenbehaftung keinen Unterschied, da die Winkel bei *A* und *C* unendlichklein und auſserdem diese Seiten unendlichklein sind, die dritte Seite *BD* aber unendlichklein vom zweiten Grade ist. Sie könnten aber vielleicht einen Unterschied haben für die Weitenbehaftung mit δ^2. Für das Unendlichkleine können ferner die von *M* ausgehenden Seiten nicht genau senkrecht auf den Seiten des wesenswichtigen Dreiecks stehen, sondern eine unendlichkleine Abweichung von einem Rechten zeigen. Man kann also sagen: Für das Endliche steht die zugehörige

Normale senkrecht in irgend einem Punkte der unendlichkleinen Berührungsstrecke.

Haben die Anfangspunkte (in der Berührung) zweier im Endlichen unterscheidbaren Normalen endliche Entfernung von einander? Nehmen wir einmal an, es bildeten die Entfernungen von drei unendlichnahen Punkten der Kurve kein Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung d. h. die Winkel CAB und BCA seien endlich, dann stellt ABC auch im Unendlichkleinen eine gebrochene Gerade vor. Es fragt sich, ob dies überhaupt möglich ist, wenn ABC ein unendlichkleines Stück eines endlichen Kreises ist. Es wären dann $MA = MB = MC$ endliche Gröfsen, also MAB wäre ein Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung, weil AB unendlichklein sein soll, also die Winkel bei M wären unendlichklein. Es wiche dann Winkel MBA nur unendlichwenig von einem Rechten ab, ebenso MDA. Also hätten Dreieck ABD zwei Winkel, die nur unendlichwenig von einem Rechten abwichen, also wäre Winkel BAD unendlichklein.

Übrigens ist dies ein Grund dafür, dafs der unendlichkleine Bogen eines endlichen Kreises als nicht blofs dem Endlichen gegenüber gerade anzusehen ist, sondern auch für die Weitenbehaftung des Unendlichkleinen ersten Grades. Anders gesagt: Drei unendlichnahe Punkte einer im Endlichen krummen Kurve bilden stets ein Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung. Es folgt, dafs die Anfangspunkte zweier für das Endliche unterscheidbaren Normalen in der That stets endliche Entfernung haben.

Mit Hilfe zweier Punkte von endlicher Entfernung kann man demnach den Schnitt der zugehörigen Normalen finden, indem man in irgend einem Punkte der unendlichkleinen Berührungsstrecken (von den beiden zu jenen Punkten gehörigen Tangenten) Lote errichtet. Es seien die Punkte P_1 und P_2 und M der Schnitt der in ihnen errichteten Lote. Errichtet man statt dessen in zwei unendlichwenig von P_1 bez. P_2 entfernten Punkten der Berührungsstrecken Lote, so haben diese unendlichkleinen Abstand von $P_1 M$ bez. $P_2 M$, folglich ist auch ihr Schnitt M_1 unendlichwenig von M entfernt, fällt also für das Endliche damit zusammen.

Für einen Kreis treffen bekanntlich sämtliche Normalen in demselben Punkte, dem Kreismittelpunkte zusammen, nicht aber für eine beliebige Kurve z. B. die Parabel. Aber man erkennt doch auch an solchen anderen Kurven, dafs die Schnittpunkte für je zwei Normalen, bei allen Punkten, die nicht sehr weit von einander liegen, auch

Schnittpunkte M_1, M_2, M_3 (Figur 12) liefern, die nicht sehr weit von einander liegen; dagegen liefern zwei Normalen wie RS und R_1S einen von den Punkten M sehr entfernten Schnittpunkt. Es scheint demnach wünschenswert zwei Normalen einer bestimmten Gegend der Kurve recht nahe bei einander zu konstruieren und damit einen Schnittpunkt für eine gewisse Stelle zu finden. Zwei Normalen RS und PM_1 haben sehr verschiedene Länge, dagegen verschwindet der Unterschied immer mehr, je näher die Berührungen der Tangenten einander liegen. Man gelangt unwillkürlich zu dem Wunsche sich Tangenten vorzustellen, die unendlichnahe bei einander liegen; dann aber hätte irgend ein Punkt der einen (der nicht gerade unendlichweit vom Berührungspunkte entfernt ist) von der anderen unendlichkleine Entfernung und es würde der Bogen zwischen ihnen gerade sein und mit jeder der beiden Tangenten zusammenfallen, d. h. die beiden Tangenten wären für das Endliche nur eine. Es bleibt aber noch der Gedanke übrig nicht durch zwei verschiedene Berührungsstrecken, sondern durch eine und dieselbe zwei unendlichnahe Normalen zu denken, die für eine niedere Weitenbehaftung und für das Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung unterscheidbar wären, aber für das Endliche nur eine Normale bestimmter Länge vorstellten. Giebt es überhaupt hierfür eine bestimmte Länge, so wäre dies für den Kreis der Radius, für eine andere Kurve würde man ihn nennen (und nennt ihn in der höheren Mathematik in der That so) den Krümmungsradius, d. h. den Radius eines Kreises, der an dieser Stelle sich der Krümmung eng anschliefst.

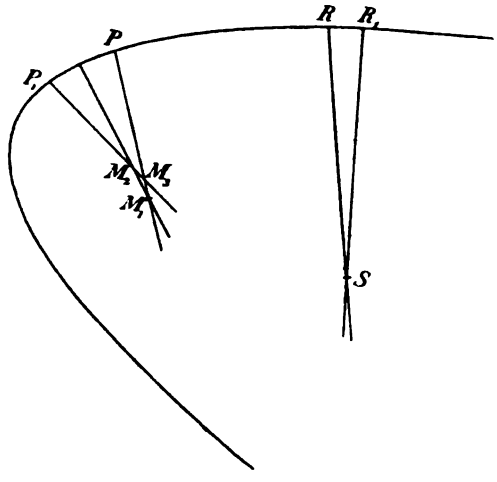


Fig. 12.

Weitere Bestimmtheit des wesenswichtigen Dreiecks.

Unendlichnahe Normalen. Anschmiegung eines Kreises an einer Stelle der Kurve.

An irgend einer Stelle einer Kurve, die für das Endliche nicht ein Kreis ist, also nirgends kreisartige Krümmung zeigt, wird auch ein

endlicher Kreis niemals in einem endlichen Bogenstück mit einem Stücke der Kurve zusammenfallen. Auch ein unendlichkleines Stück einer Kurve wird nicht mit einem unendlichkleinen Stück eines Kreises völlig zusammenfallen, so lange im Unendlichkleinen die charakteristischen Merkmale beider Arten von Krümmungen sich zeigen. Es könnte aber Anschmiegen definiert werden als ein derartiges Nahetreten oder Naheliegen beziehlich des Endlichen, dafs ein von allen anderen in endlicher Entfernung liegender Punkt beiden Kurven gemeinsam wäre, im übrigen aber doch an dieser Stelle ein sogenanntes Berühren stattfinde d. h. ein im Endlichen einfach mit diesem Worte gekennzeichnetes, im Unendlichkleinen aber noch irgendwie beschreibbares Zusammenhängen. Wir verstanden das Berühren mittels des wesenswichtigen Dreiecks, falls dasselbe mit gemischter Weitenbehaftung vorgestellt wird. Wir hatten auch insofern eine klare Vorstellung von demselben, als wir wufsten, in welchen Dimensionen es mit welchen Weitenvorstellungen verschiedener Grade behaftet war. Es waren aber dabei noch verschiedene Unbestimmtheiten geblieben, freilich immer nur beziehlich bestimmter Weitenbehaftungen. Diese waren (Figur 11):

Gröfsenunterschiede von AM, BM, CM beziehlich des Unendlichkleinen erster Ordnung;

Unendlichkleine Abweichungen von der Richtung 90^0 beziehlich AB, BC, AC.

Gröfsenunterschiede von CB und CD bez. AB und AD für das Unendlichkleine zweiter Ordnung.

Verschiedenheit der unendlichkleinen Winkel BAC und ACB, sowie des Verhältnisses $CB : AB$.

Endlich ist auch noch die Möglichkeit offen zu halten, dafs Winkel oder Seiten von ABC unendlichklein vom zweiten Grade vorgestellt werden, also BD von noch höherer Ordnung.

Wir wissen noch nicht, ob diese Unbestimmtheiten alle verschwinden werden, sobald Genügendes über die Art der Krümmung oder die Art der Berührung bei verschiedenen Krümmungen ausgesagt wird. Stellen ABC unendlichnahe Punkte eines Kreises vor, so wird genau $AM = BM = CM = r$ auch für untersinnlichvorstellbare Weitenhaftung werden, es kann aber das Verhältnis $AB : BC$ trotzdem noch beliebig sein, indem die Kreispunkte zwar unendlichkleine, aber doch beliebig unendlichkleine Entfernung von einander haben. Fällt man in beiden gleichschenkligen Dreiecken MCB und MAB die Lote von M aus, so weichen sie beziehlich der unendlichkleinen Weitenbehaftung hinsichtlich ihrer Lage von der Richtung der drei Radien ab. Man

findet also den Mittelpunkt des Kreises auch vom unendlichkleinen Bogen aus, indem man das Mittellot auf zwei beliebigen unendlichkleinen Sehnen oder auf den Seiten des wesenswichtigen Dreiecks errichtet (was mit der Konstruktion im Endlichen übereinstimmt, nur dafs alsdann das wesenswichtige Dreieck gleiche Weitenbehaftung hat. Natürlich läfst sich die Konstruktion im Unendlichkleinen, da untersinnlichvorstellbar, nur vorstellen, nicht mit sinnlichen Mitteln ausführen).

Sind nun *ABC* drei unendlichnahe Punkte einer beliebigen Kurve an einer beliebigen Stelle, so kann man stets auf diese Art den Mittelpunkt des Kreises gefunden denken, der durch jene drei geht. Dieser heifse der sich an der Stelle an die Kurve anschmiegende Kreis oder der Krümmungskreis. Die beiden Mittellote stellen zwar beziehlich des Endlichen nur eine, beziehlich des Unendlichkleinen in der Dimension *CA* zwei Normalen vor, nämlich zwei unendlich nahe.

Will man aber die endliche Gröfse seines Halbmessers oder des Krümmungsradius finden, so mufs man zunächst einsehen, dafs an verschiedenen Stellen einer beliebigen Kurve (siehe Eigur 12) der Schnitt zweier Normalen andersentfernte Punkte giebt. Wenn man nun auch noch nicht ohne weiteres von unendlichnahen Normalen an beliebigen Stellen einer beliebigen Kurve reden wird, so kann man doch von den unendlichnahen Normalen der sich daselbst an die Kurve anschmiegenden Kreise sprechen. Diese werden bis zu ihrem Schnittpunkte je nach der Kurvenstelle verschieden lang sein und verschiedene Krümmungsradien geben. In den wesenswichtigen Dreiecken müssen demnach gewisse Unbestimmtheiten Bestimmtheiten weichen, die aus der Art der Krümmung der Kurve an der betreffenden Stelle hervorgehen im Gegensatze zu der Art dieser Krümmung an anderen Stellen der Kurve und auch im Gegensatze oft zur Art der Krümmung von anderen Kurven an solcher Stelle.

Um eine solche Berechnung verstehen zu können, werden wir erst aus der analytischen Geometrie die Kunst nehmen müssen, sich eine Kurve durch Rechnungsgröfsen derart vorzustellen, dafs man auch gewisse Stellen nach Belieben rechnungsmäfsig herausgreifen kann. Dazu dienen bekanntlich das Koordinationssystem und Gleichungen mit zwei Variabelen. Wir werden uns vergegenwärtigen müssen, wie man nach dieser Darstellungsweise das Unendlichkleine, die unendlichkleinen Winkelunterschiede, das Wesen der Tangente behandelt. Die Resultate sind jedem Mathematiker bekannt. Für unseren Zweck aber ist es nötig, genau die Schwierigkeiten und etwaigen Widersprüche zu prüfen, die sich auch bei dieser Methode für das Unendliche

zeigen. Wir werden damit endlich zu den Grundlagen der höheren Mathematik gelangen, die seit Leibniz und Newton gefunden und ihren Gesetzen und Formeln nach bis zum heutigen Standpunkte hin festgelegt sind, jedoch bis auf den heutigen Tag noch ähnliche Schwierigkeiten für das Verständnis ihres Wesens bieten, wie die bereits behandelten, damit sich vielfach berührenden Probleme.

Die mögliche Ansicht, das unendlichkleine Stück des Kreisumfanges als gerade zu betrachten, und die Thatsache, dafs man einen krummen Faden zum geraden biegen kann oder auch sich solche Biegung ohne Änderung der Länge vorstellen, führt zur Vergleichung der Länge von Kreisumfang und Durchmesser, der sogenannten Rektifikation des Kreises oder der Ausmessung des Umfanges mit denselben Einheiten wie beim Durchmesser.

Vergleichung von Kreisumfang und Durchmesser.

Es ist ein sonderbares Verlangen etwas Krummes mit etwas Geradem zu vergleichen. Den Unterschied im Wesen festzustellen, erfordert äufserst schwierige Untersuchungen; wir sahen, dafs hierzu Vergleiche zweier Dimensionen nötig waren und dafs wir das Wesen des Krummen nicht erkennen können, wenn wir uns innerhalb der krummen Linie selbst in Gedanken vorwärts oder rückwärts bewegen. Die Vorstellung der Ausdehnung nach einer Dimension ist aber sowohl beim Kreisumfange wie beim Durchmesser vorhanden. Sie möchten wir zu vergleichen suchen, ohne uns — falls es möglich ist — um die Wesenverschiedenheit des Krummen und Geraden zu kümmern. Doch zeigt sich dies sofort als unmöglich. Eine Beziehung ist nur insofern vorhanden, als der Durchmesser gerade als Durchmesser dieses bestimmten, als krumme Linie hingezeichneten Kreises vorgestellt wird. Also mufs die ebene Figur und die Eigentümlichkeit des Zweidimensionalen beibehalten werden. Das bloſse Abrollen oder Ausziehen zur geraden Linie führt nicht zu einer genauen, rechnungsmäfsig scharfen Vergleichung, da wir niemals wissen, ob beim Ausziehen die Länge des physikalischen Stoffes dieselbe blieb, und wir auch kein Mittel haben jene Strecke ganz genau mechanisch durch die Einheiten des Durchmessers nachzumessen; es zeigt sich, dafs sie niemals genau, auch nicht in Bruchteilen auf dem Umfange abgezählt werden kann. Und sollte es auch einmal so aussehen, als ob irgend ein Bruchteil bis zum Ende der gerade gemachten Strecke führte, so müssen wir uns sofort sagen, dafs eine sichere Entscheidung wegen der Unsicherheit aller stofflichen Messungen nicht erfolgen kann.

Also müssen wir berücksichtigen, daſs nur unendlichkleine Stücke des krummen Kreisumfanges als gerade angesehen werden können, und zwar auch diese nur in gewissem Sinne, und müssen auf das Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung eingehen.

Dasselbe bot uns aber kein Mittel die Länge der unendlichkleinen Seite durch die Länge der endlichen auszudrücken. Vielmehr erschien uns beides der Gröſse nach unvergleichlich. Darin bestand ja gerade das Wesen des Unendlich- oder Unvergleichbar-Kleinen oder des Untersinnlichvorstellbaren. Nur wenn man unendlichviele unendlichkleine Strecken addiert, gelangt man zu einer endlichen, mit dem Durchmesser vergleichbaren Gröſse. Folglich muſs die Betrachtung so angestellt werden, daſs stets die dann folgende, beabsichtigte Summation der unendlichkleinen Strecken im Auge behalten wird. Zur Berechnung einer Dreiecksseite aus der anderen dient der Pythagoräische Lehrsatz; dessen Sinn ist für endliche, wenn auch beliebige Seitengröſsen verständlich, da Endliches mit Endlichem summiert werden kann. Zur Anwendung desselben ist man genötigt im Bestimmungsdreiecke MAC (Figur 13) die Höhe $ME = h_n$ zu fällen und zu setzen $r^2 = h_n^2 + (\frac{1}{2} s_n)^2$, wobei s_n die Seite des regulären N-Ecks sei. Oder es ist $r^2 - h_n^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2$.

Wird s_n unendlichklein, so hat es zwar für das Endliche in einem solchen Dreiecke keinen Sinn, daſs h_n und r oder ihre Quadrate um eine unendlichkleine Gröſse verschieden sein sollen (auch das Quadrat von $\frac{1}{2} s_n$ ist, wenn s_n unendlichklein, der Anschauung nach unendlichklein von derselben Ordnung, aber in zwei Dimensionen), aber wir müssen berücksichtigen, daſs schlieſslich unendlichviele unendlichkleine Gröſsen zu einem endlichen Resultate mit endlichen Einheiten zu addieren sein werden (cf. die früheren Betrachtungen über die Einheiten!). Es führt nicht zu einem Resultate, einfach alle unendlichkleinen Stücke $\frac{1}{2} s_n$ derartig auszudrücken und zu addieren. Es ist dafür wesentlich, um wieviel h_n von r abweicht. Aber dies ist nicht selbständig ausdrückbar und man erhält auf der anderen Seite der Gleichung keinen selbständigen bestimmten Summenwert.

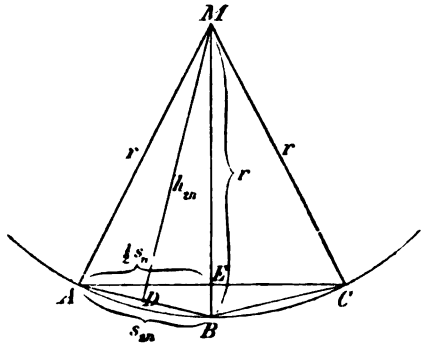


Fig. 13.

Wir müssen verfahren, wie es längst in der niederen Mathematik üblich ist, nämlich von einem Vielecke mit n Seiten auf eines mit $2n$ Seiten übergehen. Wir verstehen auch den Grund hierfür. Denn der Gegensatz des Krummen und Geraden wurde uns durch ein wesenswichtiges Dreieck wie ABC vermittelt. Wählt man $AB = BC$, so erhält man, da $MA = MB = MC$ ist, durch die Ähnlichkeit der Dreiecke ABE und MBD

$$(1)\quad s_{2n} : \tfrac{1}{2} s_n = r : h_{2n}$$

Setzt man dann nach dem Pythagoräischen Satze

$$(2)\quad h_{2n} = \sqrt{r^2 - \frac{s_{2n}^2}{4}}$$

und bildet das Produkt der Innen- und Aufsenglieder, so erhält man aus einer biquadratischen Gleichung (quadratisch für s_{2n}^2) leicht die bekannte Formel

$$(I)\quad s_{2n}^2 = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{2}}}.$$

Auf dieselbe Formel gelangt man aus Dreieck ABE durch den Pythagoräischen Lehrsatz

$$(3)\quad s_{2n}^2 = \tfrac{1}{4} s_n^2 + BE^2$$

und nochmaliger Anwendung dieses Satzes auf AEM, nämlich

$$(4)\quad BE^2 = \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)^2, \text{ also}$$

$$(II)\quad s_{2n} = \sqrt{\frac{s_{2n}^2}{4} + \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)^2}.$$

Drittens führt auch die Verdoppelung von BM bis zum entgegengesetzten Kreispunkte, der F heifse, zur selben Formel

$$(III)\quad s_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)}.$$

indem beim rechtwinkligen Dreieck FAB s_{2n} die mittlere Proportionale zwischen $2r = FB$ und $EB = r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}$ ist.

In allen Fällen wird entweder die Ähnlichkeit zweier Dreiecke und der Satz des Pythagoras oder letzterer zweimal angewendet. Bekanntlich nimmt man zunächst s_n als Seite eines bekannten regulären Vielecks, welche z. B. beim Sechseck gleich dem Radius ist, berechnet daraus s des Zwölfecks, daraus s_{24} usw. stets nach derselben Formel und bemerkt, dafs man bei der Addition aller Seiten, also bei $n \cdot s_{2n}$ einen Faktor von $2r$ erhält, der jedesmal etwas gröfser wird, aber

zuerst etwa 3,1, dann 3,14, später 3,14159 usw. zeigt, niemals aber die letzte Dezimalstelle der vorhergehenden Werte um mehr als 1 ändert z. B. niemals über 3,1416 hinausgeht. Auch zeigt man bekanntlich durch Berechnung des umschriebenen Polygons, dessen Seitensumme im Endlichen stets gröfser als der Kreisumfang ist, dafs diese π genannte Zahl stets unter gewissen Werten bleibt, die man bis auf beliebige Stellenzahl genau ausrechnen kann.

Nun ergiebt sich die schwierige Frage, ob es überhaupt eine Zahl geben kann, die sich niemals genau durch Einer und Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw. ausdrücken läfst.

Wir sahen bereits früher, dafs es ein eigentlich unerfüllbares Verlangen ist eine Strecke 1 genau auszudrücken durch $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} +$ usw. und doch giebt es die Strecke 1 im Gegensatze zu 2 oder 3 usw., ebenso wie es 9 : 10, 9 : 100.. giebt. Hier zeigt sich die Regelmäfsigkeit wie bei 0,999... und überhaupt wie bei periodischen Dezimalbrüchen freilich nicht, man nennt die Zahl π eine irrationale. Denkt man sich einen kreisförmig gebogenen Faden zur geraden Linie gestreckt, so giebt es diese Strecke $2r\pi$ jedenfalls im Vergleich zu $2 \cdot (2r\pi)$, $3 \cdot (2r\pi)$ usw. in unserer Anschauung, ohne dafs wir dabei denken, ob $2r\pi$ und π an sich oder im Gegensatze zu den Strecken wie 1 cm, 2 cm usw. existiert. Jene Vielfachen von $2r\pi$ denken wir uns als vor uns liegende Strecken mit angebbaren Verhältnissen untereinander. Man könnte dabei die Umfangsstrecke $2r\pi$ als Einheit betrachten und die anderen als 2 oder 3 etc. Einheiten ansehen. Legt man freilich die Strecken $2r$, $3r$, $4r$ daneben, so haben diese eine andere Einheit $2r$, und nun sieht man, dafs die beiden vorgestellten Streckeneinheiten $2r$ und $2r\pi$, miteinander verglichen, sich nicht durch Zahlen wie 1, 2 oder 3 etc., auch nicht durch Brüche ausdrücken lassen. Dafs dies nicht möglich ist, darüber belehrt uns jener Versuch der Kreisberechnung.

Freilich — so könnte man sagen — haben wir ja die Gröfse π als eine bestimmte Zahl nur angenommen, vielleicht giebt es dieselbe gar nicht. Nun ist es gewifs, dafs es eine andere irrationale Zahl $\sqrt{2}$ jedenfalls als gerade Strecke im Vergleich zu Strecken wie 1 giebt. Zeichnet man zwei rechtwinklig aufeinander stehende Strecken von je einem cm und verbindet ihre Endpunkte, so hat nach dem Pythagoräischen Lehrsatze diese Hypotenuse die Länge $\sqrt{2}$; denn es ist $(\sqrt{2})^2 = 1^2 + 1^2$. Wir werden schon darum nicht von vornherein die Existenz einer irrationalen Zahl abweisen. Aber während wir hier imstande waren diese irrationale Hypotenusenstrecke wenigstens durch

ein Wurzelzeichen ganz kurz hinzuschreiben, können wir dies bei der Zahl π nicht in solcher Allgemeinheit. Ein Wurzelzeichen hat nicht blofs in diesem speziellen Falle $\sqrt{2}$ eine Bedeutung, sondern wir verbinden mit allen möglichen Wurzeln wie $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ einen arithmetischen Sinn (warum, darüber sind allerdings ebenfalls Untersuchungen nötig, die bald folgen sollen), π aber sollte entstehen durch die ganz bestimmte Aufgabe der Rektifikation des Kreises. Und wir gingen oben bei der Berechnung doch vorläufig nur beliebig weit, etwa bis zum 48-Eck, nicht aber unendlichweit. Und das müssen wir doch: Beliebig ist nicht unendlich. Also fängt die eigentliche Schwierigkeit erst an; es ist nötig, s_n, ebenso wie s_{2n} als unendlichklein anzunehmen. Sind dann unsere Figuren, worauf die Berechnung beruht, und die Rechnungsformen noch richtig?

Das Dreieck *MAE* (Figur 13) enthält die endlichen Seiten *MA* und *ME*, die sich aber nur um Unendlichwenig zweiter Ordnung, nämlich *EB* unterscheiden. Der Ausdruck $r^2 - \frac{s_n^2}{4}$ hat, arithmetisch betrachtet, nur den Wert einer äufserlichen Verbindung, geometrisch aber erstrecken sich die Anzahlen seiner Einheiten auf zwei Dimensionen, in jeder hat jeder Summand Bedeutung im Verhältnis zu anderen Werten derselben Weitenbehaftung. Dafs man dafür nicht r^2 allein oder $\frac{s_n^2}{4}$ allein schreibt, geschieht nur deshalb, weil man hier den Zweck hat, Beziehungen zu anderen Gröfsen derselben Weitenbehaftungen mitzudenken, und weil durch diese Beziehungen, (Summation aller unendlichvielen Seiten) das Ganze wieder Sinn haben und schliefslich in einer Weitenbehaftung vorgestellt werden kann. Es steckt in den Formen (I) bis (III), sobald man die s-Gröfse unendlichklein, also n unendlich nimmt, gemischte Weitenbehaftung, aber $n \cdot s_{2n}$ wird eine Linie von endlicher Gröfse, vorstellbar als Linie in einer Dimension. Man kann für Formel (I) schreiben

$$n \cdot s_{2n} = n\sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}} = \sqrt{n^2 \cdot 2r^2 - n^2 \cdot 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}$$

Die linke Seite ist $\infty \cdot \delta$, also ein endlicher Ausdruck, auf der rechten Seite steht unter der Wurzel Unendlich in zwei Dimensionen (geometrisch nicht eigentlich zweiten Grades oder zweiter Ordnung, weil die Wurzel beim Pythagoras die Linienausdehnung bedeutet, während die Quadrate zwei Dimensionen angehören, ein unendlichgrofses oder ein unendlichkleines Quadrat trotz der Schreibweise $\infty \cdot \infty$ oder $\delta \cdot \delta$ geometrisch nicht in das Unendliche von höherer Ordnung vorrückt,

sondern das Unendliche derselben Ordnung in zwei Ausdehnungen vorstellt). Von diesem Unendlich ist unter der Wurzel abgezogen ein Ausdruck, der sich von Unendlich in zwei Dimensionen unterscheidet um etwas, das in einer Dimension unendlich, in der anderen unendlichklein ist. Denn es ist $r^2 - \frac{s_n^2}{4}$ „Endlich in zwei Dimensionen minus Unendlichklein in zwei Dimensionen"; die Wurzel $\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}$ stellt aber in Figur 13 die Linie ME vor, welche sich von r um EB d. h. um Unendlichkleines von zweiter Ordnung unterscheidet. Also $n^2 \cdot 2r \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}$ ist ein Glied, das in zwei Dimensionen liegen soll, weil es ein Summand in der grofsen Wurzel ist; und da nun n^2 unendlich in zwei Dimensionen bedeutet, so mufs der Subtrahendus $n^2 \cdot 2r \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}$ etwas vorstellen, dafs in beiden Dimensionen $\infty \cdot$ endlich d. h. unendlich ist, vermindert um etwas, das in einer Dimension $\infty \cdot r$, in der andern $\infty \cdot \delta^2$ d. h. unendlichklein ist, also wieder um ein zweidimensionales Gebilde von der Form ∞ (eine Dimension) $\cdot \delta$ (andere Dimension). Ein zweidimensionales Gebilde aber, das unendlichlang und unendlichklein in der Breite ist, läfst sich verwandelt denken in ein Rechteck oder Quadrat mit nur endlichen Seiten, es gehört deshalb dazu eine endliche Wurzel einer Dimension. Wenn wir die Formel für den Umfang des Kreises oder des einbeschriebenen Vielecks mit unendlichvielen Seiten andeuten wollen ohne die Formen des Pythagoräischen Lehrsatzes d. h. ohne dabei der Anschauung nach in zwei Dimensionen zu gehen, so erhalten wir, obwohl man die Wurzeln aus zwei Summanden im Dezimalsystem nicht einzeln ausziehen kann, die andeutende Form

$$\infty \cdot \delta = \infty - (\infty - a),$$

wobei a eine endliche Gröfse bezeichnet. Es ist also möglich, dafs die linke Seite in diesem Falle einen bestimmten endlichen Wert hat. Zu demselben Schlusse führt auch eine entsprechende Betrachtung der Formeln (II) und (III).

Wenn aber auch das Resultat eine Gröfse mit der Weitenbehaftung des Endlichen sein und sogar als Strecke in einer Dimension vorgestellt werden kann, darf man darum überhaupt den Ausdruck mit gemischter Weitenbehaftung (I), (II) oder (III) als an sich richtig gelten lassen? Genau genommen nicht! Wenn wir bei der Formel für s_{2n} oder auch schon für $ME = \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}$ jeden (!) Nebengedanken ausschliefsen, der auf die künftige Summierung von unendlichvielen un-

endlichkleinen Gröfsen hinweist, so hat diese Formel keinen Sinn. Wir sahen früher, dafs eine nicht genau identische Gleichung $x = a$ bereits Nebengedanken erfordert und zwar solche, die durch den Unterschied von x und a zwar angedeutet sind, aber doch innerhalb der drei Zeichen x, $=$ und a nicht geradezu ausführlich hingeschrieben sind. So darf auch die Form für *ME*, selbst für unendlichkleine Werte von s_n, als verwendbar und insofern nicht unsinnig stehen bleiben, als man stets hinzudenkt, der Sinn liege darin, dafs man die Formel an sich gar nicht gebrauchen will, sondern sie nur beibehält für beabsichtigte Summationen, bei denen auch das Unendlichkleine durch Summation von unendlichvielen unendlichkleinen Gröfsen zur Weitenbehaftung des Endlichen wieder übergeht, also neben r Sinn hat.

Unser Geist ist sehr wohl imstande aus einer umfangreicheren Vorstellung gewisse Elemente hervorzuheben, diese zu benennen oder auch durch schriftliche Zeichen auszudrücken und das nicht Ausgedrückte einfach nebenbei zu denken. Wir können sogar dies Nebenbeigedachte zeitweilig fortlassen und das, was eigentlich ohne dies Nebenbeigedachte keinen selbständigen Sinn hat, als bloſse kurze, bequeme Form so lange aufschreiben und äufserlich im Gedächtnisse behalten, bis uns zweckmäfsig erscheint es wieder zu verwenden. Dann allerdings müssen wir, wenn wir nicht in Widersprüche verfallen wollen, sofort an das Weggelassene denken und uns nicht etwa einbilden, jene kurze Form habe an sich Sinn.

Es ist aber nur zu menschlich, dafs man so etwas vergifst und z. B. denkt, die Summe aus einem endlichen und einem unendlichkleinen Summanden oder gar einem in zwei Dimensionen unendlichkleinen wie $r^2 - \frac{s_n^2}{4}$ habe für sich genommen doch einen Sinn. Dies ist um so begreiflicher, als solche Form stets einen Sinn hat, wenn wir unter s_n etwas Endliches verstehen. So werden wir denn nur zu leicht verführt den Tausch des Endlichen mit dem Unendlichen, den wir geistig ohne Schwierigkeit ausführen können, oder die Zusammenstellung der einen Weitenbehaftung mit der anderen einfach in die Form einzusetzen und uns nun ohne weitere Prüfung einzubilden, diese Form habe auch jetzt noch Sinn. In solchem Zutrauen werden wir ganz besonders bestärkt, wenn dann schliefslich nach dem „Übergange zum Endlichen" (durch Summation von unendlichvielen unendlichkleinen Gliedern, hier Polygonseiten) etwas Vernünftiges herauskommt. Es ist möglich, dafs ein Gedankenfehler durch einen anderen, gerade entsprechenden ausgeglichen wird und aus doppeltem

Irrtume des Richtige entsteht. Wir erkennen alsdann nur schwer das Vorhandensein von Irrtümern. Stofsen wir aber dann einmal durch irgend eine andere Betrachtung auf den Widerspruch, so sind wir wohl gar geneigt, im Verstande eine unerklärliche Kluft anzunehmen, statt den Doppelfehler nachzuweisen und die Harmonie des Verstandes, in dem betreffenden Falle wenigstens, aufzudecken.

Die Mathematiker haben die Schwierigkeit oft erkannt, die in der Annahme des Unendlichkleinen innerhalb eines gemischten Ausdruckes wie $r^2 - \frac{s_n^2}{4}$ entsteht; sie haben darum auf die folgende Art eine Methode gefunden (wenigstens äufserlich), die Gefahr von Fehlern im Resultate mit Sicherheit zu vermeiden. Wenigstens findet man in mathematischen Büchern sehr häufig diese Darstellung. Sie reden zuerst lieber gar nicht davon, dafs in solchem Ausdrucke eine Gröfse unendlichklein sei, nehmen sie vielmehr vorläufig als endlich an und entwickeln die Endformel zunächst nur unter der Annahme von endlichen Gröfsen (Berechnung des Umfanges eines Polygons mit n gleich beliebig- aber endlich-vielen Seiten). Nun erst ganz am Schlusse fügen sie die Bestimmung hinzu, es solle n unendlich werden; und da sie es nun erst thun, sind sie über den Doppelfehler hinweggekommen und haben gleich eine Form vor sich, bei der der Fehler nicht mehr erscheint. Sie nennen das einen Grenzübergang. Wenn auch die Zahl $2r\pi$ immer nur auf irgend eine endliche Anzahl von Dezimalstellen ausgerechnet wird, also dann nur mit dem Endlichen zu thun hat und freilich dann auch immer nur den Umfang eines regelmäfsigen Polygons mit jener endlichen Anzahl von Seiten vorstellt, so wird doch schliefslich sogleich angenommen, dafs man auch für den wirklichen Umfang der krummen Linie in dieser Form einen richtigen Ausdruck vor sich habe, sobald man n gleich unendlich setze. Und sie erklären, dafs dann dieser Ausdruck $2r\pi$ wirklich die Länge des Umfanges, z. B. abgewickelt gedacht, sei, ohne Rücksicht darauf, ob man es durch endliche Werte von Radiuseinheiten in irgend einem Zahlensystem aussprechen kann.

Diese Methode hat viel für sich, man spart dadurch die schwierige Aufdeckung der Widersprüche, man spart besondere Sätze für gemischte Weitenbehaftung und umständliche Formen hierfür, man kann kürzer sein. Aber freilich vor der genauen Überlegung kann diese Methode doch nicht Stich halten. Zwar kann man sie beibehalten, aber freilich mufs man dann durchaus verlangen, dafs es erklärt und verstanden wird, warum am Schlusse sich kein Widerspruch zeigt, während sich doch grofse Schwierigkeiten zeigen, falls man schon

vorher $n = \infty$ setzt. Man darf nicht damit kommen, daſs doch vorher n beliebig angenommen werden könne. Wenn die Rechnung richtig sein und es erlaubt sein soll schlieſslich n gleich unendlich zu setzen, so muſs in Wahrheit auch innerhalb der Rechnung schon n als unendlich hergestellt werden können. Wie sollte es sonst gestattet sein diese Setzung plötzlich vorzunehmen? Man ist schuldig, zum wenigsten ganz klar zu zeigen, weshalb bei früherer Annahme von $n = \infty$ sich Schwierigkeiten zeigen und warum diese nachher verschwunden sind. So lange es dem Mathematiker nur darauf ankommt richtige Formeln und dadurch richtige Resultate zu finden, mag er irgend welche Methoden benutzen, die ihn recht rasch zu diesem Ziele führen und die sicher ein richtiges Endresultat ergeben. Und er mag sich auch darauf berufen — wie man dies bisweilen bei den Resultaten der höheren Mathematik anführen hört — daſs sich die Sache in der Praxis z. B. der Physik als richtig bestätige. Dem Anfänger jedenfalls aber drängt sich — falls er nicht überhaupt ein bloſser Nachsprecher ist — oft der Gedanke an jene Schwierigkeiten auf. Es kann nicht jeder alles bis auf das Letzte ergründen. Die philosophischen Schwierigkeiten in der Erklärung der Grundlagen der Mathematik sind so groſs, daſs die Wissenschaft selbst darüber hinweggeschritten ist und auch darüber zeitweilig hinwegschreiten muſste, um nicht von den wichtigen Resultaten abgesperrt zu bleiben. Der Studierende ist ebenfalls nicht imstande alle Schwierigkeiten, die sich ihm bieten, zu lösen, er muſs wohl oder übel dann und wann seinen Wünschen einen Stoſs versetzen und denken: vielleicht verstehe ich es bei späterer Gelegenheit einmal besser, wenn ich wieder darauf zurückkomme. Mancher kommt dann niemals wieder ordentlich darauf zurück, verwickelt sich in wichtige Rechnungen und hat immer mehr andere Interessen. So kann es auch gar leicht geschehen, daſs er später nicht mehr sieht, was eigentlich unerklärt war, und mit den gelernten Resultaten ganz zufrieden ist. Groſse Dinge sind selbst in der Mathematik schon entdeckt worden ohne völlige logisch gründliche Aufklärung, manches ist zunächst nur vermutet und angenommen worden, um nun einer praktischen Prüfung unterzogen und dann nachträglich auch noch — je nach Gelegenheit und Neigung — begründet zu werden. Trotz alledem muſs man dabei bleiben, daſs die Mathematik als Wissenschaft die Begründung so weit treiben muſs, wie sie kann, und nicht zufrieden sein darf, wenn sie Schwierigkeiten im Texte ihrer bisherigen Begründung stehen lassen muſs.

Wir sind mit der Besprechung der Kreislänge noch nicht fertig geworden; es blieb immer noch wie eine Art Wunder vor uns liegen

die irrationale Zahl und es ist nun unsere Aufgabe das Wesen derselben weiter zu untersuchen. Dabei wollen wir uns nicht mit einer rein formellen mathematischen Erklärung begnügen wie etwa der bloſsen Form $\sqrt{2}$ als Umkehrung der Potenzform, sondern dem Wesen der Sache mittels der Frage nachspüren, ob das Irrationale eine besondere für sich bestehende geistige Vorstellung ist, und worin sein Wesen, seine Existenz als Vorstellung beruht. Wir nähern uns damit der Metaphysik, suchen aber zunächst mehr erkenntnistheoretisch zu verfahren.

Das Irrationale.

Thatsache: es ist ein Streckenverhältnis zweier Radien $2r : r$ vorstellbar mit dem Werte 2, und auſserdem das Verhältnis zweier geradlinigen (aus Kreisumfängen geradlinig gebogenen) Strecken, die heiſsen mögen „$4r\pi$" und „$2r\pi$" mit demselben Zahlenwerte 2, endlich also auch ein Streckenverhältnis wie $2r\pi : 2r$ oder $\sqrt{2} : 1$.

Es giebt also thatsächlich in der räumlichen Welt eine Art von Verhältnissen, deren Wert eine natürliche Zahl oder ein Bruch ist, und eine andere Art, deren Wert sich nicht durch eine natürliche Zahl oder einen Bruch ausdrücken läſst. Diese trotzdem durch Brüche ausdrücken zu wollen, ist ein ähnliches Begehren wie 1 ausdrücken zu wollen durch $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000}$ usw. Während man aber bei solcher Reihe aus beliebig vielen endlichen und unendlichvielen unendlichkleinen Gliedern mittels einer Umformung rückwärts zu einem genauen natürlichen Werte gelangen kann, indem $(1/n)^{\infty}$ wirklich als bedeutungslos wie Null fortgelassen werden muſs, kann man bei jenen irrationalen Zahlen niemals zu einer Form gelangen, bei der sich durch Weglassung eines unendlichkleinen Gliedes ein genauer durch natürliche Zahlen oder Brüche ausdrückbarer Wert ergäbe. Es bleiben stets bei dem Versuche, den Wert durch Dezimalzahlen anzugeben, unendlichviele unendlichkleine Glieder stehen, deren Summe man ebensowenig genau angeben kann wie die Summe aller endlichen.

Dadurch darf man sich aber nicht in Zweifel bringen lassen, ob es solche Werte überhaupt gäbe. Denn es läſst sich sowohl geometrisch $\sqrt{2}$ als Höhe auf der Hypotenuse $2 + 1$ eines rechtwinkligen Dreiecks zeichnen oder als Hypotenuse zu den Katheten 1 und 1, als auch durch Endpunkte die Länge solcher Strecken von einem Anfangspunkte aus darstellen (die Axe mit dieser Punktvorstellung behaften). Ebenso kann man allerdings nur durch gewisse Rechnungsoperationen wie Radizieren den Verhältniswert einiger irrationalen

Zahlen andeuten in einer arithmetischen Form, die eine Verwechselung mit irgend einem anderen Werte nicht zuläfst ($\sqrt{3} : \sqrt{2}$).

Man kann ebensowohl wie man eine Hypotenuse zu den Katheten 1 und 1 irrational nennt, diese selbe hingezeichnete Hypotenuse als rationale Zahl ansehen z. B. als die Längeneinheit. Dann sind die Katheten irrational; denn es folgt aus $1 = y^2 + y^2 = 2y^2$ ein Wert $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Auch der Umfang eines Kreises $2r\pi$, vorgestellt als abgewickelte gerade Strecke, kann als diese Strecke, ganz für sich betrachtet, nicht irrational genannt werden. Denn dieses Wort irrational hat hier nur einen Sinn in Beziehung auf den Radius r, den man sich zu Anfang vorstellte, nicht aber, wenn man diese Beziehung und diese Vorstellung eines rationalen Radius aufgiebt. Vielmehr ist diese so daliegende Strecke einfach als eine Einheit im Vergleiche zu vielen anderen vorstellbaren Strecken anzusehen, die Vielfache hiervon sind. Ebenso kann $2r$ für sich als eine Streckeneinheit oder auch als Vielfaches irgend einer anderen Einheit wie r oder $1/2\,r$ angesehen werden. Jene irrationale Strecke $2r\pi$ existiert als irrationale Strecke durch ihr Verhältnis zum Durchmesser.

Das Irrationale ist demnach nur als Verhältnis vorhanden; es existiert nicht eine einzige irrationale Zahl für sich.

Ich habe hiermit nicht etwa behauptet, dafs eine natürliche Zahl wie 1 oder $2r$ etwa für sich existierte; leicht möchte es sein, dafs auch diese nur Sinn hat in ihrem Verhältnisse zu einer anderen oder dafs überhaupt nur Verhältnisse von natürlichen Zahlen im Geiste mit einiger Selbständigkeit existieren können. Dies erfordert genauere Untersuchung des Wesens der Zahl, die an dieser Stelle nicht beabsichtigt ist. Es ist uns hier nur wichtig, dem Wesen der Irrationalen, das mit dem Unendlichen in irgend einer Weise zusammenhängt oder damit in Zusammenhang gebracht werden kann, nachzuspüren.

Dafs man auf irrationale Zahlen kommen kann, war eine Entdeckung im Gebiete der menschlichen Vorstellung, die man nicht so früh machte wie die der Anschauung des Endlichen und Unendlichen. Übrigens ist das Unendliche höherer Ordnung ebenfalls eine erst später gefundene geistige Thatsache.

Es fragt sich, ob jene irrationalen Zahlen oder Verhältnisse mit Notwendigkeit aus der Vorstellung der rationalen folgen, ob ein Geist, der sich natürliche Zahlen vorstellt, dadurch auch ganz von selbst, wenn auch anfangs verborgen, die Fähigkeit zur Vorstellung der irrationalen in sich tragen müsse wie eine unabweisliche logische Folge.

Damit deckt sich die Frage zum Teil, ob für einen Menschen, der sich gerade Linien und zwei Dimensionen vorstellt, auch folgerechter Weise das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser in der uns bekannten bestimmten Art sich bilden müsse. Man wird mit Ja antworten, aber nur, falls man die Fähigkeit als Thatsache anerkennt, Strecken mit dieser Art von Verhältnissen zu behaften, ähnlich wie man Linien mit der Punktvorstellung behaftet. Das Irrationale ist nicht auf jeder Linie einfach da, sonst hätte es wohl sofort geschaut werden müssen, sondern es ist eine Behaftung der einen Vorstellung mit der anderen möglich, es sind begrenzende Umstände, welche an der Linienvorstellung zur Wirkung kommen; $\sqrt{2}$ z. B. entsteht an einer Linie durch Vorstellung von zwei Dimensionen und den Pythagoras, $2r\pi$ dadurch, dafs das Krumme thatsächlich vorgestellt wird. Es ist nicht einzusehen, wieso durch blofse Vorstellung von geraden Linien in zwei Dimensionen auch schon das Krumme mitgegeben sei, vielmehr gehört hierzu eine besondere Thatsache der Anschauung, bei der allerdings ein Verhältnis von Strecken in zwei Dimensionen vorkommt. Davon habe ich zum Teil schon beim Dreiecke mit gemischter Weitenbehaftung gesprochen, z. T. mufs das Wesen des Krummen später noch weiter untersucht werden.

Berechnung des Kegelmantels.

Bekanntlich läfst sich aus einem ebenen Stücke Papier ein Kegelmantel herstellen, indem man jenes nach Art einer Tüte wickelt. Umgekehrt läfst sich der Mantel eines Kreiskegels mittels Aufschneidens in einer Seitenlinie abgewickelt vorstellen und, falls er aus biegsamem Stoffe hergestellt ist oder gedacht wird, zu einem Kreissektor abwickeln. Der Radius dieses Kreises ist s, die Seitenkante des geraden Kreiskegels, und der Umfang des Grundkreises am Kegel mit dem Radius ϱ ist hier nur ein Teil eines gröfseren Kreisumfanges. Will man den Mantel durch ϱ und s berechnen d. h. als ebenes Stück ausdrücken, so pflegt man denselben durch unendlich viele Seitenkanten zu zerlegen. Die Begrenzungen solches Teiles sind zwei Seitenkanten s, die Basis ist, solange er noch als Mantelteil am Kegel sitzt und nicht abgewickelt ist, ein unendlich kleiner Bogen eines nicht in der Ebene jener Schenkel liegenden Kreises mit dem Radius ϱ, und die Fläche solchen Stückes ist eigentlich krumm oder vielmehr ein unendlichkleiner Teil einer endlichen krummen Fläche. In der Dimension der Seitenkanten ist solche Figur endlich, in der Dimen-

sion des Umfanges $2\varrho\pi$ aber unendlichklein, also ist nach unserem Grundsatze die Basis als gerade zu betrachten. Deshalb — und nur deshalb — ist es einerlei, ob man diese Basis als unendlichkleinen Teil eines bei dem Kegel gar nicht vorkommenden, nur durch Abwickelung sich zeigenden Kreises $2s\pi$ betrachtet, da ja auch dieser Bogen gerade ist.

Aus diesen Gründen kann man jene unendlichschmale Teilfigur des Mantels als Dreieck betrachten, es ist ein Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung. Es ergiebt sich dabei als Grundsatz:

Ein in einer Dimension unendlichkleines Flächenstück einer in dieser Dimension krummen endlichen Fläche ist als eben in dieser Dimension zu betrachten.

Die Höhe in solchem Dreieck ist, solange die Basis als krumm am Kegel betrachtet wird, genau gleich s; ist die Basis aber gerade, so unterscheidet sich die Höhe in der Höhendimension um Unendliches von niederem Grade von s, also $s = h + \delta^2$ (man berücksichtige das wesenswichtige Dreieck!). Der Inhalt jenes unendlich schmalen Dreiecks wäre genau $\frac{dg}{2}(s - \delta^2) = \frac{dg}{2} \cdot s - \frac{dg}{2} \cdot \delta^2$, falls dg die unendlichkleine Grundlinie bezeichnet. Der Subtrahendus ist unendlichklein vom zweiten Grade in der Höhendimension, hat also keine Bedeutung als Summand neben dem Minuendus. Es ergiebt sich also der Inhalt $\frac{dg}{2} \cdot s$. Die Summe aller Dreiecke, einfach zusammengezählt, als ob es ebene Flächenstücke wären, ergiebt die in einer Ebene vorgestellte Gröfse des Mantels

$$\frac{dg}{2} s + \frac{dg_1}{2} s + \ldots = \frac{s}{2}(dg + dg^1 + \ldots).$$

Nun ergeben aber die unendlichvielen unendlichkleinen Stücke dg, einfach zusammengezählt, als lägen sie da wie ein ausgestreckter Kreisumfang, die endliche Summe $2\varrho\pi$. Also ist das bekannte Resultat $\varrho\pi s$.

Würde man jenes unendlichkleine Stück der Höhe s formell nicht fortlassen und dann die Formel für den Mantel ausdrücken, so käme man zu demselben Resultate und dem Grundsatze:

Eine in einer Dimension endliche (oder irgend einer Weitenbehaftung angehörige), in der anderen aber einer niederen Weitenbehaftung angehörige Fläche ist bedeutungslos als Summand neben einer in beiden Dimensionen endlichen (jener höheren Weitenbehaftung angehörigen) Fläche. Oder

In jeder Dimension für sich darf man die unendlichkleine Gröfse, wenn sie Faktor von anderer Dimension als ihre Mitfaktoren ist, im Vergleiche zu den endlichen (höherer Ordnung angehöriger) Faktoren der anderen Summanden, deren Mitfaktoren dieselbe Dimension haben wie die Mitfaktoren des ersten Summanden, gleich Null setzen,

Der Mantel des abgestumpften Kegels bietet nach dem Bisherigen sowenig Schwierigkeiten, dafs ich mich mit der Bemerkung begnüge, es könne das unendlichschmale Stück zerlegt gedacht werden in ein ebenes unendlichschmales Rechteck (ein Rechteck mit gemischter Weitenbehaftung) und ein derartig behaftetes Dreieck.

Die Berechnung der Kugeloberfläche durch ebene Einheiten.

Leicht ist es die Fläche des Kreises als $r^2\pi$ zu finden, wenn man die Enden des unendlichkleinen, als gerade betrachteten Stückes vom Umfang mit dem Mittelpunkte verbindet und den Inhalt $s_n \cdot \frac{h}{2}$ als $s_n \frac{r}{2}$ ansieht; das hierbei die Höhe gleich r gesetzt ist, ist in Bezug auf die Dimension des Radius richtig, die hier mit endlicher Weitenvorstellung behaftet wird, während in Richtung der Basis im Einzeldreiecke unendlichkleine Weitenbehaftung stattfindet. Man addiert $F = s_n \frac{r}{2} + s_n \frac{r}{2} + \ldots = \frac{r}{2} \cdot (2r\pi) = r^2\pi$. Bei dieser Addition ist die Behaftung mit dem Unendlichkleinen in der Dimension der Kreislinie vertauscht worden mit der des Endlichen nach dem Grundsatze $\infty \cdot \delta = a$.

Die Berechnung der Kugeloberfläche stützt sich auf diejenige des Kreises. Irgend ein ebener Schnitt schneidet eine Kreislinie heraus. Niemals kann man (trotz des Cavallerischen Prinzipes — siehe später!) aus ebenen Gebilden durch Zusammenaddieren körperliche erhalten. Also mufs man nicht die sämtlichen durch parallele ebene Schnitte herausgeschnittenen Kreislinien summieren, denn diese Summation in der dritten Dimension von etwas, was in dieser Dimension überhaupt keine Ausdehnung hat, führt stets nur auf Null; sondern man mufs sich ein unendlichschmales Band vorstellen, das durch zwei unendlichnahe parallele Ebenen aus der Kugelfläche herausgeschnitten wird. Dafs man aber überhaupt das Unendlichkleine benutzen mufs, liegt daran, dafs die Kugel auch in dieser dritten Dimension krumm ist. Hier ist wieder eine solche Stelle, wo die niedere Mathematik

das Unendliche nicht entbehren kann, und im engsten Zusammenhange mit der höheren steht.

Es seien (Figur 14) die ebenen Schnitte durch AB und CD (Kreisdurchmesser in der Ebene senkrecht zur Papierebene), die dritte Dimension durch das Lot ME angedeutet.

Ist nun AC oder EF oder DB unendlichklein, so sind für die Weitenbehaftung mit dem Endlichen CD und AB gleich (genannt 2ϱ), für die dritte Dimension aber nicht. Die Stelle, an der die Schnitte stattfinden, mufs eine bestimmte sein, denn an einer im Endlichen davon unterscheidbaren Stelle haben die Radien des Durchschnittkreises eine andere, um ein Endliches von jenen ϱ abweichende Gröfse. Die Stelle mufs durch FM oder EM angedeutet und das Verhältnis zur Länge des Kugelradius $r = CM = AM$ benutzt werden. In Bezug auf die dritte Dimension ist AC nicht dasselbe wie EF, diese unendlichkleinen Gröfsen stehen in einem bestimmten Verhältnisse, das von der Stelle oder dem Winkel CAB abhängt. Der Kreisbogen AC ist für das Endliche oder auch Unendlichkleine als gerade zu betrachten (siehe früher!)

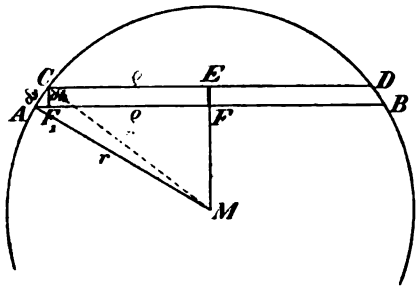


Fig 14.

Man lege $CF_1 \parallel EF$. Es hängt nun sowohl das Verhältnis $AC : CF_1 = ds : dh$ wie auch das Verhältnis $r : \varrho$ von der Stelle des Schnittes ab. Diese Thatsache des „sowohl" findet ihren notwendigen Ausdruck durch die Gleichung $ds : dh = r : \varrho$ oder $ds = \frac{r.dh}{\varrho}$.

Dabei verschwindet der unendlichkleine Winkel CMA völlig gegenüber dem endlichen CME, so dafs es einerlei ist, ob man Dreieck CME oder AMF wählt. Bei der Proportion ist vorausgesetzt, dafs dh senkrecht auf ϱ steht, was keine besonderen Schwierigkeiten bietet, und dafs ds senkrecht zu r steht. Letzteres ist nur deshalb richtig, weil ACM ein Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung vorstellt. Auch hier können wir in Wahrheit solche Dreiecke nicht entbehren, wenn auch in den Büchern bei der Ableitung der Kugeloberfläche davon keine Rede zu sein pflegt. Auch wird hierbei ganz stillschweigend benutzt, dafs von irgend einem Kreispunkte zwischen A und C, der mit AC ein Dreieck gemischter Weitenbehaftung (wesenswichtiges Dreieck) geben würde, eine Höhe auf AC zu fällen

wäre, die unendlichklein von zweiter Ordnung ist, also neben dem Endlichen und Unendlichkleinen erster Ordnung in derselben Dimension gerechnet, verschwindet (ich gebrauche das Wort „verschwinden" hier wie bisweilen an anderen Stellen einfach für „keine Bedeutung haben", es soll dabei nicht auf das Wesen der Bewegung, des Werdens und Vergehens Rücksicht genommen werden). Das wir ein unendlichkleines Stück des Krummen als eben betrachten, ist also hier in derselben Art wie früher erklärbar, und die Krümmung auf dem in der Figur gezeichneten Kreise wird in sofern benutzt, als stets r von M aus nach jedem Punkte derselbe Radius ist und zweitens die Proportion $ds : dh = r : \varrho$ bestehen bleibt.

Das durch die beiden Ebenen aus der Kugeloberfläche ausgeschnittene Band ist nach zwei Dimensionen hin krumm, kann deshalb nicht einfach im Ganzen als ebenes Trapez angesehen werden, sondern man mufs sich vorstellen, es bestehe aus ebenen, nach beiden Dimensionen hin unendlichkleinen Trapezen. Darin liegt der Grundsatz

Das nach beiden Dimensionen hin unendlichkleine Stück einer krummen Fläche ist als ebenes Flächenstück zu betrachten.

Heissen die gegenüberliegenden parallelen Seiten eines solchen Trapezes dg_1 und dg_2 (unendlichkleine Teile der Schnittkreise), so ist der Inhalt $\frac{dg_1 + dg_2}{2} \cdot ds$. Summiert man die sämtlichen so, als ob sie in derselben Ebene lägen (d. h. will man versuchen die Oberfläche mit ebenen Flächeneinheiten zu vergleichen), so erhält man

$$\frac{dg_1 + dg_2}{2} ds + \frac{dg'_1 + dg'_2}{2} ds + \ldots = \frac{ds}{2} (dg_1 + dg'_1 + \ldots + dg_2 + dg'_2 + \ldots)$$

$$= ds \, \frac{2\varrho_1 \pi + 2\varrho_2 \pi}{2} = ds \cdot \pi (\varrho_1 + \varrho_2).$$

Das Resultat, in einer Ebene vorgestellt, ist ein Trapez mit gemischter Seitenbehaftung. Es sind aber $2\varrho_1\pi$ und $2\varrho_2\pi$ nur um unendlichwenig verschieden oder, falls man nur ihre Dimension in der Weitenbehaftung des Endlichen berücksichtigt, gar nicht verschieden. Also ist in dieser Dimension nach der Summierung (nicht vorher, weil damals dg_1 und dg_2 unendlichklein waren) $\varrho_1 + \varrho_2 = 2\varrho$, mithin ist das Band $2\varrho\pi \cdot ds$ oder ein Rechteck mit gemischter Weitenbehaftung.

Daran läfst sich folgende Bemerkung knüpfen: Sind die parallelen Seiten eines endlichen Trapezes um Unendlichwenig verschieden, so sind sie für das endliche Trapez gleich. Ebenso verschwindet auch in einem unendlichkleinen Trapeze solcher Art die Differenz der

parallelen Seiten gegenüber den unendlichkleinen Seiten des Trapezes. Die Art, wie wir die Stücken addieren, führt auf den Satz: Die Summe von unendlichvielen unendlichkleinen ebenen Elementen kann man solange der Berechnung nach wieder als eben ansehen, als nicht ein Verhältnis zu einem Stücke einer anderen Dimension zur Anschauung des Krummen führt.

Zur Formel für die Kugeloberfläche gelangen wir endlich auf folgendem Wege. Es war $ds = \frac{r\,dh}{\varrho}$, mithin ist das Band $2\varrho\pi \cdot \frac{r\,dh}{\varrho}$ oder $2r\pi \cdot dh$. Die unendlichvielen Bänder, entstanden durch unendlichviele Schnitte, geben zusammen die Kugeloberfläche. Die Form für dieselbe ist also $2r\pi\,(dh + dh_1 + dh_2 + \ldots)$. die sämtlichen unendlichvielen dh-Gröfsen ergeben aber die endliche Summe $2r$, in der durch ME in Figur 14 angedeuteten Dimension, also hat die Kugel die als eben ausgemessene oder aus unendlichvielen unendlichkleinen, als eben betrachteten Stücken zusammengesetzte endliche Oberfläche $4r^2\pi$.

Berechnung des Kugelinhaltes aus der Oberfläche und umgekehrt.

Hat man einmal $O = 4r^2\pi$ gefunden, so ist es nicht schwer, daraus den Kugelinhalt zu ermitteln. Man denke sich die Oberfläche in unendlichkleine Flächenstücke zerschnitten und jedes mit dem Kugelmittelpunkte verbunden; dann entstehen unendlichviele Pyramiden. Nun mufs man freilich wissen, das der Inhalt einer Pyramide das Produkt aus Grundfläche und Höhe, dividiert durch 3, ist. Die Ableitung dieser Formel enthält wieder bedeutende Schwierigkeiten, da hierzu der Satz nötig ist: Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind inhaltsgleich. Auf den Beweis dieses Satzes werde ich sogleich kommen. Hat man denselben einmal bewiesen, so stellt man sich jene unendlichdünnen Pyramiden mit endlichen Höhen vor, und dies ist möglich, weil man im stande ist in einer Dimension, der des Radius, sich eine endliche Gröfse, in den beiden anderen, denen der Grundflächen, zugleich unendlichkleine Ausdehnung vorzustellen (die Dimensionen damit zu behaften). Zugleich wendet man wieder die in den vorigen Abschnitten aufgestellten Grundsätze darüber an, dafs man das unendlichkleine Stück einer krummen Fläche als eben betrachten darf usw. Addiert man nun sämtliche Pyramiden — eine Operation der Vorstellung, die nur insofern möglich ist, als man dabei die unendlichvielen unendlichkleinen Flächen-

stücke für sich addiert und ihre Summe alsdann mit dem gemeinsamen endlichen Faktor r multipliziert — so ergiebt sich aus der Anschauung als Thatsache, dafs die Summen jener unendlichkleinen Gröfsen eine endliche, nämlich die Kugeloberfläche ist, deren Inhalt, ausgedrückt durch ebene Einheiten, man kennt. Also ist der Kugelinhalt

$$\frac{r}{3}(f_1 + f_2 + \ldots) = \frac{r}{3} \cdot O = \frac{r}{3} \cdot 4r^2\pi = \frac{4}{3} r^3\pi.$$

Wäre nun umgekehrt der Kugelinhalt durch irgendwelche Betrachtung bekannt, so kann man daraus ohne gröfsere Schwierigkeiten die Kugeloberfläche finden. Es ist nämlich dann wieder, falls f die unendlichkleinen Grundflächen bedeutet

$$V = f_1 \cdot \frac{h}{3} + f_2 \frac{h}{3} + \ldots = \frac{h}{3}(f_1 + f_2 + \ldots)$$

und da nun h nur um unendlichwenig von r abweicht, so ist

$$V = \frac{r - \delta}{3} \cdot O = \frac{r}{3} O - \frac{\delta}{3} O.$$

Der Subtrahendus ist unendlichklein, verschwindet also neben dem Minuendus, weil die Summe der vielen unendlichkleinen Grundflächen endlich ist, aber der Grundsatz besteht:

Eine endliche Gröfse multipliziert mit einer unendlichkleinen ist stets unendlichklein.

Freilich gehört hier δ einer anderen Dimension an als die Oberfläche, aber auch r und die Oberfläche gehören anderen Dimensionen an. Der Grundsatz geht also in diesem Falle daraus hervor, dafs $r - \delta$ den Wert r hat, wenn es nur mit endlichen Gröfsen verglichen wird.

Entweder man mufs die Kugeloberfläche selbständig oder man mufs den Kugelinhalt selbständig zu finden suchen, dann kann man in der eben gezeigten Art das andere finden. In vielen Büchern zieht man vor den Kugelinhalt selbständig abzuleiten und jene Ableitung der Kugeloberfläche fortzulassen. Wenn wir uns aber auch für die Kugel mit der Ableitung der Oberfläche begnügen und den Inhalt nachher daraus suchen wollten, so müfsten wir doch von einem Prinzipe sprechen, das man bei der selbständigen Ableitung des Kugelinhalts anwendet, dem Cavalleri'schen Prinzipe. Denn dasselbe Prinzip wird auch angewendet zum Beweise des jedenfalls nötigen Satzes von der Inhaltsgleichheit von Pyramiden mit gleicher Grundfläche und Höhe. Aufserdem ist das Cavallerische Prinzip gewissermafsen ein Vorläufer der Grundlagen der Differentialrechnung und spielt eine grofse Rolle in der Mathematik. Wir wollen es im all-

gemeinen und dann seine Anwendung auf die genannten Sätze der Stereometrie prüfen.

Das Prinzip von Cavalleri.

Cavalleri hat in seiner Geometria indivisibilium nova quadam ratione promota, Bononiae 1653, das nach ihm benannte Prinzip aufgestellt, welches man für richtig hält, weil die damit erreichten Resultate richtig sind, welches aber an sich nicht streng bewiesen ist. Es lautet bekanntlich: Wenn zwei Körper zwischen zwei parallelen Ebenen liegen (sodafs ihre letzten Punkte in diesen Ebenen liegen) und wenn dann beliebig viele zu jenen Ebenen parallele Ebenen stets je zwei inhaltsgleiche Flächen aus den Körpern herausschneiden, so sind die Körper inhaltsgleich.

Es sieht danach so aus, als sollte man sich vorstellen, die Körper seien aus unendlichvielen parallelen Flächen geradezu zusammengesetzt. Das ist natürlich Unsinn, solange man die Ebene zweidimensional definiert und ihr die dicke Null, (im genauen Sinne dieses Wortes), nicht etwa eine unendliche Dünne zuschreibt. Denn durch Addition von wenn auch noch so vielen wirklichen Nullen kann nichts entstehen. Vielmehr müfste man sich, wenn diese Vorstellung einen Sinn haben sollte, die Ebenen unendlichdünn vorstellen; dann wären es keine Ebenen mehr, sondern unendlichdünne, von zwei Ebenen begrenzte Schichten. Freyer (Zur Metaphysik der Diff. Rechn. 1883 Ilfeld, Programm) sagt: „Seinen Darlegungen liegt der Gedanke zu grunde, dafs die fortrückende Gerade die Fläche, die sich verschiebende Fläche den Körper erzeugt. Jedoch möchte es fast scheinen, als wäre ihm die Summe der Querschnitte, obwohl man ihre Anzahl nicht kennt, das erzeugte Quantum und als dächte er sich die schneidenden Ebenen als Teile des Ganzen."

Gewifs hat der Begriff der kontinuierlichen Bewegung hiermit zu schaffen, aber dieser schliefst die gröfsten Schwierigkeiten in sich, wie sich bei der Erfindung der Differentialrechnung und ihrer Entwickelung gezeigt hat. Es ist selbstverständlich, dafs wir uns später mit diesem Begriffe, wie mit denen der Geschwindigkeit, Änderung usw. ausführlich beschäftigen müssen, aber wir werden zunächst bei der möglichst einfachen Betrachtung des Unendlichen stehen bleiben. Das Kontinuierliche hat gewifs mit dem Unendlichen zu schaffen, ist man aber hierüber nicht im Klaren, so wird auch die Thatsache der Vorstellung einer kontinuierlichen Bewegung das Unendlichkleine nicht klarer machen. Ich will nicht abstreiten, dafs man mit der Bewegung, der

Zeit und dem Kontinuierlichen anfangen könne und von da ab auf die Schwierigkeiten des Unendlichen kommen, aber man mufs schliefslich doch auch den Begriff des Unendlichen versuchen möglichst für sich zu betrachten, da er etwas anderes ist als die Zeit an sich und die Bewegung. Wie man auch vorgehen mag, am Schlusse mufs alles mit einander harmonieren, falls eine Harmonie, ein Verständnis ohne Widersprüche überhaupt möglich ist.

Setzt man in das Prinzip die folgende Bedingung: „falls zwei unendlichnahe parallele Ebenen jedesmal gleiche unendlichdünne Schichten aus beiden Körpern herausschneiden", so ist die Gleichheit des Inhaltes leicht einzusehen. Man hat dann unendlichviel unendlichdünne Schichten zu summieren, und wenn auch eine einzelne unendlichdünne Schicht gegenüber den endlichdicken keine Bedeutung hat, so kann man doch unendlichviele deswegen zu einer endlichen Summe summieren, weil in Wahrheit mit dem Unendlichkleinen hier nur die eine Dimension behaftet ist und die Summierung von unendlichviel unendlichkleinen Gröfsen in einer Dimension zu einer endlichen Gröfse (der Höhe der Körper) möglich ist. Aber leider ist bei dieser Formulierung des Prinzipes nicht ohne weiteres beweisbar, dafs z. B. zwei dreiseitige Pyramiden mit gleicher Höhe und gleichen Grundflächen inhaltsgleich sind. Denn man kann mit Hilfe der ebenen Geometrie beweisen, dafs dann die Schnittflächen inhaltsgleich, nicht aber, dafs die Schichten inhaltsgleich sind. Wenigstens bedürften wir dazu einer ganz genau neuen, meines Wissens noch nicht geführten Untersuchung. Ebenso ist es mit der Ableitung des Kugelinhaltes mittels des Prinzipes.

Versuche ähnlicher Prinzipe für Linien und Flächen.

Da Cavalleris Prinzip für die Raumlehre richtige Resultate auf schnellem Wege liefert, so könnte man auf den Gedanken kommen, entsprechende Grundsätze auch für Linien und Flächen aufzustellen. Zunächst sollen sie einmal, ganz äufserlich nachgeahmt, hingeschrieben werden.

Zwei von einer zur anderen Parallelen in der Ebene reichende gerade Strecken sind gleichlang, wenn durch irgendwelche zu jenen Grenzgeraden parallele Gerade Gleiches aus ihnen herausgeschnitten wird (das Gleiche wären hier Punkte). Man sieht aus einer Figur sofort, dafs dieses Prinzip richtig wäre, wenn die beiden zu prüfenden Strecken parallel sind, aber meist falsch, wenn sie nicht parallel sind.

Zwei von einer Parallelen zur anderen reichende krumme ebene Linien sind gleichlang, wenn Parallelen je zwei gleiche Stücke aus

ihnen herausschneiden. Auch hier sind die Schnitte Punkte, sind also der Gröfse nach nicht verschieden, und doch ist der Grundsatz falsch.

Auf Flächen angewendet finde ich den Grundsatz z. B. in „K. H. Liersemann, $o\varepsilon$ 1 ∞ Θ, Programm, Reichenbach in Schlesien, 1878, 9". Er würde lauten: Wenn zwei begrenzte Flächen in gleichen Höhen geschnitten stets gleiche Durchschnittslinien ergeben, so sind sie gleichen Inhaltes. Wenn auch Liersemann im genannten Programme hier wie an anderen Stellen scharfsinnig auf die vorhandenen Schwierigkeiten hinweist, vermag er sie doch hier ebensowenig zu lösen wie bei den von mir bereits behandelten Problemen der Anzahl der Punkte auf gleichen und ungleichen Linien (siehe früher). Betrachten wir den versuchsweise aufgestellten Grundsatz für Flächen in seinen einzelnen Fällen! Zeichnet man zwei Dreiecke zwischen parallelen Linien in die Ebene und läfst sie durch beliebig viele Parallelen geschnitten werden, so sind die ausgeschnittenen Strecken paarweise gleich grofs, falls die Grundlinien gleich sind, und es ist auch der Inhalt bekanntlich gleich grofs (beweisbar durch Rechtecke, die doppelt so grofs sind, und Kongruenzlehre).

Läfst man aber einen Kreis und ein Quadrat um ihren gemeinsamen, der Seite des Quadrates gleichen Durchmesser PQ (Figur 15) rotieren, so entsteht eine Kugel- und eine Zylinderoberfläche. Zweifellos ist die Kugeloberfläche $= 4r^2\pi = (2r)^2\pi$ und der Zylindermantel $2r\pi \cdot 2r$, also ebensogrofs. Schneidet man aber die beiden Körper durch parallele Ebenen, so sind die ausgeschnittenen Kreise meist nicht paarweise gleich. Jedenfalls also könnte man jenen dem Cavallerischen nachgebildeten Grundsatz für Flächen hier nicht benutzen, um die Gleichheit der Oberflächen herauszubekommen, obgleich in der mittleren Ebene die Ausschnitte gleiche Länge haben ($2r\pi$). Nun könnte es ja sein, dafs es auch noch andere Fälle aufser dem im Prinzip angenommenen gäbe, in denen so gelegene Flächen inhaltsgleich würden, und das Prinzip doch richtig wäre. Liersemann aber meint, mit demselben Rechte wie Cavalleri, hier den Grundsatz aussprechen zu dürfen: „Wenn die eine Fläche stets kleinere Durchschnitte hat als die andere in gleicher Höhe, so sei die erste Fläche kleiner als die zweite". Die aus der Kugel ausgeschnittenen Kreise sind mit Ausnahme des mittleren Schnittes stets kleiner, also müfsten die Ober-

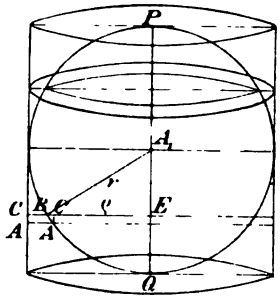


Fig. 15.

flächen verschieden sein, was sie aber nicht sind. Freilich handelt es sich bei Cavalleri nicht um Anzahlen von Punkten in Linien (auf den Schnittkreisen nach oben und unten hin gerechnet), sondern um Flächen. Hier giebt das von Liersemann versuchsweise hingestellte Prinzip falsche Resultate, aber es wäre doch sehr oberflächlich es deshalb ganz zu verwerfen, wenn es sonst ebenso richtig erschiene. Wir werden alsbald sehen, daſs Liersemann im Unrecht ist das von ihm versuchsweise derart aufgestellte Prinzip für an sich ebenso richtig zu halten wie das Cavallerische und damit auch im Cavallerischen Unverständliches zu finden, weil es doch, obwohl für die Resultate richtig, nicht logischer sei als sein versuchsweise aufgestelltes, für die Resultate gewiſs falsches Prinzip. Die bei dem Zylinder und der Kugel als Schnitt entstehenden Kreislinien sind freilich meist verschieden groſs, ihre Anzahl ist beide Male unendlich und gleich. Aber man kann aus der Anzahl der Punkte nichts über Längen schlieſsen, die Linien (Seitenlinie des Zylinders und Umfang des Kreises) sind mit der gleichen Anzahl der Schnittpunkte nur — wie wir sagen — behaftet worden. Es sind nicht im Halbkreise an sich $\pi/2$ mal soviel Punkte vorhanden als in der Linie $2r$, wohl aber ist im Halbkreis die Summe der unendlichvielen unendlichkleinen Stücke $\pi/2$ mal so groſs als die ebensogroſse Anzahl der Schnittstücke in $2r$.

Liegen zwei quadratische Prismen mit ihren gleichen Grundflächen in parallelen Ebenen, während das eine gerade und das andere schief ist (man zeichne das!), so schneiden parallele Ebenen stets gleiche Quadrate aus ihnen heraus. Nach dem Cavallerischen Prinzipe müſsten demnach ihre Inhalte gleich sein, was bekanntlich richtig ist, denn ihre Inhalte sind das Quadrat der Grundfläche, multipliziert mit der für beide gleichen Höhe. Wäre ein gleiches Prinzip für Flächen richtig, so müſsten auch die Mäntel und Oberflächen beider Körper gleich sein. Nun sind allerdings die vorderen und hinteren Seitenflächen (Rechteck und schiefes Parallelogramm) inhaltsgleich als Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und Höhen, aber die links und rechts liegenden Seitenflächen sind sehr verschieden, sie haben gleiche Grundlinien, aber ganz ungleiche Höhen (beim einen die senkrechtstehende, beim anderen die schrägliegende Seitenkante), die Mäntel sind also ungleich.

Man fragt unwillkürlich: warum sind hier die Flächen ungleich, obwohl die ausgeschnittenen Linien (Umfang der Quadrate) jedesmal gleich sind, warum aber sind beim Falle der Kugel und des Zylinders die Flächen gleich, obwohl die herausgeschnittenen Linien (Kreise) meist ungleich sind? Bei der schiefen und geraden Pyramide liegt die Sache

ähnlich wie bei den Prismen, die Inhalte sind unter den Bedingungen des Prinzipes gleich, die Oberflächen aber nicht.

Durch Vergleichung der genannten Fälle wird es klar, dafs es darauf ankommt, in welcher Weise die unendlichkleinen Stücke addiert werden, ob je zwei durch ein paar paralleler Ebenen herausgeschnittene unendlichkleine Stücke untereinander gleich sind oder in welchem Verhältnisse sie stehen. Ich stelle darum eine verbesserte und erweiterte Form für das Cavallerische Prinzip auf.

Verbesserte und erweiterte Form für Cavalleri's Prinzip.

Durch zwei parallele Ebenen bez. Geraden begrenzte geometrische endliche Figuren (Linien, Flächen oder Körper) sind für das Endliche inhaltsgleich, falls das folgende Produkt für beide Figuren dasselbe ist: eins der Elemente (Punkte, Linien oder Flächen), welche durch irgend zwei jenen Grenzebenen parallele, unendlichnahe Ebenen herausgeschnitten werden, multipliziert mit der zur Inhaltsangabe noch nötigen unendlichkleinen, herausgeschnittenen Linie anderer Dimension.

Oder sie sind inhaltsgleich, falls die herausgeschnittenen Elemente sich umgekehrt verhalten wie die zur Inhaltsformel noch nötigen herausgeschnittenen unendlichkleinen Elemente.

Ist das durch die eine der beiden unendlichnahen Ebenen (oder Geraden) herausgeschnittene Element ein Punkt, so sind alle Punkte als gleich zu betrachten, nicht aber etwa gleich Null zu setzen, und es ist der Inhalt der Linien (die z. B. zwischen den begrenzenden Parallelen liegen sollen) anzusehen als Produkt von Punkt und Linienlänge. Unter dieser näheren Voraussetzung gilt das Prinzip auch für Linien zwischen Parallelen.

Sind die unendlichkleinen, durch zwei unendlichnahe Ebenen herausgeschnittenen Strecken gleich grofs, wie dies beim eigentlichen Cavallerischen Prinzipe für Körper der Fall ist, so genügt es von Gleichheit der Schnittflächen zu sprechen, falls man dabei die Gleichheit der unendlichkleinen Höhen als selbstverständlich mitdenkt (was freilich bisher beim Cavallerischen Prinzipe, wie es scheint, nicht zu geschehen pflegt). Prüfen wir nun, ehe wir es beweisen, das so gestaltete allgemeine Prinzip zunächst an den früher aufgeführten Beispielen! Liegen gerade oder krumme Linien zwischen zwei Parallelen in der Ebene, so werden sie durch die sämtlichen anderen, zu jenen

parallelen Linien in Punkten geschnitten. Sind nun für beide Figuren, für beide Linien die durch zwei unendlichnahe Parallelen herausgeschnittenen unendlichkleinen Strecken stets gleich, so wäre auch das Produkt von Punkt und solcher Strecke dasselbe, oder es verhielte sich Punkt zu Punkt wie unendlichkleine Strecke zur gleichen unendlichkleinen Strecke. Nur darf man, wie schon gesagt, nicht etwa bei der Multiplikation den Punkt als Null rechnen. Ein Produkt von Gröſsen zweier Dimensionen ist etwas ganz anderes als ein Produkt von zwei Gröſsen derselben Dimension. Wir sahen oft, das man stets den Gedanken festhalten muſs, die eine Dimension werde mit der betreffenden Gröſse behaftet, ebenso die andere Dimension für sich. So kann man auch meinetwegen den Punkt als nullte Dimension ansehen, obwohl das nur ein Wort ist, aber man darf nicht sagen, ein Punkt, gerechnet in dieser einen, der nullten Dimension, multipliziert mit irgend einer Gröſse einer anderen Dimension, hier der Strecke, ergebe das Resultat Null. Dies wäre nur statthaft, falls man den Punkt als weiter nichts ansähe als die Zahl Null oder als eine Linie von der Länge Null, die auſserdem auch noch in derselben Dimension wie jene andere Strecke läge und schlieſslich auch noch als solche mit jener innerhalb derselben Dimension multipliziert werden könnte — Voraussetzungen, die alle falsch sind.

Liegen in der Ebene Parallelogramme oder Dreiecke zwischen Parallelen und haben sie gleiche Grundlinie, so sind die durch irgend welche Parallelen herausgeschnittenen endlichen Strecken gleich. Um den Flächeninhalt auszudrücken, hat man noch die Höhe in der zweiten Dimension nötig. Es werden thatsächlich durch zwei unendlichnahe Parallelen gleiche Stücke der Höhen ausgeschnitten, folglich sind die Flächeninhalte nach dem erweiterten Prinzipe gleich. Aus den Umfängen solcher Figuren aber werden allerdings gleiche Punkte, aber nicht immer gleiche Linienelemente zwischen den unendlichnahen Parallelen ausgeschnitten, also sind die Umfänge nicht stets gleich.

Jene quadratischen Prismen mit gleichen Grundflächen haben gleichen Inhalt, da die herausgeschnittenen Quadrate alle gleich sind, auſserdem aber auch die beiden durch zwei unendlichnahe parallele Ebenen herausgeschnittenen Höhenstücke. Die Seitenflächen links und rechts aber sind verschlieden, weil die unendlichkleinen Stücke der Höhen dieser Seitenflächen ungleich sind bei Gleichheit der herausgeschnittenen Quadratumfänge. Die Gleichheit der Oberflächen jenes rotierenden Quadrates und Kreises aber ergiebt sich aus Folgendem. Schneiden zwei unendlichnahe Ebenen (Figur 15) aus jenen beiden Oberflächen zwei Kreise heraus, so haben diese die Längen

$2r\pi$ und $2\varrho\pi$ oder eine nur unendlichwenig davon abweichende Länge, falls EC mit r und EB oder EA mit ϱ bezeichnet wird. Die zum Ausdrücken der Oberfläche noch nötige Strecke ist das eine Mal AB, das andere Mal AC. Es verhält sich aber in beiden ähnlichen Dreiecken ABC und A_1BE $AB : AC = r : \varrho$. Also ist das Produkt $AB \,.\, 2\varrho\pi = AC \,.\, 2r\pi$ d. h. die Bedingung des erweiterten Prinzipes ist erfüllt. Durch die Summierung $AB \,.\, 2\varrho\pi + \ldots = (AC + \ldots)\, 2r\pi$ ergiebt sich, da die sämtlichen Gröfsen AC zusammen gleich $2r$ sind, die Oberfläche der Kugel als $4r^2\pi$.

Übrigens ist hier leicht zu bemerken, dafs man bei dieser Ableitung der Kugeloberfläche mittels des erweiterten Cavallerischen Prinzipes dieselben Gedanken nötig hat, wie man sie bei der bisher üblichen und früher („die Berechnung der Kugeloberfläche") besprochenen Ableitung gebrauchte. Auch zeigt sich wieder, dafs die Definition des Krummen ohne ein Verhältnis zur anderen Dimension nicht angeht. Werfen wir nun einen Blick auf die übliche selbständige Ableitung des Kugelinhalts durch das bisherige Cavallerische Prinzip für Körper, dann wird uns klar werden, wie innig der Zusammenhang zwischen diesen scheinbar ganz getrennten Ableitungen für Oberfläche und Volumen ist. Es scheint mir durchaus nicht unmöglich, sondern wünschenswert auf der Schule schon bei Ableitung dieser wichtigen Formeln auf solchen Zusammenhang hinzuweisen. Der Schüler hat bisher immer die Vorstellung, als wäre es doch sehr sonderbar, dafs man auf dieselben Formeln einmal kommen kann, indem man selbständig die Oberfläche behandelt und daraus den Inhalt ableitet, und dann auf ganz fremdem Wege, indem man letzteren zuerst selbständig findet. Es geht uns zugleich ein Licht auf über die Stellung des Cavallerischen Prinzipes zur Infinitesimalrechnung. Will man überhaupt versuchen schon den Schüler die niedere Mathematik gründlich verstehen (!) zu lassen, was ohne das Unendlichkleine einfach unmöglich ist, so mufs auch das Cavallerische Prinzip in allgemeiner Form gelehrt und bewiesen oder durch gleichwertige Betrachtungen ersetzt werden.

Der Kugelinhalt nach Cavalleri's Prinzip.

Bei Berechnung der Oberfläche nach dem erweiterten Prinzipe fand man in dem Cylindermantel eine der Kugelfläche gleiche Oberfläche. Dies war, wie wir sahen, möglich, da zwar die Schnittlinie des Cylindermantels gröfser war als der durch dieselbe schneidende Ebene erzeugte Kreis auf der Kugel, aber dafür das noch nötige un-

endlichkleine Element für die Kugeloberfläche gröfser, da es schräg liegt. Für die Inhaltsberechnung pafst der Cylinder nicht, denn die für die Inhaltsformel nötige Höhe ist für beide Körper gleich, die Schnittflächen aber sind verschieden. Man suche also einen Körper herzustellen, dessen ebener Schnitt stets gleich dem ebenen Schnitt der Kugel ist. Letzterer sei $\varrho^2\pi$ (Figur 16); die Beziehung von ϱ zu r ist ausgedrückt durch (im Dreieck ADB): $r^2 - \varrho'^2 = \varrho^2$. Also müfste jener Körper den Schnitt haben $(r^2 - \varrho'^2)\pi$. In der Figur ist dies, in derselben Ebene wie der Kugelschnitt, der Ring, welcher sich ergiebt durch Abziehen des Kreises $\varrho'^2\pi$ von $r^2\pi$. BA

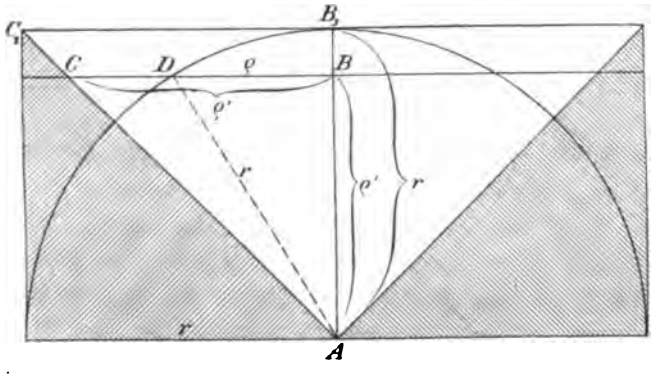


Fig. 16.

oder ϱ' ergiebt durch Abtragen in jener Ebene $BC = \varrho'$. Folglich ist CAB gleichschenklig, also ist der vom Cylinder abzuziehende Körper ein Kreiskegel, dessen halber Durchmesser stets gleich der Höhe ist, $B_1C_1 = B_1A$. Die Schnittfläche der Kugel ist also stets gleich der ringartigen Schnittfläche des schraffierten, trichterartigen Hohlkörpers. Die unendlichdünne Scheibe des Hohlkörpers oder die Differenz der Scheiben des Cylinders und des von oben hineingesenkten Kegels ist $\pi(r^2 - \varrho'^2)\,.\,\delta$, die Scheibe der Kugel aber $\pi\,.\,\varrho^2\,.\,\delta$. Also da $r^2 - \varrho'^2 = \varrho^2$ war und δ zwischen zwei unendlichnahen Ebenen dasselbe ist, besteht die Scheibengleichheit

$$(r^2 - \varrho'^2)\,\pi\,\delta = \varrho^2\,\pi\,\delta.$$

Bildet man nun die Summe sämtlicher Scheiben für alle möglichen unendlichnahen Ebenen, so hat man die Gleichheit

$$(r^2 - \varrho'^2)\,\pi\,\delta + (r^2 - \varrho_1'^2)\,\pi\,\delta + \ldots = \varrho^2\,\pi\,\delta + \varrho_1^2\,\pi\,\delta + \ldots.$$

Die rechte Seite stellt den Inhalt der Kugel vor, falls die Summe aller δ gleich $2r$ ist. Die linke Seite wird dann nach Auflösung der Klammern $r^2\pi(\delta + \delta_1 + \ldots) - \pi(\varrho'^2\delta + \varrho_1'^2\delta_1 + \ldots$ und stellt die Differenz des Inhalts von Doppelcylinder und Doppelkegel vor.

Der doppelte Cylinderinhalt ist dann sofort $r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi$. Vom Kegelinhalt aber mufs man wissen, dafs er $\frac{1}{3}r^2\pi \cdot h$, also hier für den doppelten Kegel $\frac{4}{3}r^3\pi$ ist. Dann ist jene Differenz $(2 - \frac{4}{3})r^3\pi$, also der Inhalt der Kugel $\frac{4}{3}r^3\pi$.

Die hierbei vorausgesetzte Formel für den Kegelinhalt wird bekanntlich einfach gefolgert aus der Formel für den Inhalt einer Pyramide (mit unendlichvielen Seiten oder der Grundfläche $r^2\pi$. Der Pyramideninhalt aber bildet wieder eine wunde Stelle in der niederen Stereometrie. Er kann ebenfalls nur durch das Unendlichkleine gefunden werden. Mit ihm werden wir uns im nächsten Abschnitte beschäftigen und gleichzeitig die dreiseitige Pyramide mit als Beispiel beim Beweise des erweiterten Cavallerischen Prinzipes benutzen.

Beweis des erweiterten Cavallerischen Prinzips.

Wenn man auch für einen allgemein benutzten Satz das Wort Prinzip oder Grundsatz wählt, so ist man dadurch noch nicht der Pflicht enthoben einen Beweis dafür anzugeben. Nun giebt es allerdings in der Mathematik gewisse Grundlagen, die man nicht beweisen kann z. B. dafs wir uns thatsächlich einen Raum von drei Dimensionen vorstellen, oder die sogenannten Axiome. Das Cavallerische Prinzip aber ist ein Satz, der von Gröfsen spricht, die wir bereits vorher kennen, und von Zusammenstellung solcher Gröfsen mittels ganz allgemeiner, auch sonst vorkommender mathematischer Grundlagen, z. B. der Thatsache, dafs wir uns unendlichkleine Gröfsen in jeder Dimension vorstellen und dieselben summieren können. Es ist also nichts weiter als ein Zugeben der Unfähigkeit einen ordentlichen Beweis zu führen, wenn man solches Prinzip einfach anführt, zum Beweisen anderer Sätze benutzen, aber nicht selbst beweisen will. Namentlich hätten die Schulen die Pflicht solches Prinzip, das später auftaucht und nicht zu den ersten Grundlagen der Mathematik gehört, zu beweisen, wie diese alles Derartige beweisen möchte oder sollte. Ich kann mich deswegen durchaus nicht damit einverstanden erklären, wenn dieser Beweis in den elementaren Büchern fehlt. Meine Aufgabe ist es ihn hier gleich für die erweiterte und verbesserte Form durchzuführen.

Sind die Schnitte der Parallelen Punkte, welche bei der Multiplikation mit den unendlichkleinen Elementen, wie wir gesehen haben, die Rolle von 1 spielen, so kommt es nur noch darauf an auszusprechen, dafs die unendlichvielen, durch je zwei parallele Gerade herausge-

schnittenen Linien dieselben Summen ergeben. Ob sie dieselben Summen ergeben, läſst sich nur durch die endliche Figur selbst beurteilen. Man muſs hierbei allerdings einen Grundsatz aufstellen, der aber nicht etwa bloſs für dieses Prinzip von Cavalleri da ist, sondern für die ganze Mathematik, überall da, wo unendlichviel unendlichkleine Gröſsen summiert werden, gültig ist. Er würde lauten:

Grundsatz: Welche endliche Summe unendlichviel unendlichkleine Gröſsen ergeben, wird mit bestimmt durch die Grenzen d. h. hier die letzten, im Endlichen unterscheidbaren Orte der sich im Unendlichkleinen ohne bemerkbare Lücken aneinanderreihenden Gröſsen.

Auſserdem kommt der arithmetische Grundsatz zur Anwendung: „Sind die Teile gleich, so ist auch das daraus gebildete Ganze gleich."

In unserem Falle sollen die unendlichkleinen Strecken paarweise gleich sein, also sind auch alsdann die gesamten Strecken gleich, und zwar ist ihre endliche Gröſse angebbar.

Werden zwei in derselben Ebene zwischen Parallelen liegende Flächen, wie etwa Dreiecke, von unendlichvielen Parallelen durchschnitten, so sind die zum Ausdrücken des Inhalts nötigen unendlichkleinen Höhenstücke paarweise gleich durch Anwendung der Lehre von den Parallelogrammen auch auf das Unendlichkleine (Parallelogramme mit einem Paar von endlichen und einem Paar von unendlichkleine Seiten). Die Ausführung dieser Geometrie ist leicht nach den früher behandelten Beispielen beim Dreieck usw. Sind nun auſserdem die durch die Parallelen aus beiden Figuren herausgeschnittenen Graden gleich) was z. B. beweisbar ist, falls die Grundlinien der Dreiecke gleich sind, und zwar nach den gewöhnlichen Lehren der Planimetrie), so haben wir noch zu beweisen, daſs die unendlichschmalen Trapeze endlicher Länge ACA_1C_1 und $A_2C_2A_3C_3$ (Figur 17) inhaltsgleich sind. Ich will hier davon absehen, den Fall zu betrachten, daſs eine Seite wie A_2C_2 einen unendlichkleinen Winkel mit der Grundlinie bilde. Dies bietet zwar Interesse und lohnte eine Ausführung, ist aber hier für den Augenblick nicht so wichtig und kann auch nach den sonst in dieser Schrift vorkommenden Untersuchungen ohne neue Schwierigkeiten durchgeführt werden. Es möge also der Neigungswinkel ein endlicher sein, während CB unendlichklein sei. Dann ist in Dreieck ABC und allen entsprechenden Dreiecken wie $A_2B_2C_2$ $tan\, A = CB : AB$. Da aber *tan* des

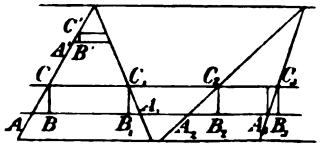


Fig. 17.

endlichen Winkels endlich ist, so muſs auch der Nenner AB oder A_2B_2 unendlichklein sein wie der Zähler. Nach einem früheren Grundsatze hat demnach in der Dimension von AA_1 die eine unendlichkleine Gröſse AB oder auch zwei derselben zusammen wie $AB + A_1B_1$ (oder auch irgend eine endliche Anzahl solcher Gröſsen) gegenüber der endlichen Strecke AA_1 oder A_2A_3 keine Bedeutung oder die Bedeutung des Summanden Null. Der Inhalt des Dreieckes ABC ist unendlichklein zweiter Ordnung, während der Inhalt des Trapezes ACA_1C_1 unendlichklein erster Ordnung ist, oder besser gesagt, es ist in der einen, der Höhendimension, jede Gröſse, bei Dreieck wie bei Trapez mit den Unendlichkleinen behaftet, in der anderen Dimension aber ist das Trapez mit dem Endlichen, das Dreieck aber mit dem Unendlichkeinen behaftet. Bei Bildung der Inhaltsformel muſs man stets, wie früher ausgeführt wurde, die Behaftung in jeder Dimension für sich im Auge behalten. Es verschwindet aber das Unendlichkleine gegenüber dem Endlichen.

Wenn man nun unendlichviele unendlichnahe Gerade legt, so ergeben sich unendlichviele unendlichschmale Trapeze. Je zwei derselben sind beziehlich ihrer Länge AA_1 und A_2A_3 gleich — so war unsere Voraussetzung, falls das Prinzip überhaupt Anwendung finden soll —; folglich sind auch für das Endliche die Strecken BB_1 und B_2B_3, die sich für das Unendlichkleine nur um unendlichwenig unterscheiden von AA_1 und A_2A_3, einander gleich und auch den Strecken CC_1 und C_2C_3 gleich. Die Rechtecke CBC_1B_1 und $C_2C_3B_2B_3$ sind sogar für das Unendlichkleine genau gleichgroſs, also auch für das Endliche. Die Trapeze aber sind für die endliche Weitenbehaftung gleich lang und jedenfalls gleich schmal. Addiert man sämtliche Trapeze, in welche eine der beiden Figuren durch unendlichviele Parallelen zerschnitten wird, so findet diese Summation statt in der Dimension der Höhe; in dieser Dimension aber ist die Summe der unendlichvielen Gröſsen (Höhenstücke) auch für das Unendlichkleine genau gleich der Höhe selbst, die Summation in der anderen Dimension (der Linien AA_1) aber richtet sich danach, wieviel die einzelnen Summanden selbst betragen. Jeder einzelne Summand ist für die endliche Weitenbehaftung gleich dem betreffenden Rechtecke zu setzen, welches genau gleich dem entsprechenden Rechtecke in der anderen Figur war. Folglich muſs auch die Summe aller solcher Trapeze für eine Figur dieselbe sein wie für die andere Figur, allerdings auch nur wieder für die Weitenbehaftung mit dem Endlichen. Die in der Dimension der Höhe stattfindende Summierung kann auf die Gleichheit inbezug auf die andere Dimension keinen Einfluſs ausüben, weil sie in jeder

Dimension einzeln betrachtet werden mufs. Wenn also freilich auch die vernachlässigten oder besser gesagt: für die Länge der Trapeze bedeutungslosen Dreiecke wie ABC und $A'B'C'$, sämtlich zusammenaddiert eine Summe von unendlichvielen unendlichkleinen Dreiecken ergiebt, so hat diese Summe trotzdem keinen Einfluſs auf den endlichen Wert des gesamten Flächeninhaltes einer Figur. Wie nicht oft genug gesagt werden kann, richtet sich dieser Wert nach der für jede Dimension getrennt zu betrachtenden Summation; die Dreiecke aber haben für die bloſse Addition der einzelnen Höhenstücke überhaupt keine Bedeutung, für die einzelnen Trapeze aber haben sie beziehlich deren Länge ebenfalls keine Bedeutung, folglich haben sie auch für den endlichen Wert des Flächeninhalts keine Bedeutung. Sie sind zwar da, aber sie sind nur da in Beziehung auf andere Betrachtungen, nämlich immer da, wo man dem unendlichkleinen Dreiecke einen entscheidenden Wert beilegen mufs, hier aber ist für das Endliche ihr Beziehungswert Null. Somit ist das Prinzip für diese Flächen bewiesen, ich mache aber besonders darauf aufmerksam, daſs in meiner Aufstellung des Prinzipes absichtlich und notwendigerweise von endlichen Figuren und Inhaltsgleichheit für das Endliche gesprochen wird.

Ganz Ähnliches ergiebt sich für den Beweis der Richtigkeit unseres Prinzipes für Oberflächen wie die der Kugel und des berührenden Zylinders. Es ist allerdings der Radius BE oder ϱ in der einen schneidenden Ebene nicht genau derselbe wie in der unendlichnahen schneidenden Ebene (Figur 15). Es stellt also das Produkt $2\varrho\pi \cdot AB$ nicht genau ein Rechteck vor und man möchte also meinen, es dürfte auch nicht $2\varrho\pi \cdot AB = 2r\pi \cdot AC$ gesetzt werden, obgleich wegen der Dreiecksproportion die Produkte $\varrho \cdot AB$ und $r \cdot AC$ gleich sind. Denn dies ϱ, könnte man einwenden wollen, müsse in einer einzigen schneidenden Ebene liegen. Aber auch hier kann man das betreffende Trapez zwischen $2\varrho\pi$ und $2\varrho'\pi$ durch Lote zu einem Rechtecke zusammen schneiden, ohne daſs doch dabei für endliche Weitenbehaftung eine Änderung im Inhalt entsteht. Folglich sind auch hier ganz ebenso die im Unendlichkleinen vorhandenen Unterschiede bedeutungslos für die Summierung des Inhaltes, und das, obgleich das Verhältnis der unendlichkleinen Strecken $AB : AC$ von entscheidender Bedeutung ist.

Betrachtet man endlich zwei Körper zwischen parallelen Ebenen, so kann man sich stets irgend eine zu diesen Ebenen lotrechte Ebene vorstellen. Diese schneidet dann wieder i. A. Trapeze aus beiden Figuren heraus, und für diese Trapeze gilt dieselbe Überlegung wie bisher. Allerdings müſste man eine unendliche Anzahl von solchen lotrechten und zu einander parallelen Ebenen gelegt denken, um wirklich Flächen

herauszubekommen, deren Gleichheit ja im Prinzipe vorkommt. Und zwar müfste man zum Ausdrücken des Flächeninhaltes aufser der Dimension, welche die Schnittlinie einer solchen lotrechten Ebene angiebt, noch die andere zu dieser Ebene senkrecht stehende Flächendimension heranziehen und auch in ihr summieren. Aber wenn in der einen Dimension der Ebene ein einzelnes unendlichkleines Linienstück gegenüber der endlichen Schnittlinie keine Bedeutung hat, so ist es in der zweiten Dimension der Schnittfläche ebenso.

Für dreiseitige Pyramiden — für sie ist ja, wie gesagt, das Prinzip besonders wichtig — ergiebt sich z. B. Folgendes.

Es sei (Figur 18) MNO ein durch eine der parallelen Ebenen aus der einen Pyramide herausgeschnittenes Dreieck. Ist dann AA_1 die Schnittlinie irgend einer lotrechten Ebene und CC_1 der Schnitt dieser selben lotrechten Ebene mit der nächsten unendlichnahe darunterliegenden Parallelebene, so kommt es auf die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ für die Summation in der Richtung der endlichen Strecke AA_1 nicht an. Ist nun PD der Schnitt einer zweiten lotrechten Ebene, welche senkrecht zu jener ersten lotrechten Ebene steht, so kommt es auf das Dreieck DEF beziehlich der Summierung in Richtung DP ebenfalls nicht an. Die Fläche des Dreiecks MNO wird aber ausgemessen, wenn man beliebig viele solche zu einander senkrechte Schnitte hindurchlegt wie AP und DP. Dann erhält man, bis auf unendlichkleine Stücke an den Rändern, kleine Quadrate, welche für das Endliche das Dreieck ganz ausfüllen.

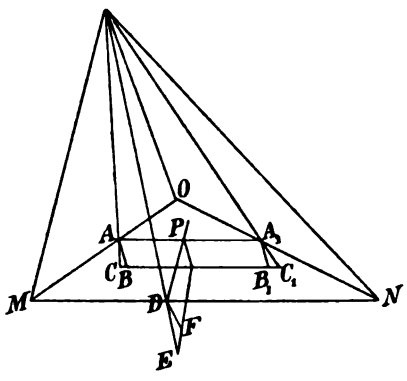


Fig. 18.

Es liegen an den Rändern einer unendlichdünnen Schicht des ganzen Körpers kleine Körper, die entweder in der einen oder anderen Dimension der Fläche des Dreiecks verschwinden. Diejenigen Stücke aber, welche überhaupt für den körperlichen Inhalt Bedeutung haben sollen, müssen in der einen Flächendimension ebenso wie in der anderen Bedeutung für die Summierung haben. Folglich fallen alle die an den Rändern einer Schicht befindlichen Körperchen fort und es bleiben für die Inhaltsangabe der Schicht nur solche Schichtstücke, welche von gleichen ebenen Stücken in jeder der beiden unendlichnahen parallelen Ebenen begrenzt sind. Das heifst die Schichten sind für die endliche

Summierung gleich, falls die begrenzenden parallelen Ebenen gleiche ebene Dreiecke aus beiden Körpern herausschneiden. Es ist nicht schwer die genannten einzelnen Beweise in einer gemeinsamen Form auszusprechen.

Die Bewegung und das Unendliche. Anwachsen und Geschwindigkeitsänderung.

Beim Cavallerischen Prinzipe stieſsen wir auf die Vorstellung der Bewegung, die übrigens schon oft nahelag. Sie hat offenbar mit dem Unendlichen nahe Verwandtschaft. Bei einer räumlichen Bewegung, pflegt man zu sagen, werde, wenn sie zusammenhängend ist, das Endliche, das Unendlichkleine ... bis zum Punktartigen hin durcheilt. Überhaupt erklären viele die ersten räumlichen Vorstellungen und ihren Zusammenhang schon durch den Begriff der Bewegung. Man läſst die Linie durch Bewegung eines Punktes entstehen usw. Man nennt es einen Grundsatz, daſs man sich eine Figur unverändertgroſs denken könne, wenn man sie von Ort zu Ort bewegt. Die Kongruenz, jene allgemeine Grundlage der gesamten Geometrie, glaubt solchen Grundsatzes zu bedürfen. Doch fehlt bei den Mathematikern gewöhnlich die genauere Untersuchung desselben und des Begriffes oder der Vorstellung: Bewegung.

Was heiſst es, ein Punkt bewege sich? Man muſs doch sagen, in welcher Weise. Antwortet man, er beschreibe eine Linie, so weiſs man nicht recht, ob der bloſse Begriff Punkt und der bloſse Begriff oder die bloſse Vorstellung der Bewegung ohne Zuhilfenahme der Vorstellung einer Linie auch wirklich genügt, um die Vorstellung der Linie entstehen zu lassen. Was bedeutet, wollen wir uns fragen, der als Resultat vorhandene Weg des Punktes etwa ohne den Bewegungsbegriff? Man wird sagen dürfen: der Punkt hat nach einem bestimmten Gesetze verschiedene Lagen, die man in bestimmter zeitlicher Reihenfolge geistig durchgehen kann, aber die man auch geistig in anderer Reihenfolge betrachten kann, ohne doch durchaus die bisherige Figur der Bewegung zu zerstören. Was heiſst aber: verschiedene Lagen? Kann man dafür nicht ebensogut sagen, es seien da verschiedene Punkte? Warum soll es durchaus derselbe Punkt sein, der z. B. in verschiedenen Lagen auf einer Geraden liege? Doch nur weil er dasselbe Ordnungsgesetz befolgt, nach dem er seine Lage richtet. Dem Punkte selbst kann man es doch nicht wie einem reisenden Menschen an dem Gesichte ansehen, ob er derselbe ist!

Man könnte sagen, dadurch daſs man den Punkt geistig niemals aus den Augen lasse, wisse man, daſs er derselbe sei, und dies „nie

aus den Augen lassen" sei die kontinuierliche Bewegung. Aber darin steckt abgesehen vom psychologisch Geistigen die Vorstellung der Linie, man muſs sich dabei jedenfalls alle möglichen Teile der Linie vorstellen; jeden Teil — wenn auch den unendlichkleinsten beliebiger Ordnung — durchläuft wieder der Punkt. Also die bloſse Versenkung in das Unendlichkleine macht es nicht klarer; es muſs dabei sein die Linienvorstellung und die Thatsache, daſs man jede Linie ohne Einschränkung überall mit der Vorstellung des Punktes behaften kann. Solche Vorstellung kann diejenige der Bewegung des Punktes geometrisch vollständig ersetzen.

Man hört sagen: die Parallele in einem bestimmten Abstande von einer Geraden sei der geometrische Ort oder die Gesamtheit aller Punkte, welche jenen Abstand haben. Besser kann man sagen: will man die Ebene mit all den Punkten behaften, die gleichen Abstand von einer Geraden haben, so muſs man die Parallele wählen und sie mit beliebiger Punktvorstellung behaften. Bekanntlich aber drückt man dasselbe auch aus, indem man sagt, ein Punkt der Ebene beschreibe, wenn er stets gleichen Abstand haben soll, die Parallele. Ebenso kann man den Kreis definieren als den Weg eines Punktes unter der Bedingung, daſs er stets denselben Abstand in der Ebene von einem festen Punkte habe, aber es läſst sich dies vollkommen richtig ohne „Bewegung" ausdrücken.

Wir wissen aus unseren früheren Untersuchungen, daſs die Behaftung mit der Punktvorstellung stets nach irgend einer bestimmten Ordnung stattfinden muſs und sonst keinen Sinn hat. Die Bewegung wird also ersetzt durch die Behaftung mit Punkten in irgend einer Ordnung. Wir wollen eine solche Ordnung ein Behaftungsgesetz nennen.

Es ist nicht schwer einen Teil des Cavallerischen Prinzipes durch ein bestimmtes Behaftungsgesetz auszudrücken, nachdem man sich verschiedene Lagen einer Fläche oder eine unendliche Anzahl von gleichen Flächenstücken in verschiedenen Lagen vorstellte.

Es wird uns wichtiger sein nach Betrachtung des Punktes zunächst auf die Bewegung einer unendlichkleinen Strecke zu kommen. Man stelle sich vor, es bewege sich eine unendlichkleine Strecke innerhalb einer Linie fort. Wie groſs soll man sich solche Strecke vorstellen? Ist es möglich sich überhaupt eine solche kleine Strecke von ganz bestimmter Gröſse vorzustellen, wenn man sonst nichts weiter in der Vorstellung hat als die unendlichlange Linie, innerhalb deren sich jene bewegen soll? Es erscheint sehr schwer, überhaupt irgend eine bestimmte Länge dabei anzunehmen, wenn man gar nicht sagen darf,

dieselbe habe irgend ein Verhältnis zu einer anderen vorgestellten Strecke, einer Maſseinheit. Aber wenn man die Bewegung so auffaſst, daſs an verschiedenen Stellen der Linie unendlichkleine Streckchen gleicher (!) Länge liegen mögen, so ist in einer Beziehung Klarheit gewonnen, nämlich darin, daſs die Stücke gleich sein sollen, und man kann die Bewegung ersetzen, indem man die Linie an allen möglichen Stellen behaftet mit der Vorstellung von unendlichkleinen Strecken gleicher Länge.

Eine Gleichung mit den variabelen Gröſsen x und y stellt in der analytischen Geometrie eine Kurve vor. Man kann die x-Gröſse als Unabhängige auffassen, dann wird die y-Gröſse davon abhängig. Man sagt wohl, es verändere sich x unabhängig oder nach Belieben, und trägt beliebige Längen auf der sogenannten x-Axe ab, oder man sagt, man nehme auf dieser Axe beliebige Punkte als Endpunkte der betreffenden Abscissen an. Damit ist dann die Bewegung eines solchen Punktes oder die unabhängige Veränderung von x ersetzt, x kann auch als anwachsend bezeichnet werden oder als abnehmend, ganz nach Belieben. Allerdings kann man die Vorstellung der Zeit hinzufügen und sagen, wie schnell x anwachsen solle. Dabei ist aber das speziell Zeitliche etwas ganz Neues, es genügt, das Anwachsen von x mit etwa gleichmäſsiger Geschwindigkeit zu ersetzen durch Vorstellung von immer wieder hinzukommenden gleichen Streckchen auf der x-Axe. Danach richtet sich dann mittels des Gesetzes der Gleichung die Veränderung von y, der jedesmal im Endpunkte der x-Strecke errichteten Ordinate in einer Länge, die man aus der Gleichung nach Einsetzen der betreffenden x-Gröſse ausrechnet.

Wählt man Punkte auf der x-Axe mit gleichen Abständen, so wachsen auch die Ordinaten, sodaſs in jedem charakteristischen Dreiecke dy und dx dasselbe Verhältnis haben, falls die Funktionsgleichung eine gerade Linie repräsentiert. Man kann dann sagen, die Ordinaten oder die Funktion von x ändere sich mit gleicher Geschwindigkeit, kann aber diesen Zeitbegriff ganz ersetzen durch jene Vorstellung der Verhältnisse. Die Geschwindigkeit ändert sich bei krummen Linien, d. h. bei allen möglichen, beliebig, auch unendlichwenig von einander verschiedenen x-Werten ergeben sich nicht stets gleiche Verhältnisse.

Einteilung einer Linie in endliche und unendlichkleine Teile. Berührung von Kreis und Geraden.

Was heiſst es, wenn ich sage: ich teile eine endliche Strecke in eine endliche Anzahl von Teilen? Sollen die Teile gleich sein, so ist

dies eine klare Vorstellung, auch wie oft der Teil im Ganzen enthalten ist. Soll ich mir aber eine bestimmte Vorstellung des Teiles für sich machen, so gerate ich in Verlegenheit und suche durchaus entweder an das Ganze nebenher zu denken oder an einen anderen Teil, der dem ersten gleich oder ungleich ist. Ohne irgend ein Verhältnis scheint es unmöglich zu sein überhaupt die bestimmte (!) Länge einer Strecke festzuhalten oder zu bilden. (Ich habe diese Gedanken im Anfange meiner Schrift: „Eine mögliche Wesenserklärung für Raum Zeit, das Unendliche und die Kausalität, Berlin W, Gutenberg-Verlag, ausgeführt.) Versuche ich mir die endliche Strecke in unendlichkleine gleiche Teile eingeteilt zu denken, so läfst sich wieder ein bestimmter unendlichkleiner Teil ganz für sich gar nicht vorstellen. Es scheint sogar, als wäre es noch weniger möglich sich das Unendlichkleine in bestimmter Gröfse vorzustellen. Das liegt daran, dafs das Endliche zugleich das Sinnliche ist. Beim Sinnlichen pflegen wir sofort eine gröfsere Umgebung oder gar den Körper und die Sinnesorgane mitvorzustellen, bilden also ganz von selbst Verhältnisse, beim Unendlichkleinen fällt dies fort. In Wahrheit aber ist es bei dem einen so wenig wie beim anderen möglich eine Bestimmtheit bei einer Strecke festzuhalten, wenn man wirklich all und jede andere Gröfse aufser dieser einen Strecke aus dem Geiste für den Augenblick verdrängen möchte. Der Gedanke aber, dafs die unendlichkleinen Teile untereinander entweder gleich oder ungleich sein sollen, ist anschaulich klar. Aber wenn auch alle unendlichkleinen Teilchen einer endlichen Strecke untereinander gleich sein sollen, man kann doch nicht bestimmt sagen, wieviele es sind, man kann nur unbestimmt angeben, es seien unendlichviele. Nimmt man sich vor eine bestimmte Anzahl solcher Teilchen aneinander zu reihen, so ist es auch nicht möglich zu sagen, wie grofs dies Ganze sei, nur das Verhältnis von diesem Ganzen zu den Teilen ist alsdann klar. Sei nun auch das Ganze endlich oder unendlich, es ist für sich ebensowenig vorstellbar wie das einzelne Teilstück für sich. Nur Verhältnisse scheint es demnach bei unseren Raumvorstellungen in ganz bestimmter Art zu geben (oder wenigstens kann man es so auffassen — siehe das erwähnte Buch!) und zwar nicht bestimmte Verhältnisse des Unendlichkleinen zum Endlichen, sondern nur der Gröfsen einer Weitenbehaftung untereinander. Wir sagten: die betreffende Linie wird mit einer bestimmten Weitenvorstellung behaftet, und wir wissen nun, wie wir uns ein Behaftungsgesetz für Strecken vorstellen müssen.

Soll das Verhältnis einer unendlichkleinen Strecke zu einer endlichen etwas Vorstellbares werden, so müssen wir ein zweites unendlich-

kleines Streckchen heranziehen, das zum ersten in bestimmtem Verhältnisse steht und eine zweite endliche, aus dem zweiten Unendlichen zusammengesetzte Strecke. Es ergiebt sich dann die Verhältnisgleichheit $a : a_1 = \delta : \delta_1$, vorausgesetzt dafs gleichviele, sonst aber unbestimmt unendlichviele Teilchen δ in a enthalten sind wie Teilchen δ_1 in a_1. So können zwei endliche Linien, deren eine auch krumm wie der Kreis und deren andere als $2r\pi$ gerade gedacht wird, gleich sein, und man kann sie mit solcher Weitenvorstellung und solchem Gesetze behaften, dafs in beiden gleichviel unendlichkleine Teilchen derselben Länge oder verschieden viel (z. B. doppelt so viel beim Kreise) unendlichkleine Teilchen bei entsprechendem Verhältnis ihrer Gröfsen (halb so grofs als beim Kreise) vorhanden seien.

Also es ist wohl möglich die an sich unbestimmt unendlichkleine Strecke des Kreises (die wir als gerade ansahen für die Weitenbehaftung mit dem Endlichen oder dem Unendlichkleinen in beiden Dimensionen) in ein bestimmtes Verhältnis zu einem unendlichkleinen Teile der dem Kreise gleichlangen Geraden $2r\pi$ zu setzen. Erst dadurch gewinnt die Frage, wieviel unendlichkleine Teile der Kreis oder die Strecke habe, Bedeutung. Und die Antwort ist: Die Anzahl auf beiden steht im umgekehrten Verhältnisse wie je ein Teilchen des einen zu einem Teilchen des anderen. Berührt nun $2r\pi$ den Kreis als Tangente, oder stellt man sich vor, der Kreis habe sich zur Geraden abgewickelt — eine Vorstellung, die zwar eine Bewegung einschliefst, aber auch ohne Bewegung völlig gleich genau beschrieben werden kann — so steht man vor der Frage, ob nun die unendlichkleine Strecke, die — wie wir sahen — der Kreis mit der Tangente gemein hat, für beide gleich grofs vorgestellt werden soll also ob gleich viel davon im Kreise und in der Geraden enthalten sind, oder ob es auch geht sich vorzustellen, es seien andersviele auf dem Kreise vorhanden als auf der Geraden, dabei aber die Teile verschieden grofs.

Bei zwei geraden, gleichlangen Linien würden wir sagen, komme es gar nicht darauf an, ob das unendlichkleine Teilchen des einen gleich dem des anderen oder in einem beliebigen Verhältnisse dazu stehe, wenn nur die Anzahlen sich umgekehrt verhalten; ebenso bei einem von der geraden Strecke $2r\pi$ getrennt liegenden Kreise. Ist es nun durchaus nötig sich das gemeinsame Berührungsstreckchen beider als gleich vorzustellen? Ist es nicht selbstverständlich, dafs es, als gemeinsam, auch gleichgrofs sei? Sagen wir: ja, so fragen wir weiter: warum kann das unendlichkleine Teilchen bei der Trennung hier und dort verschieden sein, während wir doch sagten, der unendlichkleine Teil des Kreises sei unbestimmt oder beliebig klein? Und nun soll er

plötzlich nicht mehr ganz beliebig sein, sondern genau gleich dem auf der Tangente vorgestellten? Nur das wesenswichtige Dreieck kann uns Aufklärung geben.

Behaftungsgesetz und wesenswichtiges Dreieck. Die fertige Kreisabwickelung.

Die Vorstellung der gemeinsamen Berührungsstrecke hat nur Bedeutung bei gewisser Weitenbehaftung. Wir wissen, dafs (Figur 11, S. 107) im wesenswichtigen Dreieck ABC (dabei sind ABC irgendwelche unendlich nahen Punkte des Kreises) die Höhe BD unendlichklein vom zweiten Grade ist. Behaftet man die Kreisfigur in der Dimension der Höhe mit der Weitenvorstellung des Unendlichkleinen vom zweiten Grade, so fällt der Bogen mit der Sehne ABC nicht zusammen, wohl aber für die Weitenbehaftung mit dem Endlichen oder Unendlichkleinen ersten Grades. Aber auch ebensowohl fallen für jene Weitenbehaftung zweiten Grades die Sehnen AB oder BC mit dem Bogen zusammen. Es fällt endlich, da Winkel BAC unendlichklein ist, für endliche und unendlichkleine Weitenbehaftung auch die Richtung der drei Sehnen zusammen. Auch dabei kann doch das unendlichkleine Stück der Tagente — im wesenswichtigen Dreieck, also mit der Weitenbehaftung bis in das Unendlichkleine zweiten Grades hinein — AB sein, während das des Kreises entweder auch AB oder CB oder AC oder noch anders ist. Es wird also das Verhältnis eines unendlichkleinen Stückes der einen und andern Linie durch Verhältnis der sinusse der Winkel ausgedrückt. Stellt man sich freilich vor, dafs das wesenswichtige Dreieck nicht mehr existiert, was bei gewissen Weitenbehaftungen geschieht, so fallen die unendlichen Stücke zusammen. Klappt also die AB-Tangente mit den übrigen unendlichwenig davon abweichenden (für diese Behaftung der Ebene in der Dimension der Höhe) zusammen, so sind die Stücke des Kreises und der Tangente dieselben — aber nur für jene Weitenbehaftung!!

Sobald man die Tangente oder Gerade $2r\pi$ für sich mit Weitenvorstellung behaftet und den Kreis ebenfalls für sich, so braucht man sich die Berührungsstrecke nicht mehr gleich grofs zu denken. Man hat also die Freiheit stets von der Vorstellung der gleichen gemeinsamen Berührungsstrecke abzuspringen und zu sagen: es könne diejenige Strecke, die bisher als unendlichkleine gemeinsame Berührungsstrecke beider vorgestellt wird, nun als beliebig grofses

unendlichkleines Teilchen der einen vorgestellt werden oder als beliebiggrofses Teilchen des Kreises, und bei jeder dieser Vorstellung für sich sei es nicht mehr nötig diese Teile durchaus noch als gleich zu betrachten. Solange man die Vorstellung hat, dafs dieses Teilchen dort in der zweidimensionalen Ebene liegt (bei Behaftung mit dem Endlichen oder Unendlichkleinen) als wirklich gemeinsames Teilchen beider Linien, insofern (!) ist es ein Teilchen von derselben Länge, ein in sich zusammenfallendes vorgestelltes Teilchen, freilich von unbestimmt unendlichkleiner Länge. Sobald man es sich aber unendlichoft auf der einen Linie, dem Kreise, vorstellt, kann man hierfür (!) sofort die Bedingung hinzufügen, es sei in einer Anzahl darin enthalten, die anders ist als die Anzahl, in der man es sich in der anderen Linie enthalten denkt, und es sei in der einen Linie folglich dementsprechend von anderer Gröfse vorgestellt als in der anderen. Dies Verhältnis $\delta : \delta_1$ kann überall vorgestellt und sogar an der Stelle der Berührung (natürlich in einem auf das Endliche übertragenen Mafsstabe) hingezeichnet werden durch entsprechende Gestaltung des wesenswichtigen Dreiecks. Dies wirft ein neues Licht auf die Unbestimmtheit dieses Dreiecks. Dieselbe verschwindet für die Vorstellung, dafs wir die Figur mit dem Unendlichkleinen zweiten Grades in der einen Dimension nicht behaften wollen und die gemeinsame Berührungsstelle für sich ins Auge fassen, uns die unendlichkleine Berührungsstelle in einer Dimension vorstellen; sonst ist die Unbestimmtheit sofort da. Danach läfst sich das folgende Gesetz der Berührung aufstellen:

Die Berührung einer Geraden und eines Kreises kann als dieselbe Strecke in einer Dimension hingestellt werden, nämlich dann, wenn man die zweite Dimension mit der Weitenvorstellung des Unendlichkleinen zweiter Ordnung nicht behaftet, sondern nur mit dem Unendlichkleinen erster Ordnung oder dem Endlichen. Aber sie kann auch — bei anderer Weitenbehaftung der zweiten Dimension — in verschieden grofsen und um unendlichkleine Winkel zu einander geneigten Strecken vorgestellt werden. Nach welchem Behaftungsgesetze man aber alsdann die eine z. B. AC oder die andere z. B. AB vorstellen will, hängt von anderen gestellten Umständen ab. Es kann z. B. in der einen Richtung $2r\pi$ als Tangente geradlinig verlaufen, in anderer als Kreis; alsdann kann man entweder das Gesetz aufstellen: es soll $2r\pi$ wie der gleichlange Kreis mit gleichvielen, unter sich gleichen unendlichkleinen Strecken behaftet werden — dann ist jedes Teilchen des einen gleich dem des anderen, also die Berührungsstrecke als

gleich vorzustellen; oder aber sie werden mit verschieden vielen behaftet, dann stehen nach diesem Behaftungsgesetze die verschieden vorgestellten Berührungsstrecken z. B. AC und AB im umgekehrten Verhältnisse wie die Anzahlen.

Tangens als unbestimmte Beziehung zwischen verschiedenen Weitenbehaftungen in verschiedener Dimension.

Liegen zwei Gerade (Figur 19) G und G_1 zu einander parallel und haben sie einen endlichen Abstand h, so schneiden sie sich niemals, auch im Unendlichen nicht. Denkt man aber in einem Punkte A der einen unendlichkleinen Winkel ersten Grades angetragen, so schneidet der neue Schenkel die andere Gerade im Unendlichen, dieser Schnitt sei (natürlich in der Figur fälschlich in das Endliche übertragen) S. Man kann alsdann in der Vorstellung auch das Lot SB auf die Gerade G fällen und erhält ein Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung ABS. Darin wollen wir, entsprechend der Vorstellung bei endlichen Dreiecken, *tangens* SAB oder *tang* δ ein äufserlich zusammengestelltes Verhältnis $BS : AB$ nennen. Dies bedeutet nur, dafs wir uns in der einen Dimension eine endliche Strecke h,

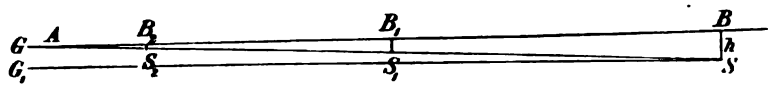


Fig. 19.

in der anderen eine unendliche AB vorstellen und auch die Idee der unendlichfernen Punkte B und S fassen. Dann stellt das Verhältnis — rein äufserlich aufgestellt — $h : AB$ oder endlich: unendlich einen unbestimmten unendlichkleinen Wert vor. *tang* δ ist also $= \delta$. Denkt man sich auf der Hälfte der Strecke AS, natürlich ebenfalls im Unendlichen B_1S_1 parallel zu BS, so ist das Verhältnis dieser beiden endlichen Strecken etwas bestimmtes, ebenso dasjenige der unendlichen Strecken AB_1 und AB und zwar beide Male gleich 1 : 2.

Verändern wir nun die Vorstellung der Figur so, dafs B_1 im Endlichen liegen soll, während der Winkel unendlichklein bleibt, so bedeutet *tang* δ das Verhältnis $B_1S_1 : AB_1 =$ unendlichklein : endlich, hat also selbst wieder einen unbestimmt unendlichkleinen Wert. Es sei schliefslich AB_2 unendlichklein, dann wird *tang* δ oder eine unendlichkleine Gröfse das Verhältnis sein B_2S_2 : unendlichklein, also ist B_2S_2 unendlichklein vom zweiten Grade. Es entspricht der Höhe

beim wesenswichtigen Dreieck einer Kurve zweiten Grades, während dann AB_2 ein Teil der gröfsten Sehne ist.

Verlängert man B_2S_2 über S_2 hinaus um sich selbst und verbindet diesen Punkt mit A, so entsteht bei A ein unendlichkleiner Winkel α, der gröfser ist als der ursprüngliche Winkel α, und es verhält sich $tan\ \alpha : tang\ \alpha_1$ wie 1 : 2 . damit ist eine gewisse Unbestimmtheit von dem Winkel des wesenswichtigen Dreiecks gewichen, was wir alsbald benutzen werden.

Ist endlich die Höhe unendlichklein vom dritten Grade, dann wird entweder, nämlich falls AB_2 unendlichklein vom zweiten Grade gedacht wird, wieder $tan\ \alpha$ unbestimmt unendlichklein vom ersten Grade, und falls — wie im wesenswichtigen Dreieck AB_2 vom ersten Grade bleibt, so würde $tang\ \alpha$ unendlichklein vom zweiten Grade werden. Auch dies wird Verwendung finden, wenn wir von Berührungen verschiedener Ordnung sprechen werden.

Berührungsstelle verschiedener Kreise und das wesenswichtige Dreieck.

In einem früheren Abschnitte sahen wir, dafs das Verhältnis zweier Seiten im wesenswichtigen Dreiecke im allgemeinen gleichgiltig ist, aber sofort Bedeutung gewinnt, sobald man etwa eine an der betreffenden Stelle berührende Tangente mit unendlichkleinen Teilchen und den Kreisumfang ebenfalls mit solchen behaftet; dann verhielt sich ein Teilchen der Tangente zu einem solchen des Kreises wie zwei Sehnen oder die Sinus zweier Winkel im wesenswichtigen Dreiecke. Wir durften also alsdann in dieser Beziehung (l) sagen, dafs die gemeinsame Berührung der Geraden und des Kreises als für beide Linien verschiedene Strecken aufzufassen ist.

Eine weitere Bestimmtheit jenes Dreiecks wird uns die Untersuchung der Berührungsstelle zweier Kreise liefern. Ich will hier nur den Fall ausführen, dafs die Kreise sich von innen berühren, also die Radien nach derselben Seite gerichtet sind; der andere Fall kann entsprechend ausgeführt werden.

Behaften wir eine solche Figur nur mit der Vorstellung des Endlichen oder des Unendlichkleinen ersten Grades, so müssen wir die Stelle der Berührung entweder (für das Endliche) gar nicht als eine Linie, sondern als verschwindend klein annehmen; für das Unendlichkleine aber ist es eine gemeinsame gerade Strecke von unbestimmt unendlichkleiner Länge.

Es fragt sich, ob wir überhaupt nicht im stande sind an der Stelle der Berührung, also ohne die Kreismittelpunkte und die endlichen Radien in Betracht zu ziehen, etwas über die Art der Berührung auszusagen, ob es ganz gleich für diese Stelle ist, ob sich da Kreis und Gerade oder Kreise von ganz beliebiger endlicher Gröfse berühren.

Betrachten wir das wesenswichtige Dreieck, ziehen wir also in der einen Dimension das Unendlichkleine zweiten Grades hinzu! Die Figur ist wieder nur im Endlichen zeichenbar, soll aber zur richtigen und möglichen Vorstellung in den anderen Weitenbehaftungen anregen. Der eine Kreis mit dem Radius r habe das wesenswichtige Dreieck ABC (Figur 20). Berührt ihn dann ein zweiter Kreis mit kleinerem Radius, also stärkerer Krümmung an der unendlichkleinen Stelle, in deren Gegend jenes Dreieck liegt, so kann man sich dies auf verschiedene Art vorstellen, da doch an sich in jenem Dreieck keine weiteren Bestimmtheiten vorhanden sind, weder in demjenigen des einen, noch in dem des anderen Kreises. Beide Dreiecke müssen

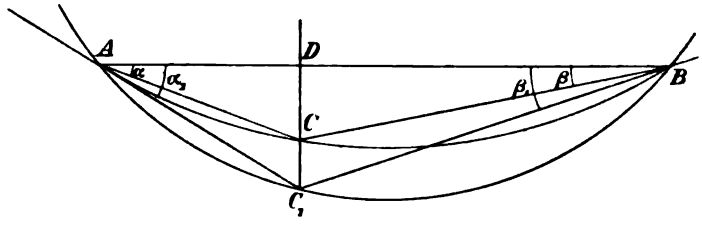


Fig. 20.

in derselben unendlichkleinen Gegend liegen, es ist also erlaubt einen oder auch zwei Punkte zusammenfallen zu lassen. Beide Dreiecke mögen zunächst die Sehne AB gemeinsam haben.

Die Höhe des Dreiecks bei stärkerer Krümmung $C_1\ D$ ist gröfser als CD und es ist $tan\ \alpha = CD : AD$, $tang\ \alpha_1 = C_1D : AD$. Ganz entsprechendes läfst sich für die bei B gelegenen Winkel sagen. Es verhält sich $tan\ \alpha : tan\ \alpha_1 = CD : C_1\ D$. Es folgt daraus:

Betrachtet man die gröfste Sehne als beiden wesenswichtigen Dreiecken der sich berührenden Kreise gemeinsam, so bestimmen die Verhältnisse der Höhen, die unendlichklein vom zweiten Grade sind, oder der gonymetrischen Tangenten je eines der anliegenden unendlichkleinen Winkel die Krümmung. Bei geringerer Höhe oder geringerem Tangenswert ist die Krümmung geringer oder der Radius des Kreises gröfser. Im Übrigen können die Punkte C und C_1 auch an anderen Stellen

senkrecht unter einander liegen, oder das Verhältnis der Seiten kann geändert werden. Wir sahen, dafs dies mit der Behaftung der beiden Kreislinien zusammenhängt (bei der Betrachtung von Kreis und Tangente).

Behält man (Figur 21) die Höhen als gleich bei, so wird für den stärker gekrümmten Kreis die gröfste Seite $A_1 B_1$ kleiner als die des anderen Dreiecks AB. Es ist $tang\ \alpha = h : AD$ und $tang\ \alpha_1 = h : A_1D$, also $tan\ \alpha : tan\ \alpha_1 = A_1D : AD$. Ebenso ist es für die Winkel bei B und B_1, und es folgt:

Betrachtet man die Höhen der wesenswichtigen Dreiecke als gleich, so ist beim stärker gekrümmten Kreise die gröfste Dreiecksseite kleiner und die Tangente eines anliegenden Winkels gröfser (ebenso wie beim vorigen Falle).

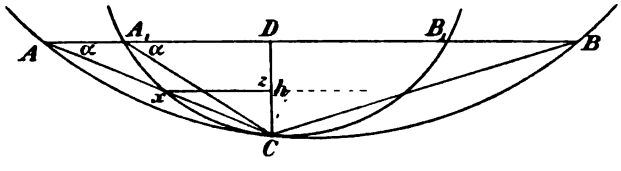


Fig. 21.

Behält man drittens einen anliegenden Winkel bei, so sei (Figur 21) xs parallel AD, und es ist beim stärker gekrümmten Kreise die Höhe geringer, ebenso irgend eine Seite. (Man vergleiche auch den späteren Abschnitt über die Krümmungskreise der Parabel).

Die Abwickelung des Kreises und die Cykloide. Das Rollen.

Man erklärt die Cykloide gewöhnlich in folgender Form:

Die Cykloide ist der Weg, den irgend ein Punkt eines Kreises beschreibt, wenn letzterer, ohne zu gleiten, auf einer Geraden fortrollt, wobei sich der Umfang des Kreises auf jener Geraden abwickelt.

Dies ist zwar recht anschaulich und recht bequem mittels der Bewegung ausgedrückt, aber es ist selbstverständlich, dafs man die Eigenschaft irgend eines solchen Cykloidenpunktes durch Rechengröfsen (analytisch) nicht mit dem Begriffe der Bewegung, sondern durch seine Lage auf dem die Gerade berührenden Kreise ausdrücken mufs und aufserdem, um auch genau alle die Punkte dadurch zu kennzeichnen, welche gerade die betreffende Cykloide bilden sollen, das Gesetz hinzufügen mufs, nach dem ein bestimmter Kreisbogen gleich einer bestimmten Länge der Tangente wird.

Denkt man sich nämlich die unendlichvielen Kreise mit demselben Radius r, welche eine Gerade G berühren, so liegen alle Mittelpunkte auf der Parallelen im Abstande r d. h. man kann diese Parallele mit beliebigen Punkten behaften, die alle Kreismittelpunkte sein sollen. Ferner denkt man sich den ganzen Streifen von der Breite $2r$ behaftet mit beliebig vielen Punkten, gewissermafsen — wie man ungenau sagen würde, diesen Streifen mit solchen Punkten ausgefüllt. Nach welchem Gesetze soll man sie zusammenordnen? Eine gewisse unendliche Menge derselben gehört zu einer Cykloide und bildet dieselbe. Wir würden lieber sagen: man behafte eine gewisse Anzahl von Punkten mit bestimmten Behaftungsgesetzen, dann sind sie hierdurch zusammengeordnet und gehören zur selben Cykloide. Von Bewegung brauchen wir nicht zu sprechen. Ein Kreis, wie der mit dem Mittelpunkte M (Figur 22) kann entlang seiner ganzen Peripherie behaftet werden mit beliebig vielen Punkten, sie sollen aber sämtlich verschiedenen Cykloiden angehören. Das heifst, unterwerfe ich irgend einen derselben z. B. Punkt P der Bedingung, dafs der Bogen von ihm bis zum Fufspunkte des Radius F gleich sein solle

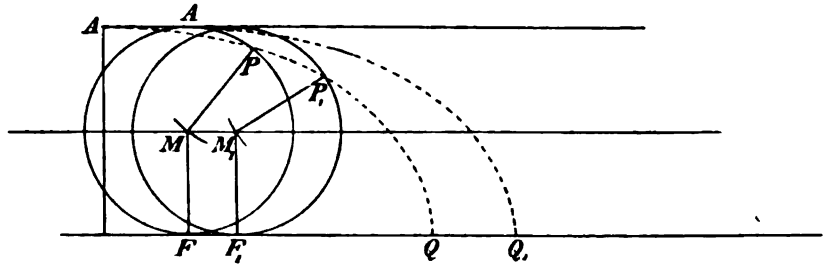


Fig. 22.

dem Tangentenstück FQ, so ist hierdurch ein bestimmter Punkt Q angenommen; und man kann nunmehr definieren, dafs zur selben Cykloide gehören sollen diejenigen Punkte aller jener Kreise, deren Bogenabstand bis zu dem Fufspunkte (Berührung) des Kreises zu dem sie gehören [z. B. Bogen PF bez. $P_1 F_1$], gleich sein soll der Tangente bis zum festen Punkte Q (also gleich der Strecke FQ bez. F_1Q_1. Dabei ergiebt sich für irgend einen Punkt des Streifens z. B. P_1 der Mittelpunkt des zugehörigen Kreises leicht, indem man um P_1 mit r einen Kreis beschreibt, der die Parallele in M_1 schneidet; das Lot von M_1 ergiebt dann den Fufspunkt F_1.

Ein Teil der Cykloide, zu der die besprochenen Punkte P und P_1 gehören, ist gezogen zwischen A und Q. Ein anderer Punkt des Kreises um M, nämlich das zweite A, gehört zur Cykloide AQ_1.

Der Halbkreis AF ist gleich FQ_1 und Bogen AP gleich QQ_1. Die wichtige Frage für uns ist die der Berührung. Wie kann durch Addition sämtlicher Berührungsstrecken die Gerade FQ und andererseits der Bogen FP herauskommen?

Wenn man die Frage so stellt, so erscheint es, als könnte man den Bogen FP als eine zusammenhängende gebrochene Linie hinstellen, deren einzelne Bruchstücke den gleichfalls vorgestellten Bruchstücken von FQ entsprächen und die allesamt Berührungsstrecken wären. Also man springt damit wieder von der Vorstellung der unendlichvielen Kreise ab und geht wieder zu der Vorstellung der Bewegung über, die ein einziger Kreis M machen solle. Man wird einwenden, man dürfe dies doch, da der Geist die Vorstellung der Bewegung kennt. Gewifs. Es ist aber möglich, dafs alsdann Schwierigkeiten sich zeigen, welche bei Vermeidung der Bewegung nicht vorhanden sind.

Vermeidet man die Bewegung und spricht nur von Gleichheit der mit Ausnahme der Berührungsstelle bei F getrennt liegenden Linien: Bogen FP und Gerade FQ, so sondert man damit vorsichtigerweise die Vorstellung der Berührung von der Vorstellung der Gleichheit jener endlichen Linien ab; man behaftet den Bogen und die Tangente für sich mit unendlichvielen Stücken und spricht aufserdem davon, dafs irgendwo, also hier bei F eine Berührung stattfinden soll. Dieser Stelle also schreibt man die der Berührung zukommenden Merkmale zu, nicht aber gleichzeitig den übrigen Stellen des Bogens. Freilich nimmt man alsdann noch die unendlichvielen anderen berührenden Kreise an, aber man spricht doch trotz der unendlichvielen Berührungsstellen, die alle auf der Geraden liegen sollen, stets von jeder einzelnen Berührung für sich und vermischt sie nicht alle zusammen mit der Vorstellung der Gleichheit jener endlichen Linien.

Ganz anders bei Heranziehung der Bewegung beim Rollen. Dann müssen wir uns besonders in acht nehmen, nicht die Vorstellung der Berührung, die doch jedesmal nur für eine bestimmte Stelle gemacht wird, nämlich die, in der gerade der rollende Kreis berührt, einfach als eine Sammelvorstellung anzusehen, die ganz selbstverständlich genau dasselbe bedeute wie die Vorstellung der beiden Linien PF und FQ. Die Berührungen finden hintereinander statt, die Längengleichheit beider Linien ist aber ein gleichzeitig vorgestellter Begriff!! Es fragt sich, ob man unter allen Umständen eine begriffliche Zusammenfassung der nacheinander vorgestellten Berührungen gänzlich mit der einfachen Vorstellung einer Strecke wie FQ identifizieren könne. Wir wissen nach unseren Untersuchungen, dafs zwar die gemeinsame Berührungsstelle als daliegend in der zweidimensionalen

(mit dem Endlichen und Unendlichkleinen erster Ordnung behafteten) Ebene vorgestellt wird, es liegt aber (nach dem Abschnitte über die fertige Kreisabwickelung) die Freiheit vor, sich die unendlichkleine Berührungsstelle als Teilchen der Geraden FQ in einer beliebigen unendlichen Anzahl vorzustellen und als Teilchen eines Bogens PF für sich genommen ebenfalls in einer beliebigen Anzahl, also auch einer anderen als bei der Tangente; alsdann ist die Gröfse des Teilchens für die Tangentenvorstellung eine entsprechend andere im Verhältnisse zur Gröfse des Teilchens vom Bogen. Und wir wissen ferner, dafs ganz für sich genommen ein unendlichkleines Teilchen überhaupt keine bestimmte Gröfse hat; nur bei Vergleichung wenigstens zweier Teilchen, etwa eines der Tangente und eines des Bogens, kann man eine Bestimmtheit entdecken, d. i. diejenige dieses Verhältnisses. Aber dieses Verhältnis ist wohlgemerkt entstanden, indem man Tangente und Bogen, jedes für sich mit beliebig vielen unendlichkleinen Teilchen behaftet und sich nun das Verhältnis von irgend welchen in bestimmter Art vorstellt. Diese je zwei müssen nicht unbedingt in der Berührungsstelle liegen, sie liegen irgendwo. Man kann sie aber in die Berührungsstelle legen, ist dann aber genötigt sich dementsprechend richtig die Berührung zu denken. Die Berührung ist ja nicht etwas der Gröfse nach ganz Bestimmtes, sondern eine eigentümliche, gewisse Unbestimmtheiten einschliefsende Vorstellung.

Es ist die Rede von der Berührung endlicher Gebilde, eines Kreises mit endlichem Radius und einer im Endlichen bestimmt gerichteten Geraden. Diese Berührung wird klargemacht durch das wesenswichtige Dreieck. Berührung hat keinen Sinn ohne Krümmung. Die Krümmung aber ist, wie wir sahen, niemals vorstellbar ohne zwei Dimensionen; die Berührung also auch nicht. Das wesenswichtige Dreieck benutzt in der einen Dimension das Unendlichkleine zweiter Ordnung. Sagen wir nun, der rollende Kreis solle überall berühren, so ist dabei überall an eine Berührung einer endlichen Kurve mit allen ihren Wesenheiten zu denken. Bei jener einzelnen Berührung, also bei jeder Lage des rollenden Kreises für sich tritt das wesenswichtige Dreieck in seine Kraft, aber wenn in dem wesenswichtigen Dreiecke die eine Seite beziehlich des Kreises den unendlichkleinen Bogen bedeutet, die andere aber beziehlich der Tangente das unendlichkleine Stück derselben, und wenn man dann sagt, diese beiden Seiten könnten im allgemeinen in verschiedenem Verhältnis zu einander stehen, das erlaube der Begriff der Berührung, so können wir doch nicht mehr behaupten, dafs nach Aufhebung der Berührung

das wesenswichtige Dreieck noch da sein soll. Wie kann etwas noch da sein, was das spezielle Merkmal der Berührung ist, nachdem die Berührung selbst nicht mehr da ist? Dann müfste ja das wesenswichtige Dreieck auch ohne die Berührung noch diesen Sinn der Berührung haben. Also dürfen wir uns nicht denken, dafs etwa nach Figur 23 eine ganze Anzahl von wesenswichtigen Dreiecken auf dem Bogen PF der Figur 22 aufeinander folgten, auch solange der Bogen noch unabgerollt daliegt, und dafs in diesen Dreiecken etwa die eine Seite FB jedesmal ein unendlichkleines Bogenstück und die andere Seite FC, BC_1 usw. die sämtlichen, aneinanderstofsenden Teilchen der Tangente seien.

Es ist nicht etwa ein Fehler der Figur oder unserer Auffassung der Berührung, wenn in der gezeichneten Vorstellung die etwaigen

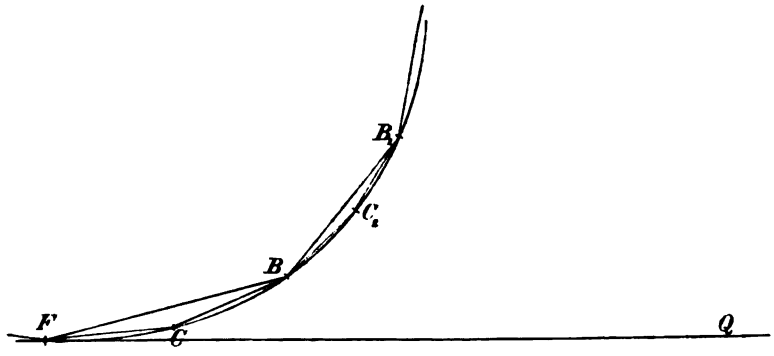


Fig. 23.

Stücke der Tangente FC, BC_1 usw. getrennt voneinander liegen und Lücken zeigen. Vielmehr ist die Auffassung unserer Figur falsch. An der Stelle BB_1 findet augenblicklich gar keine Berührung statt, daselbst kann auch ein derartiges Dreieck mit dem etwaigen Tangentenstück BC_1 nicht vorgestellt werden, wenn BC_1 ein Stück der Tangente FQ sein soll. Ein wesenswichtiges Dreieck, welches das Verhältnis des Bogenstückes und Tangentenstückes klarmachen soll, ist nur immer an der Stelle der Berührung vorhanden. Das Verhältnis FC zu FB kann im wesenswichtigen Dreieck vorgestellt werden, denn dieses besitzt die dazu erforderliche Unbestimmtheit, im Übrigen aber ergiebt sich die Bestimmtheit dieses Verhältnisses aus der Art der Behaftung des Bogens für sich und der Tangente für sich. Man kann sagen, irgend zwei herausgenommene Teilchen sollen in bestimmtem Verhältnisse vorgestellt werden, und

dann kann man sich dieses Verhältnis an der einzelnen Stelle der Berührung im wesenswichtigen Dreiecke vorstellen.

Wir werden bei der gewöhnlichen Abwickelung eines Kreises keinen Grund haben den Kreisbogen mit einer anderen Anzahl von unendlichkleinen Teilchen zu behaften wie die gleiche gerade Strecke. Es sollte ja der Halbkreis AF (Figur 22) gleich FQ_1 und der Bogen AP gleich QQ_1, also ebenso jedes beliebige Bogenstückchen, das wir betrachten möchten, gleich dem entsprechenden Stückchen der Tangente sein. Darum werden wir uns auch das unendlichkleine Stückchen beider als gleich vorstellen, obwohl wir es nicht nötig haben, und wir werden das wesenswichtige Dreieck mit seiner Weitenbehaftung zweiter Ordnung nicht weiter gebrauchen.

Wir wollen dabei versuchen den Begriff des Rollens genau zu erklären. Derselbe wird in der Mathematik oft wie bei der anfangs gegebenen Definition der Cykloide als einfach bekannt vorausgesetzt, etwa als physikalische Vorstellung; ähnlich aber pflegt der Physiker ihn wieder einfach als bekannten räumlichen geometrischen Begriff zu benutzen. Beim Problem der gedehnten Cykloide werden wir indessen auf grofse, bisher nicht genügend gelöste Schwierigkeiten stofsen.

Wir nennen die unendlichvielen, die Gerade berührenden Kreise, wenn wir sie behaften mit der Vorstellung der Gleichheit $PF = FQ$, $P_1F_1 = F_1Q$ usw. (Figur 22) bei Annahme irgend eines festen Punktes Q, oder dafür mit der Vorstellung der Gleichheit des Bogens AF etc. und der Geraden FQ_1 und eines festen Punktes Q_1: die sämtlichen Lagen eines (!) rollenden Kreises.

Ein rollender Kreis ohne Annahme irgend eines Punktes P oder dafür eines davon um bestimmte Bogenlängen entfernten A und zweitens ohne die Annahme eines entsprechenden festen Punktes Q der Tangente und drittens auch noch jener Gleichheit ist kein rollender Kreis. In der That, stellt man sich physikalisch ein Rad vor, das rollt, so denkt man an beliebig viele Punkte, die bestimmten Abstand haben und auch nach Drehung noch behalten sollen, und zugleich denkt man an die Bahn und daran, dafs jene Punkte die Bahn in bestimmten Punkten berühren sollen. Alles das ist sehr wohl möglich bei der Schnelligkeit, in der wir unsere früheren Vorstellungen reproduzieren. Ein kleines Kind braucht sehr viel Zeit, um ein rollendes Rad richtig zu begreifen, es spielt unzählige Male damit und beobachtet genau, was dabei geschieht, um sich danach gewisse Begriffe und Vorstellungen zu entwickeln.

Die verzögerte Abwickelung und die gedehnte Cykloide.

Es soll der Kreis mit dem Radius AM (Figur 24) auf der Geraden FQ rollen, und es liege zwischen AQ die entsprechende, hier nicht gezeichnete Cykloide, also Halbkreis AF habe die Länge FQ. Ist dann B ein stets auf dem Radius AM in stets derselben Entfernung MB gelegener Punkt, so nimmt M beim Fortrollen des grofsen Kreises stets neue Lagen auf der Geraden MM_1 ein, der Radius MBA ändert seine Richtung und seine sonstige Lage und es beschreibt B die Kurve BQ_1 während A die Cykloide AQ beschreibt. Hat der Radius AM die Lage QM_1, so mufs natürlich B in Q_1 liegen. Der Halbkreis AF hat sich zur gleichlangen geraden Linie FQ abgewickelt, der Halbkreis BF_1 aber nicht, sondern er ist gewissermafsen gedehnt worden, sodafs Berührungen mit der Geraden F_1Q_1 von F_1 bis nach Q_1

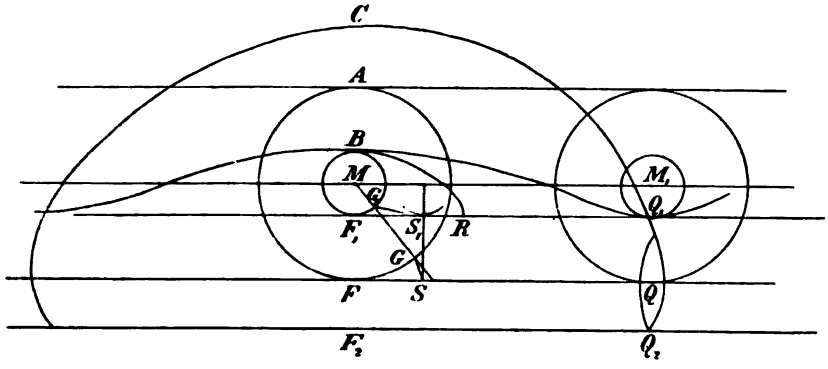


Fig. 24.

hin stattgefunden haben. Die Kurve BQ_1 heifst bekanntlich die gedehnte Cykloide. (Ebenso würde ein auf dem Radius AM aber weiter vom Mittelpunkte ab in C gelegener Punkt beim Abrollen des Kreises AM die verschlungene Cykloide CQ_2 beschreiben, wobei der Halbkreis CF_2 Berührungen mit einer Geraden F_2Q_2 bis Q_2 gemacht hätte, auf einer Strecke, die kürzer ist als der Halbkreis.)

Es fragt sich nun: was thut der Kreis MB beziehlich der Geraden F_1Q_1? Würde seine Peripherie abrollen, so würde Punkt B schon bei R auf die Gerade gelangen, wenn BR die betreffende Cykloide ist. Da er aber bis nach Q_1 gelangt, so sollte man meinen, es sei ein Gleiten mit der Berührung verbunden. Versteht man unter Gleiten, dafs der betreffende Punkt auf die Gerade gelangt und auf derselben, wenn auch nur beliebig wenig sich weiter bewegt, so ist solches Gleiten für jeden Punkt des kleinen Kreises unmöglich. Denn z. B. Punkt B

gelangt erst dann auf die Gerade, wenn der Kreis die Lage M_1 hat, also in Q_1; oder G_1 erst in S_1, wenn Radius G_1G in die Lage S_1S kam.

Nimmt man an, dafs auf einer Linie Punkte existieren (!), so sollte man denken, dafs die unendlichvielen Punkte des Halbkreises BF_1 auf unendlichviele Punkte der Tangente F_1Q_1 gelangten. Nun fragte es sich, ob auf der längeren Strecke F_1Q_1 ebensoviele oder mehr Punkte als auf dem Halbkreise lägen. Lägen ebensoviele Punkte darauf, so müfsten die Punkte der Tangente auf eine gröfsere Strecke verteilt sein, also müfste es Stellen auf derselben geben ohne Punkte, was Unsinn ist. Lägen aber mehr Punkte auf F_1Q_1, so würden einige derselben bei der Berührung des Kreises übergangen werden und es müfsten sich die Punkte des Kreises trennen und Lücken zwischen sich lassen, wenn sie nach der Geraden hin gelangen. Es könnte dann aber nicht eine fortwährende Berührung stattfinden, die aber stattfinden mufs. Errichtet man in irgend einem Punkte der Tangente z. B. S_1 ein Lot, so giebt dasselbe einen Punkt auf der Geraden MM_1. Wäre nun S_1 ein solcher übergangener Punkt, so könnte auch der entsprechende Punkt auf MM_1 kein Mittelpunkt des Kreises sein. Es soll sich aber der gröfsere Kreis so bewegen, dafs er rollt und dabei M immer denselben Abstand von FQ hat, es mufs also M alle Punkte von MM_1 durchlaufen, oder anders gesagt, man kann jeden Punkt dieser Geraden als Mittelpunkt eines solchen Kreises ansehen. Mit der gewöhnlichen Vorstellung der Existenz von Punkten auf Geraden oder Kreisen kommen wir also in Widersprüche, wie schon früher bei anderen Problemen. Sagen wir aber, wir könnten jede Linie mit der Vorstellung von unendlich und beliebig vielen Punkten behaften, so steht uns nichts im Wege die Tangente mit ebenso unendlichvielen Punkten zu behaften wie den Halbkreis, und es brauchten keine Lücken oder übergangene Punkte zu existieren (man vergleiche die früheren Abschnitte über die Behaftung mit Punkten). Aber die Schwierigkeit ist doch noch nicht verschwunden. Denn wir kommen durch die Vorstellung von je zwei entsprechenden, sich hernach deckenden Punkten nicht der Vorstellung der Berührung bei. Diese verlangt durchaus unendlichkleine Strecken. Hat der Kreis MB in der Anfangslage bei F_1 eine unendlichkleine Strecke mit der Tangente gemein und ebenso bei jeder späteren Lage, so müfsten doch — sollte man denken und pflegte man zu denken — die Berührungsstrecken des Kreises sich zusammenaddieren zum Halbkreise BF_1, während die entsprechenden Berührungsstrecken der Tangente sich zusammensetzen müfsten zu der hier viel gröfseren Strecke F_1Q_1. Das ist nach der gewöhnlichen Annahme der Berührungsstrecke, welche

existiert (!), ebenso widerspruchsvoll wie die Vorstellung mit den existierenden Punkten.

Schon seit lange hat man bemerkt, daſs in diesem Problem groſse Schwierigkeiten stecken und meines Wissens mit wenig Glück versucht sie zu entfernen.

Nach unseren Untersuchungen werden wir die Sache folgendermaſsen auffassen. Eine gemeinsame gleichgroſse Berührungsstrecke nehmen wir nur an, wenn, wie bei der Cykloide die Abwicklungsstrecke gleich der krummen Linie sein soll, obgleich auch dies nicht nötig ist (siehe den Abschnitt der Cykloide!).

Das wesenswichtige Dreieck fällt alsdann in eine unbestimmt unendlichkleine Berührungsstrecke zusammen. Hier aber ist, wenn $AM = r$ und $BM = \varrho$ genannt wird, der Halbkreis BF_1 oder die Strecke $F_1R = \varrho\pi$, die Strecke der Berührung aber $F_1Q_1 = FQ = r\pi$; sie verhalten sich wie $\varrho : r$. Man darf sich nun F_1Q_1 in unendlichviele, unter sich gleiche Teilchen zerlegt denken, ebenso den Halbkreis BF_1 in unendlichviele, unter sich gleiche; ein Teilchen der einen Linie aber wird sich zu einem Teilchen der anderen, also $\delta : \delta_1$, wie die ganzen Linien, also wie $r : \varrho$ verhalten. Die Berührung aber wird man sich hierfür ganz genau, nämlich durch das wesenswichtige Dreieck vorstellen, das in diesem Falle nicht mit einer einzigen unbestimmt unendlichen Strecke zusammenklappt; und zwar wird die eine Seite dieses Dreiecks δ sein d. h. das Teilchen der Tangente, und die andere Seite wird δ_1 oder das Teilchen des Halbkreises sein.

Faſst man ganz für sich die Stelle der Berührung als eine unendlichkleine Stelle der Ebene auf, die wir mit dem Endlichen oder Unendlichkleinen ersten Grades behaftet denken, so ist auch hier die Berührung in dieser Beziehung nur als eine unbestimmte unendlichkleine Strecke anzusehen; aber sofort nicht mehr, wenn wir die Tangente für sich mit unendlichvielen Teilchen behaften wollen und den Halbkreis für sich und noch hinzuziehen die Vorstellung, daſs sie sich an einer Stelle berühren sollen. Dann darf beim wesenswichtigen Dreieck die eine Dimension, die mit der Höhe, also mit dem Unendlichkleinen zweiter Ordnung behaftet ist, nicht mehr vernachlässigt werden, sie ist notwendig, sie muſs mitvorgestellt werden. Ebenso müssen mitvorgestellt werden die Seiten des Dreiecks und zwar müssen obenein diese Seiten nicht mehr in einem beliebigen Verhältnisse stehen, sondern durch die Art der ganzen Betrachtung ist das Verhältnis als bestimmt vorzustellen.

Man hat es bei dem ganzen Problem mit einer Zusammensetzung verschiedener Gruppen von räumlichen Vorstellungen zu thun und

muſs sehr vorsichtig bei der Übertragung der einen Vorstellung auf die andere sein, sonst entstehen Widersprüche. Die Schwierigkeiten des Problems ergaben sich daraus, daſs man die Vorstellung einer Berührung ohne weiteres als Vorstellung einer bestimmten Strecke oder eines Punktes fassen und nun beliebig auch in anderer Beziehung benutzen wollte (zur Bildung einer Tangenten- oder Halbkreis-Vorstellung). Man gab ohne weitere Bedenken oder unbewuſst das Wichtigste auf, was das Wesen der Berührung ausmacht, und wollte doch noch von Berührungen sprechen; man verstand ferner die Unbestimmtheit nicht, die im Wesen der Berührung steckt; und endlich fehlte die Möglichkeit solche Unbestimmtheit unter der nötigen Vorsicht in Bestimmtheit zu verwandeln ohne Widerspruch gegen die Linien, auf der beliebige Berührungen vorgestellt werden sollten. Daſs eine unendlichkleine Strecke für sich stets etwas Unbestimmtes ist und nur durch Verhältnisse etwas Bestimmtes wird, oder daſs umgekehrt etwas bestimmtes Räumliches nur in Verhältnissen vorgestellt wird und das Unbestimmte daraus logisch abgesondert werden kann — diese Einsicht erst kann uns mit den übrigen genannten genaueren Vorstellungen die Widersprüche vermeiden lehren.

Es ist nicht schwer für die verschlungene Cykloide entsprechende Betrachtungen anzustellen.

Das Gleiten und die Bewegung.

Wir sahen, daſs bei der gedehnten und verschlungenen Cykloide kein eigentliches Rollen in dem dabei definierten Sinne, aber auch kein Gleiten vorkomme. Wenn ein Punkt auf oder an einer Geraden gleiten soll, so müssen wir uns eine Bewegung desselben auf ihr vorstellen. Ist es ganz klar, was es heiſst: ein Punkt bewegt sich auf einer unendlichen Geraden, wenn man sich keine anderen Punkte darauf vorstellt? Der Begriff der Bewegung selbst erscheint schwierig. Man könnte dafür sagen: ist es ganz klar, ein Punkt solle auf einer unendlichen Geraden stets hinter einander alle denkbaren verschiedenen Lagen einnehmen? Es müſste alsdann die Linie mit der Punktvorstellung sowohl für das Endliche wie das Unendlichkleine erster, zweiter Ordnung usw. behaftet werden, sonst wären es nicht alle möglichen Lagen. Damit ein Gleiten stattfindet, soll der Punkt auch nicht sprungweise in den einen und der anderen Lage vorgestellt werden, das würde sonst ein Springen heiſsen.

Wie dicht an einander sollten denn nun zwei aufeinanderfolgende Lagen angenommen werden? Der Ausdruck „unmittelbar hinter einander" macht die Sache nicht klar. Denn heifst dies vielleicht: mit einem Sprunge, der unendlichklein tausendster Ordnung ist? Nein, es heifst ohne irgend einen Sprung! Also von der ersten Lage zur nächstfolgenden soll gar keine Strecke vorgestellt werden, ein Nichts. Dann müfste der Punkt wieder in seine vorige Lage fallen! Sollen es wirklich zwei verschiedene Lagen sein, so mufs auch irgend ein Abstand, wie klein er auch sein mag, vorgestellt werden; also hätten wir doch wieder ein Springen und kein Gleiten. Es scheint also, als ob die Ersetzung der kontinuierlichen Bewegung durch irgendwelche Lagen nicht anginge.

Versuchen wir es wieder einmal mit der Bewegung selbst! Woher wissen wir, ob ein Punkt sich überhaupt bewegt hat? Gewifs können wir das nicht wissen, ohne uns aufser der ersten Lage des Punktes eine zweite vorzustellen. Ist es nämlich etwa möglich zu sagen: er habe sich bewegt, ohne sich dabei vorzustellen, dafs er sich von seinem ersten Orte entfernt habe — also ohne Vorstellung einer wenn auch noch so kleinen Strecke? Nein die Bewegung erfordert solche Vorstellung mehrerer Orte unbedingt. Stellt man sich im unendlichen Raume einen Punkt vor und dann einen zweiten Punkt, so ist es unmöglich zu sagen, der erste Punkt habe sich an den Ort des zweiten bewegt, wenn man nicht dabei die Punkte als verschieden gelegene zusammen vorstellt. Einen absoluten festen Ort im Raume und dazu einen zweiten absoluten festen Ort, die man einzeln als solche von allen übrigen getrennten erkennen könnte, giebt es gar nicht. Ein Punkt ist niemals wieder erkennbar als derselbe, wenn weiter nichts da ist als der Punkt.

Aber man könnte sagen, der Begriff der Bewegung ist mit der Vorstellung mehrerer Lagen nicht erschöpft. Denn ein Punkt und ein zweiter davon irgend wie entfernter und die Strecke zwischen ihnen ist für sich nichts weiter als eine Strecke behaftet mit der Vorstellung der Endpunkte, aber noch nicht die Bewegung auf derselben zwischen den Punkten hin. Was heifst die Bewegung zwischen ihnen? Ist sie vorstellbar, ohne dafs man wieder verschiedene Orte unterscheidet? An jeder Stelle jener Strecke soll eine Bewegung stattfinden — ohne diese Vorstellung geht es doch wohl nicht! Was heifst an jeder Stelle? Dazu ist wieder die Vorstellung verschiedener Punkte jener Stelle nötig usw. usw. Es mag also sein, dafs die Bewegung durch Vorstellung von verschiedenen Punkten nicht völlig ersetzt wird. Wir sahen mehrfach, dafs die geometrische, durch Be-

wegung definierte Vorstellung sich als Resultat auch ohne Bewegung durch bloſse Lagen beschreiben läſst. Es mag sein, daſs dabei für die Zwecke des Mathematikers etwas der Bewegung Wesentliches fortbleiben darf und deshalb die Ersetzung möglich ist.

Mag auch in der Physik oder sonst der Zeitbegriff zur bloſsen mathematischen Vorstellung der Lagen hinzukommen, nötig haben wir auch in der Physik und überall zur richtigen Vorstellung von Bewegung die mathematische Vorstellung der verschiedenen Lagen.

Definiert man mathematisch: der Punkt ist auf der Linie geglitten, falls er alle Lagen auf der Linie d. h. alle Punkte eingenommen hat, so fragt man doch: wieso ist es derselbe Punkt, der diese verschiedenen Lagen gehabt hat? Dazu ist ein Behaftungsgesetz nötig. Dies könnte beim Gleiten einfach darin liegen, daſs es alle beliebigen Punkte der Linie wären.

Man kann nun aber niemals zu ende kommen, da es — wie wir wissen — nicht beliebige Punkte auf einer Geraden giebt (siehe früher!), sondern da man eine Linie nur mit der Vorstellung von Punkten behaften kann. Also gehört die Linienvorstellung als solche zur Vorstellung des Gleitens, dann aber gehört dazu die Behaftung mit Punkten.

Wählte ich nun die Behaftung mit Punkten im Unendlichkleinen, so würde ich mit beliebig vielen Punkten nicht auf endliche Entfernungen kommen, also auch niemals die Vorstellung einer endlichen Bewegung erhalten. Ebensowenig ergäben Behaftungen mit Punkten in der Weitenvorstellung des Unendlichkleinen zweiter Ordnung Bewegung im Unendlichkleinen erster Ordnung usw.

Um also eine Bewegung im Endlichen auszudrücken, ist es nötig die Linie mit im Endlichen unterscheidbaren Punkten zu behaften, die aber einen beliebig kleinen Abstand von einander haben. Hat der Punkt alle auf einer endlichen Linie endlich unterscheidbaren Punkte ersetzt oder fasse ich alle solche Punkte zusammen zu der Vorstellung, daſs es ein und derselbe Punkt sein soll in so verschiedenen Lagen, so ist er auch auf dieser — kurz gesagt: „endlichen“ Linie geglitten (wobei freilich nicht gesagt ist, ob nur einmal oder mehrere Male und in welchen Richtungen und Zeiten). Auf einer unendlichkleinen Linie aber ist er geglitten, wenn er alle im Unendlichkleinen darauf vorgestellten Punkte vertreten hat oder man sie alle in entsprechender Weise zusammenfaſst. Das Gleiten eines Punktes auf einer Linie ist also — abgesehen vom Zeitbegriff — nichts weiter als das Behaften dieser

Linie mit allen für die betreffende Weitenbehaftung vorstellbaren beliebigen Punkten mit der Hinzufügung der Vorstellung, es sollten diese Punkte aus irgend welchem Grunde oder in irgend welcher Beziehung (z. B. in der Physik als Punkt ein und desselben Stoffatomes) als ein Punkt gegenüber irgend welchen sonstigen Punkten begrifflich zusammengeordnet werden.

Es ist also nötig den Begriff des Gleitens nicht im allgemeinen, sondern für irgend eine Weitenbehaftung festzustellen. Die Weitenbehaftung gehört mit Notwendigkeit zum Begriffe hinzu. Man darf sich wohl erlauben, falls kein Fehler dadurch entsteht, bei Dingen in der endlichen Weitenbehaftung (sinnlich wahrnehmbaren) den Zusatz „in der endlichen Weitenbehaftung" fortzulassen. Aber sofort hat man ihn hinzuzusetzen und sich des Fortlassens bewufst zu werden, wenn bei solchen Vorstellungen das Unendlichkleine vorkommen sollte (man z. B. von unendlichkleinen Atomen sprechen wollte oder derartigen Entfernungen zwischen Atomen).

Wir wollen noch etwas tiefer in das Wesen der Sache einzudringen suchen. Stelle man sich einmal eine unendlichlange Linie ganz für sich vor — wenn man es kann! Was heifst es dann, es gleite auf derselben ein Punkt? Gleitet er nur eine endliche Strecke, so ist's nicht mehr das, was wir erst einmal betrachten wollen. Was heifst es, er gleite auf der ganzen unendlichen Linie? Nach unseren Erklärungen soll man sich also alle Punkte vorstellen. In welcher Weitenbehaftung? In der des Unendlichen? Dann dürfte man sich also nur unendlichentfernte Punkte auf dieser unendlichen Linie vorstellen. Das gelingt sicherlich nicht, wenn man sich nicht wenigstens zwei unendlichlange Strecken der Linie vorzustellen sucht, also mit wenigstens drei solchen Punkten. Sinn hat das Gleiten zwischen zwei solchen Punkten nur dann, wenn man die unendliche Strecke zwischen ihnen wieder mit Punktvorstellung behaftet, die wieder unendliche Entfernungen anderer Länge haben. Mit einem Worte man mufs Verhältnisse von unendlichen Strecken haben, nicht eine einzelne solche. Ebenso ist es mit dem Gleiten im Endlichen. Man kann durchaus nicht mit der Vorstellung einer einzigen endlichen Strecke auskommen. Sagt man, es solle ein Punkt darauf gleiten, so erfordert das unbedingt Einteilung in Strecken, man mufs sich mehrere endliche Entfernungen vorstellen, also Verhältnisse, wenn man auch für diesen Zweck noch nicht sofort anzugeben braucht, welches bestimmte Verhältnis irgend welche davon haben sollen. Während die Vorstellung das durchaus verlangt, ist es begrifflich immerhin möglich, das Gleiten für irgend eine Weiten-

behaftung davon loszulösen. Man spricht nicht von den Verhältnissen, die eine Vorstellung der Sache in irgend einer Art nötig hat, man spricht nur von z. B. allen möglichen endlichen Punkten und läſst dabei fort, daſs irgendwelche so vorgestellten Punkte auf einer Linie auch zugleich die Vorstellung von Streckenverhältnissen in sich schlieſsen.

Wir suchen immer mehr zu ergründen, welche begrifflichen Bildungen das Wesen der Sache vollkommen angeben, was also eigentlich die Vorstellung in irgend einer Weitenbehaftung ist, ob es die Vorstellung einer einzigen endlichen oder unendlichen Strecke für sich überhaupt giebt und so fort.

Maximum und Minimum (grösster und kleinster Wert).

Bei gewissen Problemen der Mathematik scheint es, als ob man nicht auskommen könnte, ohne die Vorstellung der Bewegung bis in beliebige Weiten hinein fortzusetzen. Ein solches Beispiel ist der auch auf den Schulen viel behandelte Fall des Maximums und Minimums, des Anschwellens und Abnehmens von Figuren bei gewissen Vorschriften.

Teilt man die Ebene durch zwei zu einander senkrechte unendliche Axen ein, so kann man bekanntlich die Lage jedes Punktes zu diesem Axensystem durch eine parallel zur x-Axe und eine parallel zur y-Axe liegende Strecke ausdrücken, z. B. die Lage des Punktes A (Figur 25) durch $x = p$ und $y = r$. Befolgt eine Reihe von Punkten ein bestimmtes Gesetz, liegen sie z. B. auf einer Geraden AC, so erfüllt jede x- und jede y-Koordinate irgend eines dieser Punkte eine Gleichung, die Gleichung der geraden und zwar bis ins Unendliche verlängerten Linie. Eine andere Gerade CF oder CD oder vielmehr die Punkte, mit denen man sie behaftet, erfüllen eine andere Gleichung, da die Richtung eine andere ist. Da auf einer Geraden der sogenannte laufende Punkt verschiedene Lagen hat, so ist sowohl das vorkommende x wie y veränderlich, aber man kann doch nicht beiden zugleich einen beliebigen Wert beilegen, vielmehr richtet sich, sobald man der x-Gröſse einen Wert wie p beilegt, die zugehörige y-Gröſse nach diesem Werte und kann aus der Gleichung als $y = r$ ausgerechnet werden. Die eine Variabele, einerlei welche, heiſst die Unabhängige z. B. die x-Gröſse, die andere heiſst dann (!) die abhängige Variabele oder die Funktion von x, eine Funktion bestimmter Art, ausgedrückt

arithmetisch durch die Gleichung, geometrisch durch das Axensystem und die Lage der Geraden. Dies ist allgemein bekannt.

Betrachten wir rein räumlich die Figur 25, so sehen wir, daſs die zum gebrochenen Zuge $ACDF$ gehörigen x-Gröſsen fortwährend zunehmen von $x = p$ bis $x = q$, die zugehörigen Lote AA_1, BB_1 usw. aber nehmen erst zu, dann ab. Legt man durch den oberen Endpunkt einer solchen y-Gröſse wie BB_1 eine Parallele zur x-Axe, so erhält man einen Schnitt E und eine zu diesem zugehörige y-Gröſse (Ordinate) EE_1. Für diese beiden gleichen Ordinaten sind die zugehörigen x-Gröſsen (Abscissen) verschieden, nämlich $x_1 = OB_1$ und $x_2 = OE_1$. Es ist aber nicht nötig, daſs stets zu einer Ordinate auch zwei Abscissen gehören. Beim obengenannten Zuge ist dies freilich der Fall, aber zwischen C und D sind sogar alle y einander

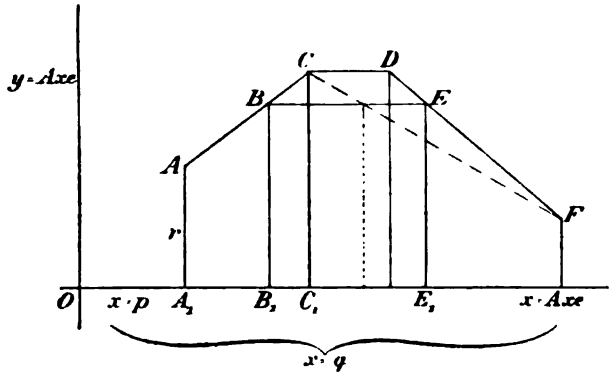


Fig. 25.

gleich bei verschiedenen x-Gröſsen. Bei einem gebrochenen Zuge wie ACF gehört zur Gröſse $y = CC_1$, deren es nur eine einzige giebt, nur ein einziges $x = OC_1$. Man könnte sagen, y habe daselbst seinen gröſsten Wert oder sein Maximum erreicht. Aber wir wissen, daſs für AC und deren Fortsetzung eine andere Gleichung als für CF und deren Fortsetzung gilt, und daſs man die Stelle C d. h. die hierzu gehörigen Werte von x und y findet, wenn man aus diesen beiden zusammengefaſsten Gleichungen den Wert beider Unbekannten nach bekannter Methode (Substitution) aufsucht. Durch diese Zusammenfassung sind die darin vorkommenden x und y nicht mehr laufende Punkte beider Geraden in jeder Gleichung für sich, sondern bezeichnen denjenigen Punkt, der sowohl der ersten wie der zweiten Geraden angehört. Man kann in diesem Falle von einem Maximum der y-Gröſsen innerhalb der einen Gleichung nicht reden. Überhaupt

giebt es für eine Gleichung einer Geraden kein Maximum, denn die Gröfse y wird stets gröfser oder stets kleiner, je weiter man den Punkt auf dieser Geraden fortlaufen läfst.

Anders liegt es mit der Gleichung einer krummen Linie. Die Punkte der Krummen $ABCD$ (Figur 26) sollen einem bestimmten Gesetze in Beziehung auf das Koordinationssystem folgen, welches ausgedrückt wird durch eine (nichtlineare) Gleichung. Man weifs, dafs von den stets wachsenden Werten $x = m_1$ bis $x = m_2$ die zugehörige Ordinate, nämlich AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 zuerst wächst, dann aber wieder abnimmt. Darum kann man schliefsen, dafs dieselbe innerhalb des Zuges AD einmal einen gröfsten Wert haben wird. Bei unserer Figur schneidet eine Parallele zur x-Axe wie PQ die Kurve

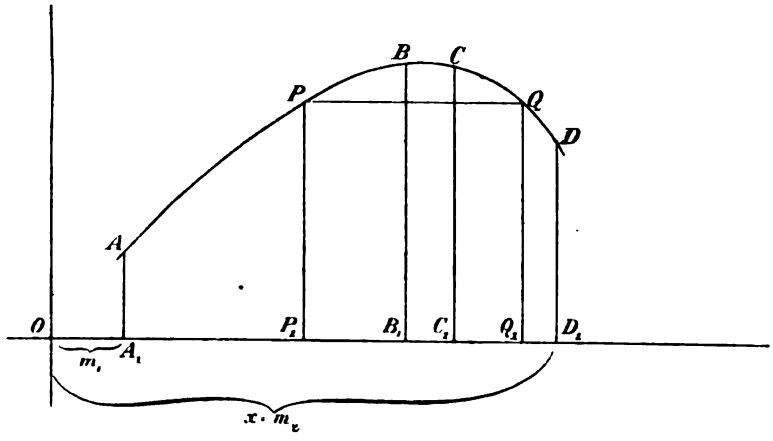


Fig. 26.

zweimal, zu den gleichen y-Gröfsen PP_1 und QQ_1 gehören verschiedene Abscissen. Ist dies stets so, auch an der höchsten Stelle der Kurve? Daselbst kann man sich offenbar eine Tangente zur x-Axe gelegt denken. Zur genauen Vorstellung fanden wir das Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung notwendig. Dies sei BMC, indem wir uns zwischen B und C auf der Kurve, also etwas höher als diese beiden Punkte einen Punkt M vorstellen. Sind die Seiten dieses Dreiecks unendlichklein, und die Winkel B und C ebenfalls, so ist die von M aus gefällte Höhe MF unendlichklein von zweiter Ordnung, und es ist thatsächlich das Dreieck AMC als gerade zu betrachten, falls es sich um die Weitenbehaftung mit dem Endlichen in der y-Richtung handelt. Von allen in dem unendlichkleinen Gebiete der Berührung vorgestellten Punkten ist es nur ein einziger (irgend einer), der von allen aufserhalb jener Berührungsstelle auf der Kurve vor-

gestellten Punkten eine endliche (wenn auch beliebige) Entfernung hat. Auch die drei von B, C und M ausgehenden Ordinaten haben unendlichkleine Abstände, fallen also für das Endliche zusammen zu einer im Endlichen unterscheidbaren Ordinate der Berührungsstelle. Wie steht es aber mit der Länge jener Ordinaten für die Behaftung mit dem Unendlichkleinen, wenn man also die zugehörigen Abscissen um unendlichkleine Gröſsen unterscheidet?

BB_1 und CC_1 sind jedenfalls gleich, wenn BC parallel zur x-Axe liegt, aber auch die über F fortgesetzte Ordinate von M unterscheidet sich von jenen nur um ein Unendlichkleines zweiter Ordnung. Man darf also sagen: die für das Endliche höchste Stelle der Kurve oder das endliche Maximum der Funktion y liegt da, wo die Differenz der Abscissen zweier unendlichnahen Punkte unendlichklein ist, die Differenz der Ordinaten aber für die Behaftung mit dem Endlichen sowohl wie mit dem Unendlichkleinen erster Ordnung Null ist.

Man darf nicht ohne weiteres behaupten, daſs für einen einzigen Punkt das Maximum eintritt oder für einen einzigen Wert von x, sondern nur für einen einzigen bestimmten endlichen Wert von x oder für zwei, nur um unendlichwenig voneinander verschiedene Werte von x, für eine einzige unendlichkleine Stelle der Kurve. Leider herrscht in dieser Bezichung bisher in den Büchern die genannte Unklarheit oder Ungenauigkeit.

Man kann auch sagen, in dem Dreiecke BMF sei $tan\ MBF = MF : BF$, und es werde das Maximum erreicht, falls erstlich BC parallel zur x-Axe gehe und Winkel B unendlichklein sei. Dann ist MF unendlichklein zweiter Ordnung und BF erster Ordnung oder es verschwindet die y-Differenz gegenüber der x-Differenz d. h. man wählt zwei Werte, etwa y_1 und y_2 bei verschiedenem x_1 und x_2 und macht dann $x_1 - x_2 = \delta$ und $y_1 - y_2 = \delta^2$ oder für die höheren Weitenbehaftungen auch $= o$. In der höheren Mathematik nennt man dann $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ oder $\frac{dy}{dx}$ den ersten Differentialquotienten der Funktion y und sagt, das Maximum werde erreicht, wenn dieser gleich o gesetzt wird. Ein solcher Bruch wird nicht gleich o, wenn Zähler und Nenner genau gleich o gesetzt werden; denn o : o ist stets unbestimmt. Dieser Bruch soll aber hier nicht unbestimmt, sondern bestimmt gleich o werden. Dies geschieht nur, wenn der Zähler Null und der Nenner nicht Null wird, oder, da der Nenner unendlichklein ist, wenn der Zähler für die Behaftung des Nenners Null wird. Dazu braucht der

Zähler nicht für jede Behaftung Null zu sein, er kann unendlichklein anderer Ordnung sein, was, wie wir zeigten, hier der Fall ist.

Stellen wir uns nun das Aufsuchen des Maximums rein arithmetisch bei irgend einer Funktion vor und vergleichen damit die Darstellung der Maximum- und Minimumberechnung, wie sie gewöhnlich auf den Schulen zu finden ist.

Die Aufgabe heifse: in ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a ein Rechteck von gröfstem Inhalte zu zeichnen (Figur 27). Es ist der Inhalt des Rechtecks, falls die Seiten m und n heifsen, $F = m \cdot n$. Dies ist eine Gleichung mit drei Unbekannten, doch kann man eine entfernen. Es ist nämlich wegen Ähnlichkeit der Dreiecke ADB und AEF $\frac{a}{2} : h = \frac{a-m}{2} : n$ und hierbei ist wieder $h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Daraus ergiebt sich $n = \frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{m}{2}\sqrt{3}$ und $F = m \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} - m^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} =$

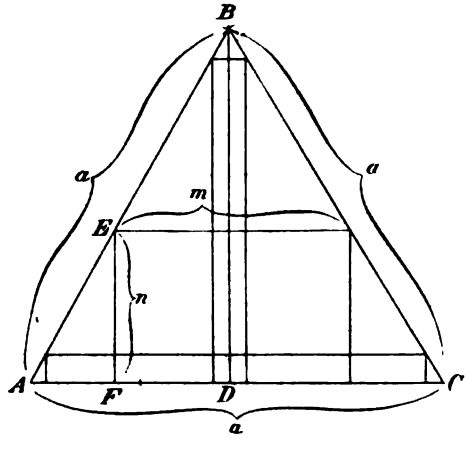


Fig. 27.

$\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(ma - m^2)$ (I). Es stellt hier F die abhängige, früher y benannte, und m die unabhängige, oben x genannte Variabele vor. Doch soll hier die Gleichung (I) $y = x \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} - x^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$ noch nicht geometrisch als eine Kurve gedeutet werden; in unserer Dreiecksfigur stellt $F = y$ keine Ordinate, sondern eine in ganz anderen Einheiten als $x = m$ vorgestellte Fläche dar. Halten wir uns zunächst an die Dreiecksfigur und die rein arithmetische Bedeutung der Gleichung!

Ist $m = a$, so ist die andere Seite des Rechtecks Null, also $F = 0$. Ist $n = h$, also $m = 0$, so ist F ebenfalls = Null. Die Gröfse F beginnt also mit dem Werte Null, wird gröfser und schliefslich wieder zu Null, mufs also wieder kleiner geworden sein. Wir wissen zunächst noch nicht, ob sie ganz plötzlich kleiner wird oder es einen allmählichen Übergang vom Gröfser- zum Kleinerwerden giebt. Nur wird es irgend einen oder mehrere gleiche Werte von F geben, welche am gröfsten sind; und zwar wenn wir uns nur endliche Werte vorstellen, also von unendlichen Differenzen absehen, wird es ein oder

vielleicht mehrere Maxima für die Behaftung mit dem Endlichen geben. Vergleichen wir nun an Zahlenbeispielen die Unterschiede von m und F!

$$\begin{aligned} \text{Ist } m &= \tfrac{1}{10}\,a, \text{ so wird } F = \tfrac{8}{100}\,a^2\sqrt{3} \\ m &= \tfrac{2}{10}\,a \qquad\qquad F = \tfrac{18}{100}\,a^2\sqrt{3} \\ m &= \tfrac{4}{10}\,a \qquad\qquad F = \tfrac{24}{100}\,a^2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Es steigt F hier zunächst beim Verdoppeln von m, nämlich von $\frac{1}{10}\,a$ bis $\frac{2}{10}\,a$ um $\frac{7}{100}\,a^2\sqrt{3}$, beim weiteren Verdoppeln von $\frac{2}{10}$ bis $\frac{4}{10}$ steigt F um $\frac{8}{100}\sqrt{3}$, also stärker als vorher. Es fragt sich, ob dieses verschiedenartige Steigen so fortgeht. Beim Steigen von m auf a wird F gleich Null. Wann hört F wohl auf zuzunehmen? Für $m = \frac{6}{10}\,a$ ist F schon wieder kleiner geworden und hat denselben Wert wie bei $m = \frac{4}{10}\,a$. Also wird das Maximum zwischen den Werten für m gleich $\frac{4}{10}\,a$ und $\frac{6}{10}\,a$ liegen.

Machen wir nun noch etwas kleinere Sprünge, setzen also z. B. Hundertstel!

$$\begin{aligned} \text{Für } m &= \tfrac{40}{100}\,a \text{ war } F = \tfrac{2400}{10000}\,a\sqrt{3} \\ m &= \tfrac{48}{100}\,a \text{ wird es } \tfrac{2496}{10000}\,a^2\sqrt{3} \\ m &= \tfrac{49}{100}\,a \qquad F = \tfrac{2499}{10000}\,a^2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Die Zunahme von F ist erst $\frac{96}{10000}$, dann $\frac{3}{10000}$, es nimmt also sehr wenig zu, während m noch verhältnismäfsig mehr zunimmt. Wir fragen schliefslich: wie wird es, wenn m nur noch unendlichwenig zunimmt, an irgend einer beliebigen Stelle? Wir setzen also lieber statt m den Wert $m + \delta$ und erhalten

$$F_1 = f(m+\delta) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,([m+\delta]\,a - [m+\delta]^2) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,(m\,a - m^2 + \delta\,[a - 2\,m] - \delta^2).$$

Der Unterschied von m und $m + \delta$ ist aber δ. Der Unterschied von $f(m+\delta)$ und $f(m)$ oder $F_1 - F$, auch genannt dy oder erstes Differential der Funktion y, wird

$$\text{(II)} \qquad F_1 - F = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\delta\,(a - 2\,m - \delta).$$

Oben haben wir gesehen, dafs die Differenz der Gröfsen F immer kleiner wird, je mehr wir uns der Stelle des „Wiederabnehmens noch Zunehmens" nähern, nämlich immer kleiner im Vergleich zur Differenz der Gröfsen m. Kann sie jemals ganz verschwinden, während doch der Unterschied der Gröfsen m nicht ganz verschwindet? Falls der Unterschied der Gröfsen m beliebig klein wird, so wird derjenige von F daneben noch viel kleiner. Das „Nochvielkleiner" kann nicht mehr in Betracht kommen, falls er einer niedrigeren Weitenbehaftung angehört. Behaftet man also die Differenz von m mit dem

Unendlichkleinen erster Ordnung, so müfste, falls das überhaupt möglich ist, der Unterschied von F unendlichklein vom zweiten Grade sein, und umgekehrt, ist dies der Fall, so wäre für die Betrachtung des Endlichen und Unendlichkleinen ersten Grades der Unterschied von F gleich Null und wir hätten das Maximum. Ist $m_1 - m$ unendlichklein, so müfste, falls das Maximum vorliegen soll, der Ausdruck (II) ganz fortfallen oder unendlichklein zweiter Ordnung sein. Die Klammer $(a - 2m - \delta)$ müfste gleich o gesetzt werden.

(Es wäre dann $\frac{F_1 - F}{\delta} = 0$ oder nach anderer Ausdrucksweise $\frac{dy}{dx} = 0$. Ich will hier kurz erwähnen, dafs nach Newtons Auffassung auch heute noch viele Mathematiker von dem Werte reden, den $\frac{dy}{dx}$ erhält, wenn die Differenz der x-Gröfsen (oder hier m-Gröfsen) und diejenige der y-Gröfsen (oder hier F-Gröfsen) „verschwindet", nachdem diese Differenzen vorher endliche Werte hatten und nachher auch. Und zwar sagt man, der Wert des Differentialquotienten ergebe sich nicht, ehe die Differenzen verschwinden, auch nicht nachdem sie verschwunden seien, sondern in dem Augenblicke, wo sie verschwinden. Dadurch ist die direkte Vorstellung des Unendlichen vermieden, dafür aber sind Begriffe hineingezogen wie „Verschwinden und Augenblick" d. h. Begriffe aus einer ganz anderen Sphäre, der der Zeit, und es ist durchaus nicht klar, was dieser „Augenblick" ist, der doch auch nicht ohne jeden Zusammenhang mit der vorhergehenden Zeit ist, und was „Verschwinden" in einem Augenblicke heifsen soll. Verschwinden — sollte man denken — wäre etwas, das eine gewisse Zeitausdehnung in sich schlösse; wenn man aber den Augenblick ohne Zeitausdehnung nimmt, so kann man doch nur von „Nichtdasein" sprechen. Doch davon später mehr!)

Für jede Stelle ist $F_1 - F = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\delta\,(a - 2m - \delta)$. Giebt es aber eine Stelle oder einen endlichen Wert von m derart, dafs diese Gröfse nur noch unendlichklein vom zweiten Grade ist? Ja, sobald $a - 2m = 0$ ist; alsdann ist $F_1 - F = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \delta^2$. Also ist ein Maximum vorhanden d. h. ein endlicher Wert von m, eine Stelle oder ein von den übrigen endlichen entfernter Ordinatenfufspunkt oder Kurvenpunkt, wofür selbst bei unendlichkleinen Unterschieden von m die Funktion F dieselbe ist. Es nimmt daselbst F weder zu noch ab, während es vorher und nachher zu- oder abnimmt; freilich könnte es an dieser Stelle wohl noch zu- oder abnehmen, falls unendlichkleine Abweichungen zweiter Ordnung mit in die Betrachtung gezogen werden.

Unsere Aufgabe muſs, falls sie so lösbar ist, also genauer heiſsen: von allen im Endlichen als verschieden vorstellbaren, einem gleichseitigen Dreiecke einbeschriebenen Rechtecken das gröſste zu finden.

Es giebt überhaupt bei einer solchen ab- und zunehmenden Gröſse keinen Begriff des Maximums, der giltig wäre für alle Weitenbehaftungen, sondern Maximum bedeutet nur: gröſster Wert für bestimmte Weitenbehaftung. Das Maximum ist einer Weitenbehaftung hinzugefügt ähnlich (!) wie der Punkt der Linie, die unendlichkleine Strecke der endlichen Geometrie, die unendliche Weitenbehaftung zweiter Ordnung der Weitenbehaftung anderer Ordnungen.

Wir sahen, daſs bei beliebig kleiner endlicher Änderung von m auch F sich änderte, und aus Gleichung (II), daſs sogar bei unendlichkleiner Änderung von m auch, mit Ausnahme der Lage $m = a/2$, eine unendlichkleine, für $m = 2/a$ aber eine unendlichkleine Änderung zweiter Ordnung eintritt. Aus diesen Gründen darf man F bildlich darstellen als eine sich von Stelle zu unendlichwenig entfernten Stellen ändernde Ordinate y und m als die entsprechende Abscisse x. Dann stellt Gleichung (I) eine gewisse Kurve dar, indem man die Endpunkte aller möglichen Ordinaten y als Kurvenpunkte betrachtet. Die höchste Stelle oder der unter allen in endlicher Entfernung voneinander gelegenen Kurvenpunkten höchste Punkt wird erreicht bei $m = a/2$. Dafür ist $x_1 - x_2$ oder $m_1 - m_2 = \delta$ und $y_1 - y_2 = \delta^2$ oder der Quotient $(y_1 - y_2) : (x_1 - x_2)$ ist allem Endlichen gegenüber gleich o zu setzen. Ein Ausdruck für diesen Quotienten mit a und m derart daſs sich bei der Nullsetzung $m = 2/a$ ergiebt, ist zu finden.

In elementaren Büchern findet man eine Regel folgender Art: man rechne aus der Aufgabe die Gröſse, welche Maximum werden soll, als Funktion einer einzigen Unbekannten aus, ausgedrückt durch $y = f(x)$. Dann bilde man $f(x_1) - f(x_2)$, indem man einfach statt x einmal x_1, dann x_2 setzt. Man führt nun die Division $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ aus, was leicht ist, falls im Zählen eine algebraische Funktion von x entsteht wie $x_1^3 - x_2^3$ oder $x_1^6 - x_2^6$. Dieser Quotient ist *tan* α, falls die Punkte der Kurve unendlichnahe aneinander liegen oder gar keine Entfernung mehr haben. Nach der Ausführung setzt man $x_1 = x_2 = x$ und zugleich, um die Stelle des Maximums zu bekommen, den Quotienten gleich o. Dann ist das vorkommende x dasjenige, welches in die Funktion eingesetzt, den Maximal- bez. Minimalwert herstellt.

Für unser Beispiel gäbe dies

$$F_1 - F_2 = (m_1 - m_2)\frac{a}{2}\sqrt{3} - (m_1^2 - m_2^2)\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Dies kann man schreiben $= (m_1 - m_2)\left(\frac{a}{2}\sqrt{3} - (m_1 + m_2)\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

oder $$F_1 - F_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ (a - m_1 - m_2)\ (m_1 - m_2) \qquad \text{(III)}.$$

Ist $m_1 - m_2 = \delta$, also $m_2 = m_1 + \delta$, so stimmt diese Gleichung mit der Gl. (II) überein, und es wird daraus, falls man $a - m_2 = 0$ setzt d. h. für den Wert $m = a/2$, wie oben $F_1 - F_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \delta^2$. Nach der in Schulen vielfach angewendeten Methode aber soll man (III) durch $m_1 - m_2$ oder δ dividieren und dann $m_1 = m_2$ oder $\delta = 0$ und auch den Quotienten $= 0$ setzen. Dies giebt allerdings auch $\frac{F_1 - F_2}{m_1 - m_2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ (a - 2m) = 0$ oder dieselbe Bedingung, wie wir sie hatten.

Aber trotzdem sind hierbei Fehler begangen. Es ist falsch $m_1 = m_2$ zu setzen; denn wenn nun $m_1 - m_2$ genau gleich 0 ist, so entsteht $\frac{F_1 - F_2}{0} = \frac{0}{0}\ (a - 2m)$. Es ist aber $\frac{0}{0}$ stets unbestimmt. Wird also dieser Ausdruck gleich 0 gesetzt, so braucht daraus keineswegs zu folgen, dafs $a - 2m = 0$ ist. Es würde dies einen Punkt bedeuten, nicht eine unendlichkleine Stelle, eine einzige Abscisse und eine einzige Ordinate hierfür, und es brauchte für diese Stelle nicht $2m = a$ zu sein, sondern es könnte m irgend einen anderen Wert haben. Man erreicht mit einem Worte die Stelle des Maximums gar nicht, sondern irgend eine beliebige Stelle. Freilich wenn man nun wieder fälschlich schliefst, dafs hier $\frac{0}{0}$ gleich 1 sein solle, so hebt sich der Fehler dadurch wieder auf, und es mufs sein $a - 2m = 0$, wenn überhaupt $\frac{m_1 - m_2}{m_1 - m_2}\ (a - m_1 - m_2) = 0$ sein soll. Auch dieser Schlufs, der sich durch zwei Fehler ergiebt, ist nicht genau richtig, sondern es mufs heifsen $y_1 - y_2 = \delta^2$ und $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \delta$, oder dem Endlichen gegenüber, für beliebig wenig, aber um Endliches entfernte Stellen ist $m = a/2$, jener Quotient ist unendlichklein, oder dem Endlichen gegenüber ist der Differentialquotient gleich Null.

Man könnte schliefslich noch behaupten wollen, es gäbe doch in der Nähe des höchsten Punktes der Kurve, nämlich unendlichwenig davor und unendlichwenig dahinter zwei Werte der Funktion oder zwei Ordinaten, die genau gleich wären sodafs also $y_1 - y_2$ wirklich gleich 0 wären. Man brauche nur für das y des Maximums die x-Gröfse zu ersetzen durch $x - \delta$ und das andere Mal durch $x + \delta$ und erhalte $F_1 - F_2$ genau gleich Null. Die Differenz der beiden

x-Werte sei 2δ und also auch unendlichklein, und doch gebe es für diese unendlichkleine Differenz von x genau dieselbe Ordinate. Man kann hierbei nicht zum Ziele kommen, wenn man nicht die Division von $x_1 - x_2$ in $F_1 - F_2$ wirklich ausführt. Setzt man nämlich sogleich $F_1 = F_2$, so sind dies zwei aus dem Zusammenhange herausgerissene Werte, der Zusammenhang von F und x geht verloren, also kann man auch keinen endlichen Wert von x gerade für diese Stelle des Maximums finden. Wäre z. B. die Aufgabe derartig, daſs man im Zähler $x_1^3 - x_2^3$ fände, und setzte, statt die Division $(x_1^3 - x_2^3) : (x_1 - x_2)$ auszuführen, im Zähler die Funktionen einfach einander gleich, so erhielte man keine Form, aus deren Nullsetzung man den endlichen Wert von x für das Maximum erhalten könnte. Es liegt dies daran, daſs für die Maximumbestimmung das wesenswichtige Dreieck notwendig ist und daſs die Höhe desselben als eine unendlichkleine Gröſse zweiter Ordnung berücksichtigt werden muſs, man also nicht mit denjenigen beiden Eckpunkten des wesenswichtigen Dreiecks auskommen kann, welche gleiche Abstände von der x-Axe haben, sondern die Veränderung von x um δ derartig vornehmen muſs, daſs man auf eine die Höhe enthaltende Ordinate kommen muſs. In der That greift man in der Mathematik z. B. zur Entscheidung zwischen Maximum und Minimum wieder zu den unendlichkleinen Gröſsen zweiter Ordnung (siehe später). Es ist also jener Einwand nicht gegen die Annahme der unendlichkleinen Gröſsen in der Anschauung zu verwerten.

Will man die Nullen auch als solche Gröſsen gelten lassen, die durcheinander dividiert unter Umständen irgend einen bestimmten Wert liefern also hier $0/0 = 1$ (wie es Euler thut), so muſs man zum mindesten in diesem Gebrauche eine Willkür und eine Ursache zu Miſsverständnissen sehen. Es sind dann die Nullen keine eigentlichen Nullen mehr, es wären Nullen, die entstehen bei unendlichkleinen Veränderungen und dabei die Eigenschaft hätten, durch sich selbst dividiert, eins zu geben, so wie es bei anderen Zahlen der Fall ist. Warum nimmt man dann nicht lieber doch den Namen solcher anderen Zahlen? Offenbar nur darum nicht, weil diese anderen Zahlen unendlichklein zu nennen sind. Ist nun aber gezeigt, daſs der Vorstellung von Verhältnissen unendlichkleiner Zahlen keine logischen Schwierigkeiten mehr im Wege stehen, so wird man jenen Notbehelf von sonderbaren Nullen gern aufgeben.

Das Differential bei Leibniz.

Von den beiden Begründern der höheren Mathematik ist Leibniz derjenige, der am meisten die Zeitvorstellung von den Elementen ferngehalten hat, während Newton in einer weniger philosophischen und mehr physikalischen Weise sogleich Verhältnisse zu unendlichkleinen Zeitteilchen als vorhanden nahm. Bei beiden kann man von einer systematisch gründlichen, logisch und metaphysisch klaren Entwicklung der Grundbegriffe nicht sprechen. Dieselbe ist auch den folgenden Mathematikern, Physikern und Philosophen bis heute nicht geglückt.

Auf Grund der vorstehenden Untersuchungen will ich eine solche Begründung versuchen d. h. es soll — wenn die That dem Wunsche genügend nachkommt — eine Feststellung möglichst einfacher elementarer geistiger Thatsachen erfolgen, und daraus sollen möglichst ohne Widersprüche zusammenhängend die seit Leibniz und Newton bekannten und als brauchbar immer wieder bestätigten Grundlagen des höheren Calcüls erklärt werden. Es wird bei der allgemeinen Bekanntheit der durch jene genialen Männer eingeführten Namen nötig sein auf die Definitionen und die sogenannten Erklärungen derselben zuerst einzugehen und der kurzen kritischen Prüfung ihrer Begründung die versuchte bessere Begründung bei jedem Abschnitte stets folgen zu lassen oder sie einzuflechten.

Die höhere Mathematik unterscheidet sich, wie man sagt, von der niederen dadurch, dafs sie die kontinuierliche oder stetige Veränderung der Gröfsen, den lückenlosen Übergang von der einen zur anderen benutzt. Wir sahen bei unseren Betrachtungen, dafs es auch in der elementaren Mathematik eine Reihe von Problemen giebt, die ohne solche Anschauung nicht lösbar sind und die man doch durchaus nicht übergehen kann, wenn man an der betreffenden Stelle weiter kommen will. Ich erinnere hier nur an die Rektifikation des Kreises und den Tangentenbegriff. Eine absolute Trennung zwischen niederer und höherer Mathematik giebt es demnach nicht — eine Wahrheit, auf die ich zurückkommen mufs, wenn die Untersuchung sich erst durch die Elemente der höheren hindurchgearbeitet hat.

I. I. Baumann und P. Dubois-Reymond wie viele andere scheinen an der Möglichkeit, die höhere Mathematik wenigstens ebenso logisch streng wie die niedere zu begründen, überhaupt zu verzweifeln. Ersterer sagt (Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik, 1869, II, pag. 55, 56):

„So verwerfen wir die logische und metaphysische Rechtfertigung, welche Leibniz dem Calcül gegeben hat, aber diesen Calcül selbst tasten wir nicht an. Wir halten ihn für eine geniale Erfindung, die sich praktisch bewährt hat, für eine Kunst mehr als eine Wissenschaft; rein logisch ist er nicht zu konstruieren, aus den Elementen der gewöhnlichen Mathematik ergiebt er sich nicht" etc. „In ihren höheren Teilen ist die (mathematische) Wissenschaft ein konstruierendes Versuchen, vielfach beeinflufst auch von anderen Betrachtungen, hier z. B. nicht von rein arithmetischen, sondern von geometrischen und mechanischen; diese letzteren Betrachtungen legten den Calcül nahe, man versuchte ihn und fand ihn bewährt; so entdeckte man ihn halb und halb erfand man ihn, und darin besteht seine Rechtfertigung."

Und Dubois-Reymond sagt (Die allgemeine Funktionentheorie, T. I., Tübingen 1882, pag. 2): „Die Lösung des Rätsels, wenn sie mir gelang, ist, dafs es ein Rätsel ist und bleiben wird."

Ich will zunächst die bekanntesten Stellen anführen, in denen Leibniz in seinen Schriften die Elemente der Differentialrechnung definiert. Es kommen sofort in den einfachsten Erklärungen Begriffe vor wie: kontinuierlich, wachsen und abnehmen, Zuwachs und Abwachs (incrementum, decrementum), elementar oder unangebbar kleine Unterschiede. Die Definition des Differentials ist folgende (Leibniz ed. Pertz, III, VII, pag. 222):

„dx significat elementum, id est incrementum vel decrementum (momentaneum) ipsius quantitatis x (continue) crescentis. Vocatur et differentia, nempe inter duas proximas x elementariter (seu inassignabiliter) differentes, dum una fit ex altera (momentanee) crescente vel decrescente".

Das heifst: dx bezeichnet ein Element d. i. einen Anwachs oder einen Abwachs (augenblicklichen) der Gröfse x selbst, die (kontinuierlich) wächst. Es wird auch genannt eine Differenz, nämlich zwischen zwei benachbarten (sehr nahen) x, die sich elementar oder nicht angebbar (bemefsbar) unterscheiden, während die eine aus der anderen wird, die im Augenblicke wächst oder abnimmt.

Leibniz ist schon bei Lebzeiten aufserordentlich oft mifsverstanden und angegriffen worden, es wird ihm vielfach Inkonsequenz und Widerspruch in seinen Definitionen vorgeworfen. Es scheint mir nötig durch Anführung mehrerer Stellen das möglichst klar zu machen, was er gemeint hat, wobei zugegeben werden mufs, dafs seine Ausdrucksweise Anlafs zu Mifsverständnissen geben kann. Er spricht von Element, von Anwachs oder Zuwachs und zwar, wie hier ausdrücklich gesagt wird, von einem augenblicklichen der kontinuierlich wachsenden

Gröfse x. Sein Zuwachs ist also etwas Unendlichkleines. Das Unendlichkleine ist für Leibniz, den Philosophen der Monadenlehre, keineswegs ein Nichts oder ein Nichtvorhandenes. Er nennt es aber etwas Nichtzuteilbares (Nichtbeilegbares oder Nichtbemefsbares), ein Inassignabile oder auch eine Quantitas inassignabilis, eine nicht zuteilbare, nicht bemefsbare Gröfse. Das kann sehr leicht mifsverstanden werden. Was heifst Nichtzuteilbar, Nichtbemefsbar? Man wird noch mehr irre, wenn er gar sagt, solche nichtzuteilbaren, unendlichen oder unendlichkleinen, solche infinitesimalen Gröfsen nützten an sich nichts. So sagte er im Entwurfe der Mathesis universalis (II, VII, pag. 68 ff.): „Dantur et quantitates inassignabiles, eaeque vel infinitae vel infinite parvae seu infinitesimae eaeque rursum varii gradus. Quae etsi per se non prosint, prosunt tamen non raro ad quantitates assignabiles per inassignabilium ambages inveniendas". Also er fügt sofort hinzu, solche unendlichkleinen Gröfsen, die es auch in verschiedenen Graden gäbe, nützten doch nicht selten „um bemefsbare Gröfsen (quantitates assignabiles) auf Umwegen durch die unendlichkleinen zu finden".

Die bemefsbare Gröfse, auch quantitas ordinaria genannt, ist das gewöhnliche, sinnlich Wahrnehmbare oder — wie wir sagen würden — als sinnlich wahrnehmbar wenigstens Vorstellbare, das Endliche. Wenn nun auch Leibniz wohl nicht die Ansicht gehabt hat, die ich in den bisherigen Untersuchungen mehrfach als die am wenigsten widerspruchsvolle und deshalb als die richtigste aufstellte, nämlich dafs ein einzelnes Unendlichkleines nicht bestimmt vorstellbar sei, wenn er auch noch weniger die Meinung hatte, auch das einzelne Endliche sei nicht bestimmt vorzustellen, sondern nur Verhältnisse, so ist doch recht gut zu verstehen, dafs er das Unendlichkleine unbemefsbar nennt, dem Endlichen nicht eigentlich zuteilbar, dafs er aber sagt, man könne das Endliche finden auf den Wegen des Unendlichen. Der Differentialquotient, das Verhältnis von zwei unendlichkleinen Gröfsen giebt oft einen endlichen Wert, und man kann mit Hilfe des Unendlichen oft Resultate für das Endliche finden, die ohne das sich nicht oder nur in einzelnen Fällen ergeben z. B. das Maximum oder Minimum. Er sagt auch an anderer Stelle deutlich genug (III, IV, pag. 322 ff.), ein solches Increment sei nicht ein absolutes Nihil (Nichts), aber es sei unvergleichbar klein (also unvergleichbar bezieht er für gewöhnlich auf das Endliche) und könne nicht mit den Quantitäten verglichen werden, deren Differenz es ist (also mit den beiden endlichen, nur um unendlichwenig voneinander verschiedenen Werten irgend einer Gröfse x oder y); wohl aber könnten solche Incremente unter sich verglichen werden, unter sich seien sie homogen (gleich-

geartet), da als homogene Gröfsen solche gelten, von denen die eine, mit einer endlichen Zahl multipliziert, eine andere übertreffen könne. Leibniz sagt auch deutlich genug, dafs man in der Figur die unendlichkleinen Gröfsen niemals zeichnen könne, sondern dafs die gezeichneten Gröfsen nur die unendlichkleinen andeuten könnten und ihre Verhältnisse dieselben wären wie die der unendlichkleinen. Das in der Zeichnung recht klein Dargestellte repräsentiert nur das Unendlichkleine.

Es ist Leibniz vorgeworfen worden (z. B. durch Euler), er verwechsele „unvergleichbar" und „unendlich". Er meint gewifs, wenn er das Unendlichkleine unvergleichbar nennt, es sei nicht mit dem Endlichen zu vergleichen, nicht aber etwa, es sei mit einem anderen Unendlichkleinen von derselben Ordnung nicht zu vergleichen. Freilich hat Leibniz an verschiedenen Stellen seiner bei verschiedenen Gelegenheiten verfafsten Schriften oder seiner Briefe Gleichnisse gebraucht, welche hinken und welche er selbst gewifs nur als Gleichnisse für den anwenden will, der sich sonst gar keinen entfernten Begriff machen kann. Wie könnte er sonst z. B. den Unterschied vom Endlichen und Unendlichkleinen klarmachen wollen, indem er an den Erdradius und im Vergleiche dazu die Entfernung der Fixsterne erinnert? Der Vergleich würde ganz richtig sein, wenn man die Entfernung der Fixsterne als wirklich unendlichgrofs ansehen wollte. Das ist sie nicht, und Leibniz hätte unterrichtlich besser gethan sofort hinzuzusetzen, man dürfe aber nicht vergessen, dafs schliefslich für einen, welcher für grofse Zahlen eine Vorstellung hat, auch die Fixsternentfernung durch den Erdradius ausgedrückt werden könne, dafs also insofern der Vergleich falsch sei. Ein Widerspruch zu der zuerst angegebenen Definition von dx wird namentlich auch in der folgenden Stelle gefunden (Nova methodus pro maximis et minimis): „Demonstratio omnium facilis erit in his rebus versato et hoc unum hactenus non satis expensum consideranti, ipsas $dx\ dy\ dv\ dw\ dz$ ut ipsarum $x\ y\ v\ w\ z$ (cuisque in sua serie) differentiis sive incrementis vel decrementis momentaneis proportionales haberi posse". Doch läfst sich die Sache etwa so auffassen: die Gröfsen $dx\ dy$ usw. können untereinander in Verhältnisse treten wie $dx : dy$ und diese können in eine Proportion gesetzt werden mit Differenzen der Gröfsen $x\ y$ usw. Also man kann schreiben: $dy : dx = y_1 - y_2 : x_1 - x_2$. Natürlich kann hierbei $y_1 - y_2$ dasselbe sein wie dy, sobald y_1 und y_2 unendlichnahe aneinander liegen, eine unendlichkleine Differenz haben. Aber nötig ist es nicht gerade, denn wenn man auch unter der unendlichkleinen Differenz $y_1 - y_2$ etwas anderes versteht wie unter dy und ebenso $x_1 - x_2$ einen

anderen Wert haben soll wie dx, so kann doch die Proportion richtig sein; es kann z. B. zwei unendlichkleine ähnliche Dreiecke geben, das eine habe die Katheten dy und dx, das andere die davon verschiedenen $y_1 - y_2$ und $x_1 - x_2$. Ein gründlicher Beweis folgt in den nächsten Abschnitten. Wenn aber jemand besser zu verstehen glaubt, was ein momentaner Zuwachs oder eine momentane Abnahme sei, so kann er auch sagen: $dy : dx$ sei gleich dem Verhältnisse der Zuwachse von y und x. Er kann sich dann die Zuwachse (oder auch die Abwachse) immerhin, wenn er will, anders denken als etwa die unendlichkleinen Differenzen zwischen zwei unendlichnahen Werten von y und x. Natürlich ist das nur ein Zugeständnis an einen, der es nicht so recht versteht und nicht mit einem Ausdrucke zurechtkommen mag; für den, der gründlich versteht, ist es klar, daſs es überhaupt nur auf das Verhältnis von unendlichkleinen Gröſsen an kommt, daſs aber eine einzeln vorgestellte Gröſse des unendlichkleinen Gebietes etwas ist, womit man nichts anfangen kann, was „nichts nützt" — wir würden sagen: was höchstens begrifflich, nicht aber in der Vorstellung als etwas Bestimmtes existieren kann.

Leibniz hätte sich der Ausdrücke „momentan" oder „Augenblick", „Verschwinden", „acte d'évanouir" enthalten können, seine Begründung hätte alsdann folgerichtiger ausgesehen. In noch schlimmerem Lichte erscheint dieselbe, wenn man liest, die Ruhe sei wie eine unendlichkleine Bewegung oder müsse betrachtet werden als aequivalent einer Spezies ihres contradiktorischen Gegenteiles.

Wir wollen uns auf diese Begründung, auf das „Kategorematisch-Unendliche und das Synkategorematisch-Unendliche" nicht weiter einlassen. Sehen wir nur zu, ob wir nach unserer Auffassung eine Art Sinn hinter seinen Worten finden können!

Eine Linienstrecke x habe eine bestimmte Länge. Der Endpunkt sei in Ruhe d. h. man stelle sich keine Verlängerung der Strecke vor. Will man nun annehmen, die Linie verlängere sich über diesen Endpunkt hinaus, so bewegt sich derselbe gewissermaſsen; wenigstens können wir uns alle möglichen Verlängerungen kurz unter einer beliebigen Weiterbewegung vorstellen. Es fragt sich dabei aber sofort, um wieviel verlängert sie sich? Hat die Strecke eine endliche Länge und wollen wir die unendlichlang gedachte nur mit endlichen Streckchen behaften, also nur solche Punkte vorstellen, die voneinander endliche, aber sonst beliebigkleine Entfernungen haben, oder nur solche Streckenzusätzchen, die endlich sind, so würde die kurze Bezeichnung dafür die im Endlichen merkbare Bewegung sein. Dies ist die gewöhnliche, sinnlich wahrnehmbare Bewegung. Alles, was man

hierbei nicht mit wahrnimmt, z. B. ein unendlichkleiner Zuwachs, ein Hinausgehen des Endpunktes um Unendlichwenig, würde für die endliche Bewegung so gut wie gar nicht vorhanden sein, keine endliche Bewegung sein. Wenn also Leibniz gesagt hätte, für eine endliche Bewegung oder eine Bewegung auf einer Linie, die — wie wir sagen — nur mit der endlichen Weitenvorstellung behaftet sei, wäre eine unendlichkleine Bewegung dasselbe oder gleichwertig mit Ruhe, so hätte er sich exakt ausgedrückt. Ich lasse dahingestellt sein, ob dergleichen von ihm gemeint war. Genug, dafs wir mit dieser Auslegung ihn wohl verstehen, wenn wir auch dabei bleiben müssen, es sei äufserst wünschenswert stets hinzuzusetzen, in Beziehung auf welche Weitenbehaftung hier das Wort „Ruhe" gebraucht werden könne.

Für die Weitenbehaftung mit dem Unendlichkleinen ist die Bewegung von unendlichkleiner Gröfse zweiter Ordnung gleichbedeutend mit Ruhe usw. Besser gesagt: eine unendlichkleine Bewegung zweiter Ordnung hat für die unendliche Bewegung erster Ordnung oder die endliche Bewegung usw. keine Bedeutung (aufser wenn sich die kleinen Bewegungsstrecken unendlichoft summieren und dadurch einen Wert in dem anderen Weitengebiet erhalten).

Das Grenzgebiet eines endlichen Wertes. Kontinuierlich.

Einer veränderlichen Gröfse vermag der Geist allerlei Werte beizulegen. Es ist nach allen bisherigen Untersuchungen dringend nötig, sofort einen Unterschied zu machen, ob wir ihr verschiedene Werte aus der Weitenbehaftung des Endlichen oder Unendlichkleinen usw. weiter beilegen wollen. Natürlich können wir infolge der thatsächlichen Veranlagung Werte aus allen beliebig vielen Weitenbehaftungen wählen. Der gewöhnliche Mensch pflegt sich an das Endliche zu halten. Jeder, der über das Unendliche nachdenkt — und das thun sogar die rohesten und ungebildetsten Menschen — geht damit zu Werten eines anderen Weitengebietes über. Man hat die Neigung, die Möglichkeit vieler Weitenbehaftungen durch ein Wort auszudrücken. Eine gerade Linie z. B. kann man sich stets wieder verlängert denken um beliebigkleine, aber endliche Werte (Strecken). Man kann aber auch irgendwo, sobald es einem gefällt, an einen Endpunkt herangesetzt denken eine unendlichkleine Strecke erster Ordnung. Natürlich hat diese dann keine zu den bisherigen endlichen

Strecken in bestimmtem Verhältnisse ausdrückbare Länge, sie ist unbestimmt unendlichklein. Man kann aber auch statt dessen gleich eine Strecke von unendlicher Kleinheit zweiter Ordnung angesetzt denken, diese ist unbestimmt klein im Vergleiche mit den endlichen sowohl wie den unendlichkleinen Streckchen; also auch an jedes vorgestellte unendlichkleine Streckchen läfst sich ein solches von unendlicher Kleinheit zweiter Ordnung zugefügt denken usw. Dadurch wird dann die Länge der Strecke für die Weitenbehaftung des Unendlichkleinen erster Ordnung nicht verändert. Jeder Zusatzwert verändert nur die Werte desjenigen Weitengebietes, dem er selbst angehört.

Kontinuierlich nennen wir diejenige Vergröfserung eines Wertes, die mit jeder beliebigen Weitenvorstellung behaftet ist.

Der Raum und die Zeit haben die Eigentümlichkeit, dafs man ihre Gröfsen kontinuierlich verändern kann. Den Menschen ist das so selbstverständlich, es liegt so sehr in ihrer Erfahrung, in ihrem fortwährenden Vorstellen, dafs sie beim Aussprechen eines einzigen Wortes wie „stetig" oder wie „lückenlos" wissen, was man will. Damit ist aber keineswegs gesagt, dafs diese Vorstellung eine unzerlegbar einfache wäre. Der Raum ist den Menschen auch etwas äufserst Vertrautes, jeder weifs sofort, was man will, wenn man ein räumliches Wort gebraucht; und doch hat es die gröfsten Schwierigkeiten zu sagen, was der Raum eigentlich ist; und doch liegen in der Vorstellung Raum so viel einzelne Vorstellungen, dafs man nicht imstande ist sie jemals zu erschöpfen. Man hat also allen Grund nicht einfach zu sagen, es sei ganz klar, was lückenlose Fortsetzung, Verlängerung, Vergröfserung eigentlich sei. Das ist höchst schwierig. Und weil es so schwierig ist, so entstehen so viele Schwierigkeiten bei den Wissenschaften, die sich genau damit beschäftigen wollen, bei der Physik und der höheren Mathematik.

Es ist also nötig das Kontinuierliche in einzelne Begriffe zu zerlegen. Ohne das wissen wir zwar ungefähr, was man damit meint, aber man kann gröfsere Schwierigkeiten nicht überwältigen. So müssen wir die vielen Mifsverständnisse, die sich noch heute in der Auffassung der höheren Mathematik zeigen, besonders dem Mangel an einer klaren Unterscheidung dessen zuschreiben, was wir thun, wenn wir nach völligem geistigen Belieben d. h. nach den thatsächlich vorhandenen verschiedenen geistigen Fähigkeiten, einen endlichen Wert, eine endliche Zahl oder endlichräumliche Strecke (oder Zeit etc.)

verändern und zwar in der Art verändern, die wir nicht sprunghaft, sondern zusammenhängend nennen. Das bloſse Wort: „nach Belieben verlängern" macht es nicht. Wir müssen stets hinzusetzen, nach welcher Weitenbehaftung oder, wenn wir keine bestimmte wählen, nach irgend einer Weitenbehaftung, oder, wenn wir das Allgemeinste ausdrücken wollen, nach jeder Weitenbehaftung.

Denke ich mir eine endliche Strecke kontinuierlich verlängert, so heiſst das genau gesagt: man denke darangesetzt eine Strecke, die unendlichklein ist von der unendlichsten Ordnung, dann wieder solche von derselben Ordnung usw., solange bis alle diese unendlichvielen zusammen eine Strecke ergeben von einer um eins höheren Ordnung u. s. f. Mit einem kolossalen Sprunge in unseren Worten (!) gelangen wir dann schlieſslich zu einer unendlichkleinen Strecke erster Ordnung, dann zu einer beliebig kleinen endlichen Strecke u. s. f.

Es wäre höchst langweilig dies jedesmal alles hinzuzusetzen. Zum Glück dreht es sich bei vielen Untersuchungen nur um Weitenbehaftungen bestimmter Ordnung; und zum Glück haben eine oder beliebigviele (nur nicht unendlichviele) Strecken irgend einer Ordnung nach dem bekannten Gesetze keine Bedeutung für eine Streckengröſse einer höheren Ordnung der Weitenbehaftung. Aus diesem Grunde — aber nur aus diesem Grunde verfahren wir auch richtig, wenn wir uns bei einer kontinuierlichen Bewegung stets nur solche Werte vorstellen, die den gerade betrachteten Weitenbehaftungen angehören. Sobald unsere Untersuchung ihren Blick erweitert z. B. eine neue Weitenbehaftung berücksichtigen muſs, so muſs sie auch sofort berücksichtigen, daſs dann zur kontinuierlichen Veränderung auch die Gröſsen dieser neuen Weitenbehaftung hinzugehören.

Es giebt also für jede Untersuchung nur eine kontinuierliche Veränderung bestimmter Weitenbehaftungen; die kontinuierliche Veränderung ist ein relativer Begriff und muſs stets als solcher aufgefaſst werden, sobald es sich um spezielle Untersuchungen handelt.

In einer Funktion oder in einer Gleichung mit den veränderlichen Gröſsen x und y soll eine derselben kontinuierlich veränderlich sein. Was das heiſst, ist nach dem Gesagten klar. Lassen wir sie also zuerst kontinuierlich veränderlich für die endliche Weitenbehaftung sein. Ich will dafür den Ausdruck gebrauchen: kontinuierlich im Endlichen (und entsprechend kontinuierlich im Unendlichkleinen erster Ordnung usw.). Dann gehört zu irgend einem endlichen Werte

von x ein endlicher Wert von y (bisweilen auch mehrere). Denkt man sich aber solchen endlichen Wert $x = OP$ (Figur 28) um irgend ein unendlichkleines Stück PP_1 oder dx verlängert, so ist für die Weitenbehaftung mit dem Endlichen P_1 kein von P verschiedener Punkt und P_1B keine von PA verschiedene Ordinate, B kein von A endlich verschiedener Punkt und der Bogen der Kurve AB ist kein endlicher Zuwachs der Länge der im Endlichen betrachteten Kurve. Für den Begriff, daſs x und y kontinuierlich im Endlichen seien, haben alle diese Gröſsen keinen Einfluſs, aber wohl für den Begriff, daſs sie kontinuierlich im Unendlichkleinen seien. Wie weit in der Vorstellung des Unendlichkleinen nun eigentlich P_1 von P entfernt sei, das ist vorläufig ganz beliebig, so lange man nur von einer solchen unendlichkleinen Strecke dx spricht. Zwischen P_1 und P giebt es für die Weitenbehaftung mit dem Unendlichkleinen noch unendlichviele andere Punkte, die man ebensowohl als Endpunkt des endlichen Wertes ansehen könnte oder deren Wahl für das Endliche bedeutungslos ist. Auch könnte eine unendlichkleine, aber sonst beliebigkleine Strecke dx ebensogut von x abgezogen werden, also der Punkt P_1 zwischen O und P liegen, wenn er nur von P aus eine unendlichkleine Entfernung hat. Es giebt demnach ein vorstellbares Gebiet in der Gegend oder an der Stelle (genau gesagt: endlichen Gegend oder endlichen Stelle) des endlichen Endes des endlichen x-Wertes, ein Gebiet, das unendlichklein aber sonst beliebig ist. An jedem Punkte desselben kann der endliche x-Wert endigen und in jedem kann man die endliche y-Koordinate errichtet denken. Ebenso giebt es für das Ende der bestimmten Ordinate y auf der Kurve ein Gebiet, welches nur Bedeutung hat für das Unendlichkleine und alles, was damit zusammenhängt. Wir wollen solches Endgebiet eines endlichen Wertes das Grenzgebiet desselben nennen.

Entsprechend giebt es natürlich ein Grenzgebiet für jeden unendlichkleinen Wert, welches selbst nur Bedeutung für das Unendlichkleine zweiter Ordnung hat usw. Offenbar hängen diese Bestimmungen mit dem wesenswichtigen Dreiecke und andererseits mit Leibnizens charakteristischem Dreiecke zusammen. Dies ist näher zu untersuchen und dabei der Beweis zu liefern, daſs Leibniz sich wohl so ausdrücken durfte, wie im vorigen Abschnitte angeführt wurde.

Das wesenswichtige und charakteristische Dreieck in ihrem Zusammenhange.

Es seien ACB (Figur 28) irgend drei unendlichnahe Punkte im Grenzgebiete irgend eines im Endlichen unterscheidbaren Kurvenpunktes, also gehörig zu dem betreffenden endlichen x- und y-Werte. Dann sind in dem von ihnen gebildeten wesenswichtigen Dreiecke die Winkel A und B unendlichklein und die Höhe CD ist unendlichklein vom zweiten Grade (angedeutet durch: vom Grade δ^2). Die charakteristischen Dreiecke AB_1B und AC_1C haben für die meisten Stellen der Kurve endliche Winkel und unendlichkleine Seiten (ich denke zunächst wieder an Kurven zweiten Grades wie den Kreis). Sie sollen irgend welche Dreiecke im Grenzgebiete jener zusammengehörigen

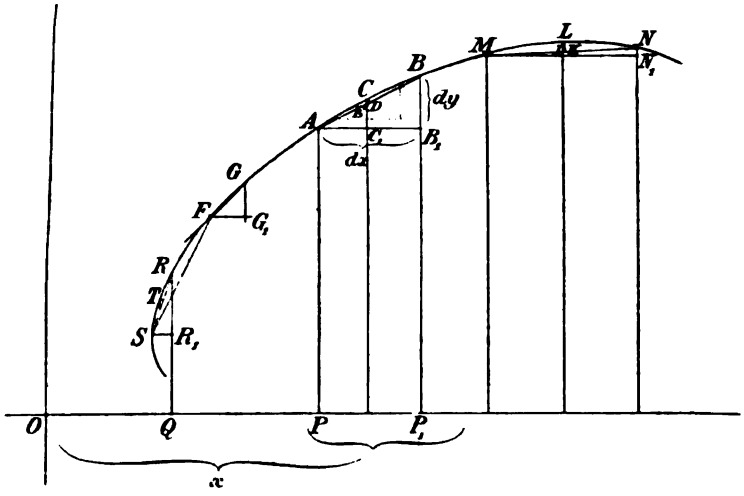


Fig 28.

endlichen Werte von x, y und dem Kurvenpunkte sein, und sind gebildet aus Katheten dx und dy. Sie seien hier zunächst einmal so gewählt, dafs der Eckpunkt A gemeinschaftlich sei. Es ist Dreieck AB_1B ähnlich AC_1E und zwar ganz genau auch für die Weitenbehaftung mit dem Unendlichkleinen. Es ist AB_1 gleich dx und $B_1B = dy$. Ferner ist auch AC_1 ein unendlichkleiner Zuwachs des betreffenden, anfangs angenommenen endlichen Wertes von x, also ebenfalls zu bezeichnen mit dx oder, da es im Unendlichkleinen selbst nicht genau dasselbe ist wie AB_1, zu bezeichnen mit dx_1. EC_1 aber ist von dy_1 um die Strecke CE verschieden. Darf man CE vernachlässigen oder für bedeutungslos erklären und behaupten, es sei $dy : dx = dy_1 : dx_1$?

Da CD vom Grade δ^2 und die Winkel des — wie ich sagen will — vermittelnden Dreiecks CED dieselben sind wie die des Dreiecks AC_1E oder des charakteristischen Dreieckes ABB_1, also z. B. $cos\ ECD = CD/CE$, so mufs auch, für die meisten endlichen Werte von x bez. y, CE vom Grade δ^2 sein; denn sonst würde der Bruch nicht einen endlichen Cosinuswert ergeben. Folglich hat CE als Summand neben der unendlichkleinen Gröfse ersten Grades C_1E keine Bedeutung. Handelt es sich also nur um die Weitenbehaftung mit dem Unendlichkleinen ersten Grades, will man z. B. nur das Verhältnis $dy : dx$, den Differentialquotienten, ausdrücken, so hat EC_1 denselben Wert wie dy_1.

Verschiebt man das Dreieck ACC_1 so wie in der Figur durch punktierte Linien angedeutet ist, also dafs AB von den Katheten kleine Stückchen abschneidet, so kann man leicht durch kleine rechtwinkelige Hilfsdreiecke (siehe Figur!) beweisen, dafs diese Stückchen vom Grade δ^2 sind. Also ist das unendlichkleine Dreieck ACC_1 auch in dieser Lage ähnlich ABB_1. Mithin ist jene Proportion für alle charakteristischen Dreiecke im Grenzgebiete eines bestimmten endlichen Wertes giltig.

Wie gezeigt, hat das vermittelnde Dreieck ebenso wie das charakteristische in den meisten Kurvenstellen endliche Winkel, aber Seiten vom Grade δ^2, während die des charakteristischen vom Grade δ sind. Für das Grenzgebiet eines x-Wertes OQ d. h. an einer Stelle, wo die Tangente der Kurve senkrecht auf der x-Axe steht oder nur unendlichwenig von dieser Richtung abweicht, ist der Winkel S des charakteristischen Dreiecks $90^0 - \delta$, Winkel R aber unendlichklein. Die Kathete SR_1 ist hier vom Grade δ^2 und im vermittelnden Dreieck sind hier entsprechend zwei Seiten unendlichklein vom ersten Grade, während die dritte, die Höhe des wesenswichtigen Dreiecks vom Grade δ^2 bleibt. Dies gilt aber nur für die Stelle der Berührung mit jener senkrechten Tangente selbst. Ist z. B. die Sehne FS eine endliche, wenn auch sonst noch so kleine Entfernung, so bildet sie mit der Tangente FG einen endlichen Winkel, also ist Winkel F des dortigen charakteristischen Dreiecks um einen endlichen Wert von 90^0 verschieden und Winkel G nicht unendlichklein.

Im Grenzgebiete für denjenigen Wert von x, welcher dem Maximum entspricht, aber hat das charakteristische Dreieck MNN_1 einen unendlichkleinen Winkel M und NN_1 ist vom Grade δ^2. Im vermittelnden Dreieck aber ist alsdann der Winkel bei L unendlich-

klein, also da LI und LK vom Grade δ^2 sind, so wird hier IK unendlichklein vom dritten Grade.

Die thatsächliche Verknüpfung von Raum und Zeit (am Beispiel des Falles).

Fällt eine Kugel in der Stube von der Decke zum Fufsboden, so kann man sich allerdings die ganze Bahn auf einmal oder in beliebiger Reihenfolge in allen ihren Teilen vorstellen. Aber es ist eine Thatsache, dafs wir sinnlich nicht etwas auf einmal sehen, was die Vorstellung der Bahn in uns erzeugt, sondern wir sehen die Kugel zuerst an anderer Stelle als nachher und am Schlusse. Was heifst: an anderer Stelle? Es ist eine Thatsache, dafs die räumlichen Verhältnisse, welche in uns, abgesehen von den Farbenempfindungen usw., die Figur der Decke veranlassen, im Verlaufe des Falles nicht mehr dieselben Verhältnisse mit dem Orte der Kugel bilden. Also eine Veränderung der Verhältnisse findet statt. Und diese ist eigentümlicher Art. Denken wir, es hinge eine Pendeluhr an der Wand, deren Pendel Sekunden zeigte, oder die einen Sekundenzeiger hätte, so haben wir daselbst ebenfalls eine Veränderung der räumlichen Verhältnisse der Wand oder des Uhrgehäuses und des Zeigers. Vergleichen wir diese Veränderung mit derjenigen der fallenden Kugel! Es ergeben sich dann die bekannten Erfahrungsgesetze des Falles. Die Kugel zeigt im ersten Zeitteil, dargestellt durch ein Rücken des Zeigers etwa um einen Bruchteil des Sekundenabstandes, für unser Auge andere Verhältnisse als im zweiten usw., nämlich die — wie wir sagen — in demselben Zeitteilchen oder — wie wir hier vorsichtiger sagen wollen: bei derselben Veränderung des Zeigers — zurückgelegten verschieden lange Wege.

Wer sagt uns, warum? Wir nehmen sinnlich keine Gründe wahr, aber wir denken uns Gründe dazu. Alles Ungewöhnliche, Unregelmäfsige, alles von einer anderen gewohnten Wahrnehmung — der der Uhr — Abweichende — fordert uns dazu heraus. Mögen diese Gründe aber auch sein, was sie wollen, es wird uns etwas aufgedrängt, was nicht von unserem Belieben abhängt. Die Zeitvorstellung an sich ist eine seelische Thatsache. Dafs aber in diesem Falle sich mit den wahrgenommenen räumlichen Verhältnissen die Zeit verknüpft, können wir nicht leugnen. Wir nennen das Bewegung und sehen an dem Falle der Kugel ganz deutlich: es liegt eine Regelmäfsigkeit vor, die sich im Raume offenbart, aber auf eine von unserem Belieben un-

abhängige Art mit der Zeit verknüpft ist. Und zwar ist die Kugel in jedem — wie wir sagen — Augenblicke an einem anderen Orte, sie macht keine Unterbrechung in der fortwährenden Veränderung ihrer Stelle unter den übrigen räumlichen Gestaltungen, sie (oder genau ihr Schwerpunkt) ergiebt das Bild einer Linie und zwar einer Geraden, und wir sind im stande durch unseren Willen in jedem Momente zu beobachten, wie lang die Bahn bis dahin ist. Die Verlängerung einer Bahn ist räumlich dasselbe, als wenn wir uns Stücke hinzu vorstellen, diese Stücke können freilich je nach unserem Belieben — nämlich je nach dem Momente, in dem wir die Beobachtung machen — klein oder grofs gewählt werden, sie können und müssen sogar — was sinnlich nicht mehr wahrnehmbar ist — nach ähnlichem Belieben unserer räumlichen Vorstellungsgabe unendlichklein beliebigen Grades vorgestellt werden, aber wir müssen doch zu berücksichtigen suchen, dafs die uns sichtbare Kugel selbst sich um dieses Belieben nicht bekümmert. Wie sollen wir beurteilen, welches die Verhältnisse der Bahn sind, wenn wir sie einteilen nach dem, was man den wirklichen oder objektiven Zeitverlauf nennt? Mit dem bloſsen psychologischen Beurteilen der Zeiten, in denen irgendwelche Strecken der Bahn von der Kugel in den Raum gezeichnet werden, kommen wir da nicht aus. Wir wissen aus vielen Erfahrungen, dafs wir uns täuschen, d. h. dafs unsere Erwartung gewisser Ereignisse nicht genau eintrifft. Wir können nicht jederzeit bei geschlossenen Augen genau sagen, wie weit inzwischen der Zeiger der Uhr vorgerückt ist. Also wir merken einen Zwiespalt zwischen der psychologischen Zeit und der Zeit, die sich gewissermafsen geheimnisvoll da draufsen, in dem, was wir objektive Welt nennen, abspielt und was wir an den Strecken der objektiven Welt, z. B. den Zeigerstrecken sehen. Mag nun diese objektive Welt auch Vorstellung sein oder nicht, mag nun unser Belieben, unser Wille, unsere Seele sein, was sie wolle, oder in irgend welcher Beziehung zu der sogenannten objektiven Welt stehen, wir spüren den Unterschied zwischen der ganz beliebigen Einteilung der Fallstrecke durch seelische Momente ohne Berücksichtigung der Apparate und der eigentümlichen Beziehungen derjenigen Fallstreckchen heraus, die durch die Zeiger- oder Pendelstrecken des Uhrzeigers bestimmt werden. Es ist nötig zu untersuchen, welcher Art die Regelmäfsigkeit ist, die wir etwa an der Uhr wahrnehmen und die ebenfalls sowohl mit dem Raume wie mit der Zeit zusammenhängt.

Gleichheit von Zeiten, beurteilt nach Streckengleichheit.

Philosophische Thatsachen über die Zeitvorstellung können hier nicht verschwiegen werden, wenn wir auch ihr Wesen an dieser Stelle nicht versuchen aufzuklären. (Näheres hierüber in meinem Buche: Eine mögliche Wesenserklärung für Raum, Zeit, das Unendliche usw. Gutenberg, Berlin. Man vergleiche auch meine mathematische Geographie; Abschnitt: die Sicherheit der grundlegenden Schlüsse u. a.).

Es ist ist eine Thatsache, daſs wir wissen, was der Begriff „gleiche Zeiten" bedeutet. Ob wir nun mit Sicherheit zwei sich abspielende gleiche Zeiten feststellen können oder nicht, die Zeit ist eine Art von Vorstellung, eine Gabe der Seele, in welcher die Gleichheit oder Ungleichheit von Stücken vorgestellt werden kann. Was sind nun aber gleiche Zeiten in der objektiven Welt, in der physischen Natur? Die Zeit, die sich gewissermaſsen da draufsen abspielt, ist natürlich keine andere, als die sich zugleich in der Seele abspielende, vielmehr sind wir überzeugt, daſs letztere und alles, was es in der objektiven Welt giebt, an demselben allgemeinen Zeitverlaufe teilnimmt. Da wir aber durch unsere Seele allein niemals genau sagen können, es seien seit jenem Gedanken bis zu einem zweiten und vor diesem bis zu einem dritten oder zwischen bestimmten Momenten der seelischen Existenz gleiche oder ungleiche Zeiten vergangen, so suchen wir die Sache durch andere Mittel festzustellen.

Darüber will ich mich hier kurz fassen. Der Himmel scheinbar oder, wenn Kopernikus Recht hat, die Erde wirklich dreht sich in einer gewissen Zeit einmal herum, sodaſs der Himmel uns wieder dieselben Verhältnisse zum Horizonte zeigt. Ob der nächste Sterntag wieder genau ebensolang ist — wer weiſs es? Warum nimmt man es an? Weil dieselbe Art von Vorgängen sich wiederholt. Der nächste Tag ist nicht etwa viel, viel voller von Ereignissen in der Natur und am Himmel, sondern es zeigt sich Regelmäſsigkeit in der Summe der Vorgänge, wenn auch unsere seelischen Vorgänge an verschiedenen Tagen eine recht verschiedene Summe von Ereignissen zeigen können. Zu den sehr regelmäſsigen den Tag füllenden Ereignissen der Natur gehört das Schlagen des Pendels. Während die Sonne oder ein Stern denselben Winkel, gemessen durch ein bewegliches Winkelgestell, zurücklegt, etwa den einer sogenannten Stunde, geht auch eine Pendeluhr in gleicher Art oder wenigstens ziemlich in gleicher Art. Darum glaubt man durch Pendelschlag die objektive Zeit in gleiche Zeitstrecken einteilen oder vielmehr am Pendelschlag die gleichen Zeiten ablesen zu können. Aber ob das wahr ist?

Vielleicht sind die Zeiten jedes neuen Pendelschlages immer gröſser und auch der Tag ist immer länger und alles, was am Tage passiert, geschieht in immer langsamerem Tempo, unsere seelischen Vorgänge eingeschlossen. Dann würden wir nicht merken, daſs diese Verschiedenheit eintritt und doch glauben, die Tage usw. seien gleich lang.

Kurz es kommt uns hierbei nur darauf an, daſs wir dieselben Verhältnisse wieder erleben. Das Verhältnis des Pendelschlages zur Erdumwälzung usw. muſs dasselbe sein. Vielleicht besteht das Wirkliche an der Zeit überhaupt nur in solchen Verhältnissen, vielleicht ist es ebenso mit der Gleichheit und mit der Existenz der räumlichen Strecke. Das letztere wird uns noch beschäftigen. Hier haben wir nur festzustellen, daſs die Gleichheit von Zeiten thatsächlich nach Gleichheit von räumlichen Strecken beurteilt wird. Aber nicht sind es zwei aufeinanderfolgende gleiche Strecken der Falllinie, bei deren Entstehen wir gleiche Zeiten annehmen, vielmehr sagen wir, der fallende Körper lege in gleichen Zeiten verschiedene Strecken zurück, er falle immer schneller. Dies beurteilen wir nach der Uhr. Also diejenigen Zeiten, welche der Uhrzeiger oder das Uhrpendel zu gleichen Strecken beziehlich zu gleichviel Schwingungen gebraucht, diese betrachten wir als gleich. Warum?

Es stehen die Gleichheit der Uhrzeigerstrecken in Übereinstimmung mit vielen anderen Gleichheiten z. B. der Gleichheit der Winkel, den ein Stern in verschiedenen täglichen Lagen zeigt. Die Fallbewegung ist allerdings auch eine sehr häufige Erscheinung. Darum könnte man auf die Idee kommen, die Zeiten, in denen gleiche Fallstrecken zurückgelegt werden, als gleich anzunehmen. Aber damit harmonieren nicht irgend welche anderen Bewegungen, deren Ursachen ganz andere sind. Die Uhrbewegung und die Rotation der Erde haben recht verschiedene Ursachen, und doch zeigen sich bei beiden gleiche räumliche Maſse gleichzeitig: wenn der Stern um fünfzehn Grad fortgerückt ist, so ist die nach Sternzeit gehende Uhr um eine Stunde fortgerückt, und die nächsten fünfzehn Grad und die nächste Stunde am Zeiger stimmen wiederum überein, also Gleichheit der Strecken werden in gleichen Augenblicken angezeigt. Dies ist ein passender Grund die dabei verlaufenden Zeitabschnitte für gleiche zu erklären. Und dann kann man die bei gleichen Fallstrecken hintereinander verlaufenden Zeiten nicht für gleich erklären, denn die Uhr zeigt dabei nicht gleiche Strecken. Man müſste, wenn man den Fall als bestimmend für gleiche Zeiten ansehen wollte, annehmen, die Zeiten, welche vergehen, bis die Uhr immer wieder eine neue Stunde anzeigt, seien nicht gleich, also alles würde sich einfach umkehren, die Verschiedenheit der Zeiten, die wir

annehmen beim Durchfallen von gleichen Strecken hintereinander, müfste dann entsprechend beim Durchlaufen gleicher Zeigerräume oder gleicher Winkel beim Sterne angenommen werden.

Galilei stellt als Thatsache hin, dafs ein in einfacher Bewegung befindlicher Körper immer in gleichen Zeiten gleiche geradlinige Strecken zurücklege. In Wahrheit kommt so etwas genau kaum vor. Ist es nicht der Fall, so schieben wir die Gründe sogenannten Kräften zu. Würden wir als das Gesetz der kräftelosen Bewegung die Bewegung eines fallenden Körpers irgendwo annehmen, so hielten wir es also für selbstverständlich, dafs ein in Bewegung befindlicher Körper eine Strecke von etwa $\frac{1}{2} \cdot 9{,}8$ Metern in der ersten, eine Strecke von $\frac{3}{2} \cdot 9{,}8$ Metern in der zweiten Sekunde usw. zurücklegte. Dann giebt es an dieser Stelle keine Erdanziehung und man müfste als Grund der Zurücklegung von gleichen Strecken in gleichen Zeiten Kräfte annehmen, was recht unbequem wäre, weil eben die Fallbewegung an einem bestimmten Orte der Erde eine sich sonst nicht wiederholende Eigentümlichkeit zeigt (auf der Sonne wäre es anders, am Äquator anders als in höheren Breiten usw.). Sagte man aber, gleiche Zeiten seien vergangen, wenn der fallende Körper gleiche Strecken zurückgelegt hätte, so hätte man die Wahl, ob man den Beharrungssatz so wie er jetzt lautet, bestehen lassen wollte; dann würde man für den Fall keine verursachende Kraft annehmen, wohl aber für die alsdann „ungleichartige" Bewegung des Uhrzeigers und der Sterne; oder man könnte alsdann als Zeichen der Abwesenheit von Kräften ansehen, dafs in gleichen Zeiten ungleiche Strecken zurückgelegt würden, wie es die Uhr und die Sterne machten, jede hiervon aber abweichende Bewegung z. B. die des Falles, wäre dann auf eine Kraft zurückzuführen. Alle diese Möglichkeiten sind nicht zu widerlegen. Man kann nicht ganz sicher entscheiden, was richtig ist. Man kann aber der Annahme von Zeitengleichheit bei Uhrzeigergleichheit und der Galileischen Fassung den Vorzug der Einfachheit einräumen und aus diesem Grunde sie für die richtige ansehen. Es wäre auch noch möglich, dafs keine einzige von allem an sich wahr wäre, sondern dafs die Wahrheit überhaupt nur in den Verhältnissen der verschiedenen Bewegungen liegt, man also überhaupt gar nicht als richtig hinstellen dürfte entweder, der Fall gehe infolge einer Anziehungskraft vor sich, die gleichmäfsige geradlinige Bewegung aber ohne Kraft, oder umgekehrt den Satz, die geradlinige gleichmäfsige Bewegung verrate eine Kraft, endlich auch nicht die Behauptung, es lege ein Körper, ganz für sich gedacht, in gleichen Zeiten gleiche oder ungleiche Strecken zurück.

Doch dies gehörte in eine Metaphysik der Physik, welche hier nicht gegeben werden soll.

Es genügt uns hier festgestellt zu haben, daſs man zur Erklärung der sicher verschiedenartigen Bewegung beim Fall und bei dem Uhrzeiger oder der Erdumdrehung irgendwo eine Gleichheit von Zeiten annehmen kann z. B. bei Zurücklegung gleicher Uhrzeigerstrecken und daſs man dann bei der andersartigen Bewegung wie der des Falles Schwierigkeiten hatte, um die objektive Verknüpfung der Zeit mit den dabei zurückgelegten Strecken genau zu beschreiben durch Begriffe wie Geschwindigkeit, Beschleunigung und ihre Beziehungen in beliebig kleinen Zeiten und Strecken.

Die Weitenbehaftung der Zeit.

Mag die Zeit metaphysisch zu bedeuten haben, was sie wolle, wir wissen, daſs wir eine Zeitvorstellung haben, daſs wir nachträglich uns vergangene Zeiten vorstellen können und daſs wir die Zeit miterleben, also eine gewisse Übereinstimmung unserer Vorstellung mit der sogenannten objektiven Zeit annehmen können. Es möchte sein, daſs die Zeit auch objektiv wie die ganze objektive Welt eine Art Vorstellungswelt ist, oder daſs man in Wahrheit eine objektive nicht von der Vorstellungswelt trennen könnte und keine von beiden, losgelöst gedacht, eine Wirklichkeit hat. Das sind metaphysische Fragen. Für uns hier ist gewiſs, daſs wir gleiche und ungleiche Zeiten sowohl nachträglich in Gedanken wie auch während der Beobachtung, während des Zeitverlaufes annehmen können. Zwar ist wirklich, wie die meisten sagen, nur der Augenblick der Gegenwart, es wären demnach die eigentlichen, ausgedehnten Zeitstrecken nicht wirklich, aber auch das braucht uns hier nicht zu beschäftigen. Genug, die Zeit ist etwas derartiges, daſs sie behaftet werden kann mit der Vorstellung von Gleichem und Ungleichem. Ferner können wir uns thatsächlich das Verhältnis von endlichen Zeiten vorstellen, indessen hindert uns nichts gleiche oder ungleiche unendlichkleine Zeitstreckchen oder Zeiträume oder einfach Zeiten zu denken. Zur sinnlichwahrnehmbaren Welt gehören sie zwar nicht unmittelbar, aber es könnte sein, daſs wir zu rechtem Verständnis dieser nicht kommen können, wenn wir unsere Vorstellung nicht erweitern und zur Weitenbehaftung des Unendlichen greifen. Es steht hiermit gerade wie mit dem Raume. Vorstellungen wie die endlichen Tangentenstrecken einer endlichen krummen Kurve sind unklar, wenn wir nicht zum unendlichkleinen Räumlichen unsere Zuflucht nehmen.

Wir konstatieren die Thatsache, daſs die Zeit auch mit den übrigen Weitenvorstellungen behaftet werden kann, ganz ähnlich wie der Raum, nur kann man den Unterschied der Dimensionen bei der Zeit nicht machen. Längst und tausendfach wird die Zeit mit der Linie verglichen und eindimensional genannt. Diese eine Dimension zeigt wie die Linie einen lückenlosen Verlauf. Sprechen wir nur von endlichen Zeiten, so ist dieser Verlauf auch für das Endliche lückenlos, es reiht sich eine endliche Zeit an die andere, jede kann beliebig klein vorgestellt werden, aber dabei bleibt sie endlich. Der Unterschied zwischen beliebigklein und unendlichklein gilt thatsächlich auch hier. Aber wir können, wenn wir wollen, einen im Endlichen vom nächsten Zeitpunkt unterscheidbaren Zeitpunkt weiter behaften. Oder genauer gesagt, wir können von der Weitenbehaftung mit dem Endlichen, die uns endliche Strecken und deren Endpunkte giebt, übergehen zur Weitenbehaftung des Unendlichkleinen. Zeitpunkte lassen sich je nach den Umständen in beliebiger Anzahl auf die Zeitlinie übertragen gerade wie beim Raume. Für die Weitenbehaftung mit dem Unendlichkleinen ergeben sich an solcher Stelle, wo man für das Endliche nur von einem Punkte sprechen würde, beliebig viele Punkte in unendlichkleinen Abständen usw. Der eigentliche Zeitpunkt der Gegenwart erhält seinen rechten Sinn durch die Weitenbehaftungen, mit der man in seiner Nähe die Zeitvorstellung behaftet. In seiner Nähe oder in seiner Stelle kann man Weitenbehaftungen aller Ordnungen vornehmen.

Auch bei der Zeit gilt der Satz, daſs es nicht möglich ist ein bestimmtes Verhältnis einer unendlichkleinen Strecke zu einer endlichen anzugeben. Dieses Verhältnis giebt es gar nicht, versucht man es sich vorzustellen, so wird sowohl die endliche Strecke wie die unendlichkleine vollkommen verschwommen und bleibt keine bestimmte Strecke mehr. Also ein solches Durcheinandermischen der Zeiten verschiedener Weitenbehaftungen führt zu Irrtümern, weil sie nicht erlaubt ist und dem Wesen der Zeit widerspricht. Dennoch aber ergänzen sich die Weitenbehaftungen gegenseitig, nur in anderer Weise, nicht durch Herstellung bestimmter Verhältnisse zwischen Gröſsen verschiedener Behaftungen.

Auch hier gilt der Satz, daſs unendlichviele Streckchen der unendlichkleinen Weitenbehaftung zusammen eine endliche Zeitstrecke ergeben, oder genauer gesagt, daſs solche Summen zu einander das Verhältnis von endlichen Zeiten darstellen. Und auch hier gilt der Satz, daſs der Wert von zwei Strecken, die derselben Weitenbehaftung angehören, ein endlicher bestimmter oder unbestimmter ist. Also in

gewissem Sinne hat auch hier das Endliche einen Vorzug vor den übrigen Weitenbehaftungen, obgleich man durchaus nicht dem Unendlichen die Existenz abstreiten kann. Man vergleiche das über den Raum hierüber Gesagte.

Im Folgenden werden wir diese Sätze benutzen, um dadurch den Begriff der Bewegung, die Geschwindigkeit und andere physikalische Begriffe rein als Vorstellungen zu verstehen, und wir wollen zu begreifen suchen, wieso die höhere Mathematik sich sofort physikalischer Ausdrücke bediente, was man ihr vielfach verdacht hat. In der That ist der Zwiespalt zwischen einer rein mathematischen Auffassung, wie sie wünschenswert wäre, aber von den meisten als unmöglich angesehen wird, und einer physikalischen, wie sie wiederum von anderer Seite als einseitig getadelt wird und in der That dem Begriffe der höheren Mathematik als einer wirklichen Mathematik im Wege steht, bis jetzt vorhanden. Es kann unmöglich als ein Hindernis angesehen werden, wenn wir überhaupt die Zeitvorstellung mitbenutzen, denn auch die Geometrie benutzt eine Vorstellung, den Raum; aber es darf die Zeitvorstellung keinen Konflikt hineinbringen; es muſs klar sein, wieso man bei beiden Vorstellungsgebieten dieselben Grundsätze der Seele in derselben logischen Weise verwendet.

Noch weniger kann es verdacht werden, wenn im Folgenden immer als Beispiel der Fall angeführt wird. Denn soweit wir diese physikalische Erfahrung benutzen, ist sie nicht physikalisch, sondern rein mathematisch. Gebrauchen wir auch einmal das Wort Kraft, wenden wir auch ein bestimmtes Erfahrungsmaſs an wie das Maſs der Erdanziehung g, so wissen wir doch, daſs dies nur ein Beispiel ist und wir leicht das Wort „Erdanziehung“ daraus entfernen und uns unter g irgend welche Strecke vorstellen können. Auch die Definition Galileis, der sogenannte Trägheitssatz ist eine reine Vorstellung, die niemals in der Natur genau vor unsere Sinne tritt und sich noch weniger an ganz bestimmte Stoffe heftet. Sie ist eine in die Natur hineingelegte Annahme, welche praktisch ist zur einfachen Beschreibung derselben. Sie läſst sich aussprechen ganz ohne den Begriff des Körpers. Man braucht nur das Verhältnis von Strecken und das Verhältnis von Zeiten und kann bekanntlich für Körper sagen Punkt. Dies ist sogar das einzig Richtige, falls man den Satz genau ausdrücken will.

Gleichmässige und beschleunigte Bewegung durch Streckengleichheit bei zeitlicher Folge. Belieben und Nichtbelieben.

Zur Beschreibung der gleichmäfsigen Bewegung (auch gleichförmig genannt) behaften wir die gleichen Strecken mit der Vorstellung von gleichen Zeiten und glauben damit die objektive Wirklichkeit z. B. für die Erdumdrehung getroffen zu haben. Vielleicht besteht die objektive Wirklichkeit nur in der Thatsache der gegenseitigen Behaftung dieser dem Raume und der Zeit angehörigen Vorstellungen. Mag aber solche Ansicht höchstens als Möglichkeit gelten und im übrigen auf sich beruhen, jedenfalls kann man beliebige Weitenbehaftungen zur genaueren Vorstellung der gleichmäfsigen Bewegung stattfinden lassen, z. B. dafs auch unendlichkleine gleiche bez. ungleiche Strecken einer Geraden bei unendlichkleinen im selben Verhältnis stehenden Zeiten die gleichmäfsige Bewegung für das Gebiet des Unendlichen beschreiben. Eine thatsächliche gleichmäfsige Bewegung bedeutet demnach das thatsächliche Aneinanderreihen von gleichen oder ungleichen Strecken und (!) von gleichen bez. in demselben Verhältnis ungleichen Zeiten zu einer entsprechenden Zeitstrecke z. B. 1 cm + 2 cm + 1 mm + 1 δ + 2 δ und 1′ + 2′ + 0,1′ + 1 (Zeit-δ) + 2 (Zeit-δ).

Das Belieben besteht darin, dafs man entweder gleiche oder in beliebigem Verhältnis stehende ungleiche Strecken, entweder an das Ende einer endlichen eine unendlichkleine und daran gleiche oder ungleiche unendlichkleine anreihen kann, das Nichtbelieben darin, dafs die dazu geordneten Zeiten dasselbe Verhältnis zu einander haben und dafs man die Raumstrecken so aneinander fügen mufs, wie es der zeitliche Verlauf verlangt. Man kann zwar bei geistiger Repetition auch wieder rückwärts zählen, aber man ist sich bewufst, dafs dies bei der objektiven Bewegung nicht der Fall ist.

Man weifs auch, dafs ein unendlichkleines Raumstreckchen, das zum Grenzgebiete einer endlichen Raumstrecke gehören soll, also auf die endliche Strecke unmittelbar oder durch Vermittelung anderer unendlichkleiner Strecken folgen soll, kein bestimmtes Verhältnis zur endlichen Strecke hat, ebensowenig das unendlichkleine Zeitteilchen zum endlichen, dafs aber die aufeinanderfolgenden unendlichkleinen Raumteilchen dasselbe Verhältnis haben müssen wie die aufeinanderfolgenden Zeitteilchen (für diese Bewegungsart), und dafs unendlichviele solcher Raumteilchen addiert die endliche Strecke geben, der die Zeitsumme der entsprechenden ebensovielen Zeitteilchen entspricht.

Bei der beschleunigten Bewegung wie der des Falles steht es ebenfalls in unserem Belieben entweder gleiche oder ungleiche Raumteilchen hintereinander folgen zu lassen, sie in Gedanken aus der objektiven Bahn herauszuschneiden. Und zwar können wir sie behaften mit jeder Weitenvorstellung. Das Nichtbelieben aber besteht darin, dafs das Verhältnis der dazu gehörigen Zeiten, in den die Strecken durchfallen werden, ein anderes ist bei endlicher Weitenbehaftung d. h. soweit sie als sinnlich wahrnehmbar vorgestellt werden können, und dafs eine Reihenfolge durch den Zeitverlauf vorgeschrieben ist.

Nun ist unser Bestreben die beschleunigte Bewegung mit der gleichmäfsigen zu vergleichen, welche keine Kraft bedeuten soll, denn sonst verstehen wir nicht, wie wir es genau ausdrücken sollen und wie wir uns die Wirkung der „Kraft" in jedem beliebigen Zeitteilchen bei jeder beliebigen Weitenbehaftung vorstellen sollen. Wir legen also die gleichmäfsige Bewegung zu grunde und die Definition Galileis d. h. behaften die Bewegung zunächst mit der Vorstellung, dafs der bewegte Punkt in jedem selben Zeitteilchen dieselbe Strecke zurücklegen wolle, wobei die Zeit und Strecke beliebige Weitenbehaftung erhalten können.

Es ist nun eine Thatsache, dafs beim Falle sich gleiche Strecken in gleichen (Uhr-) Zeiten nicht zeigen; sinnlich wahrnehmen nämlich kann man solche nicht, sie sich auch nicht als sinnlich wahrnehmbar vorstellen, sondern wir bemerken stets Gröfserwerden der Strecken bei gleich beobachteten Zeiten. Beträgt der Weg in einer Sekunde $g/2$, so beträgt er in der zweiten um $2/2\ g$ mehr, bei der dritten wieder um ebensoviel mehr usw. Dies ist in Wahrheit kein plötzliches Zutreten von g, sondern fortwährend tritt etwas dazu. Was heifst das? Eigentlich tritt nichts dazu, sondern der Weg in gleicher Zeit ist stets gröfser oder wird stets gröfser. Aber gegenüber dem Endlichen hat das Unendlichkleine keine Bedeutung, also kann man sich vorstellen: in unendlichkleinen Streckchen geht die Bewegung noch weiter, ohne sich doch schon wieder beschleunigt zu zeigen, wie es sich doch im Endlichen stets zeigt. Z. B. am Ende der ersten Sekunde will es noch weiter gehen innerhalb eines unendlichkleinen Bruchteils einer Sekunde um das Streckchen g/∞ oder auch eine andere Gröfse durch Unendlich, was für das einzelne unendlichkleine Streckchen gleichgiltig ist. Natürlich gilt dies so nur dem Endlichen gegenüber. Anders ausgedrückt: man vermag auf die ganze Bewegungsvorstellung erstens die endliche Weitenbehaftung anzuwenden. Hält man diese fest und sucht man für sie (zu ihrer tieferen Begründung oder vielmehr

zum besseren Verständnis von etwas, das auch mit dem Endlichen in gewissem Zusammenhange steht, der Geschwindigkeit) vergleichsweise die Vorstellung der gleichmäfsigen Geschwindigkeit zu verwerten, so ist man durch die Art unseres Geistes genötigt, den Gegensatz des Unendlichen und Unendlichkleinen heranzuziehen und zwar durch die begriffliche Benutzung der Thatsache, dafs zur Vermehrung des Endlichen eine oder eine endliche Anzahl von unendlichkleinen Strecken nichts beiträgt. Also wenn ich mir auch am Ende einer Sekunde an die bis dahin zurückgelegte Strecke einige unendlichkleine Streckchen von gleicher Gröfse bei gleichen Zeiten angelegt denke, so ändert das den Wert der endlichen Streckenbetrachtung nicht. In dieser Überlegung ruht die Erklärung für die Vorstellbarkeit einer Geschwindigkeit auch bei beschleunigter Bewegung. Weifs man nur, dafs es verschiedene Weitenbehaftungen giebt, weifs man auch, inwiefern sie miteinander zusammenhängen und inwiefern sie voneinander gesondert werden müssen, so ist alles, was sich an diese Thatsachen anknüpft, logisch und tritt auch in keinen Widerspruch zu den Thatsachen, ebensowenig wie in den Thatsachen selbst ein Widerspruch enthalten ist.

Nun wissen wir freilich, dafs unendlichviele und unendlichkleine Strecken zusammen eine endliche Summe geben. Wenn man also die Weitenbehaftung mit dem Unendlichen derart anwendet, dafs man sich an das Ende der endlichen Strecke unendlichviele unendlichkleine Strecken angeheftet denkt, dann mufs man auch sofort wieder berücksichtigen, dafs jede an die bisherige Strecke angehängte Strecke bei derselben Zeit gröfser ist als vorher in der gleichen Zeit. Folglich mufs man dann sofort die Vorstellung der Gleichheit jener unendlichkleinen Strecken aufgeben und mufs sich nun allerdings vorstellen, dafs zu jedem dieser unendlichkleinen Streckchen noch ein Zusatz hinzukommt.

Man wende nicht ein, dafs dieser Zusatz doch auch gedacht werden müsse, wenn man sich auch nur ein unendlichkleines Streckchen an das Ende der endlichen Strecke angehängt denkt. Allerdings, sobald das unendlichkleine Streckchen ein Teilchen der wirklichen beschleunigten Bewegung sein soll, mufs es auch schon den beschleunigten Zusatz haben. Aber ein Teilchen der wirklichen oder als wirklich vorgestellten beschleunigten Bewegung hat, wenn es selbst unendlichklein gedacht wird, nur Sinn innerhalb der überhaupt in lauter unendlichkleinen Teilchen vorgestellten beschleunigten Bewegung. Hier aber wird es nur als Gegensatz oder als erklärende Zusatzvorstellung für die im End-

lichen vorgestellte beschleunigte Bewegung gebraucht. Es widerspricht der Wirklichkeit dieser Bewegung nicht, weil ein einzelnes oder mehrere unendlichkleine Teilchen für das Endliche keine vermehrende oder vermindernde Bedeutung haben. Wie steht es nun mit diesem Zusatze der Beschleunigung zu jedem unendlichkleinen Teilchen, wenn dasselbe zur wirklichen Bewegung gehört? Wir möchten gern wissen, welche Bedeutung der Zusatz für die im Endlichen vorgestellte sinnlich wahrnehmbare Bewegung hat. Ist bereits irgend eine endliche Strecke zurückgelegt worden, so hat sich bereits eine Geschwindigkeit hergestellt, die unendlichmal gröfser als der beschleunigende Zusatz ist.

Denn wenn auch anfangs die Geschwindigkeit noch Null war, und in einem beliebigen Zeitteilchen zu dieser Null ein beschleunigender Zusatz kam (der durchaus nicht als gleichmäfsige Bewegung aufgefafst zu werden braucht, sondern einfach ein Stückchen der wirklichen beschleunigten Bewegung in beliebig kleiner Zeit sein kann), so wurde dadurch die Geschwindigkeit Null zu Etwas (wenn auch noch so Kleinem beliebig geringer Weitenbehaftung); d. h. jetzt kann man durch Hinzufügung eines einzelnen Streckchens in einer beliebigen, aber niedrigeren Weitenbehaftung sich die Geschwindigkeit vorstellen. Kam nun ein neuer Zusatz hinzu — denn es mufste diese Geschwindigkeit, wenn sie richtiger Teil der Bewegung sein soll, nicht gleichmäfsig gedacht, sondern um irgend etwas vergröfsert werden — so hat man sich auch am Ende der nun vorgestellten, wirklich zurückgelegten Strecke eine Geschwindigkeit vorzustellen, die gröfser ist als die vorher vorgestellte. Durch Summation von unendlichvielen Zusätzen steigt die vorzustellende Geschwindigkeit in eine um einen Grad höhere Weitenbehaftung hinein. Möge die Bewegung bis in das Endliche hineingestiegen sein! Dann ist die nun vorzustellende Geschwindigkeit ein hinzugedachter einzelner unendlichkleiner Zusatz. Wenn derselbe aber auch dem Unendlichkleinen erster Ordnung angehört, so mufs doch der Beschleunigungszusatz, der hierzu wieder zu denken ist, falls die Geschwindigkeitsstrecke zu einer wirklichen unendlichkleinen Strecke der Bewegung werden soll, von niederem Grade unendlichklein sein. Denn die Geschwindigkeit soll ja bereits durch unendlichvieles Hinzukommen von Beschleunigungen entstanden sein. Mithin ist die Beschleunigung als Zusatz der unendlichkleinen Geschwindigkeit bei einer endlichen beschleunigten Bewegung (Vorstellung von im Endlichen wirklich durchlaufenen Strecken) unendlichklein vom zweiten Grade zu denken.

Geschwindigkeit und Beschleunigung bei Leibniz. Endgeschwindigkeit und Endbeschleunigung.

Ich möchte nicht behaupten, dafs Leibniz die vorigen Auffassungen für übereinstimmend mit seiner Meinung erklärt haben würde. Indessen sind wir, ohne die Absicht verfolgt zu haben Leibniz zu rechtfertigen, doch in den Stand gesetzt eine Äufserung desselben näher auszulegen oder unserem Verständnisse nahe zu rücken. Er schreibt (III, IV, pag. 218) „Nempe ut jam alias notare memini, quantitas ordinaria, quantitas infinitesima et quantitas differentio-differentialis sese habent ut motus et celeritas et sollicitatio, quae est elementum celeritatis. Motu describitur linea, velocitate elementum lineae, sollicitatione elementum elementi". Wie die endliche Gröfse zur unendlichkleinen, so soll sich die Bewegung zur Geschwindigkeit verhalten. Die Beschleunigung aber soll ein Element der Geschwindigkeit sein, also ein unendlichkleiner Teil derselben. Durch die Bewegung soll eine endliche Linie beschrieben werden, durch die Geschwindigkeit eine unendlichkleine, das Element der Linie, und durch die Beschleunigung ein Element des Elementes. Lassen wir auf sich beruhen, wie unklar dies gesagt ist, was mit describitur eigentlich gemeint ist, und warum sese habent dasteht. Es ist immerhin bemerkenswert, dafs unsere Auffassung mit den allzukurzen Bemerkungen des Philosophen in naher Beziehung steht und eine Art von Begründung daraus gezogen werden könnte. Im übrigen ist es für die Klarstellung der Elemente der höheren Mathematik einerlei, ob Leibniz alles von uns Gesagte billigen würde, er selbst hat eine genügende Klarstellung nicht liefern können. Es würde aber unrecht sein ihm bei manchen seiner Ausdrücke unterschieben zu wollen, er habe keine richtige Ahnung vom Wesen der Sache gehabt und Newton etwa überrage ihn hierin. Dafs Leibniz hier die Geschwindigkeit für etwas Unendlichkleines und die Beschleunigung für etwas Unendlichkleines zweiter Ordnung erklärt, während doch die höhere Mechanik mit vollstem Rechte die Geschwindigkeit für einen Differentialquotienten erklärt, also eine Gröfse mit endlichem Werte, und die Beschleunigung z. B. die beim Falle gleich g oder etwa 9,8 Meter ansetzt, das ist kein Widerspruch.

Mag auch die Geschwindigkeit am Ende einer beim Fall zurückgelegten Strecke als eine unendlichkleine Strecke vorgestellt werden, die sich in anderer Weitenbehaftung als bisher an die endliche Strecke in Gedanken anreiht, ohne doch ein wirklicher Teil der Bewegung zu sein, so ist damit nicht ausgeschlossen, dafs man sich, gänzlich losgelöst von der weiteren wirklichen Ausführung der beschleunigten Be-

wegung, aus unendlich vielen solchen Strecken eine endliche Geschwindigkeit zusammendenkt. In der That kann man ja angenähert den Einfluſs der Erdanziehung am Ende einer Fallsekunde entfernen (Atwoodsche Fallmaschine, durch ein Gegengewicht) und dann eine ziemlich gleichmäſsige Geschwindigkeit in einer endlichen Zeit vor sich sehen (wegen des Verhältnisses von Gewichten und Übergewicht nicht $= g$). Also darf man von einer Endgeschwindigkeit sprechen als von etwas, das entweder nur künstlich durch Aufhebung der beschleunigten Bewegung erreicht werden oder nach Aufhebung derselben in Gedanken am Ende einer Fallstrecke als endlich, nämlich verlaufend in einer endlichen Sekunde gedacht werden kann. Das Galileische Gesetz spricht von Endgeschwindigkeiten, nicht einfach von Geschwindigkeiten und setzt dieselben für die Enden der einzelnen Sekunden gleich g, $2g$, $3g$ usw. ng.

Ebenso kann man von einer Endbeschleunigung sprechen, was allerdings nicht Sitte ist, oder man könnte sagen: eine endliche bis zum Erreichen eines endlichen Wertes in Gedanken summierte Beschleunigung (freilich unter Hinzuziehung der Beharrung); diese hat den Wert g. Beim Falle selbst kommt der Wert g nicht als Strecke zu tage, vielmehr muss man ihn sich dazu denken, es kommt nur die Fallstrecke zu tage, die in der ersten Sekunde $1/2\,g$ beträgt; und es ist ein Satz, der nur aus unseren Gedanken über das Wirkliche entspringt, wenn wir sagen, der Weg in der ersten Sekunde sei halb so gross wie die Beschleunigung oder das Maaſs der Erdanziehung. Die Endgeschwindigkeit und die endliche Sekundenbeschleunigung nun stimmen mit den beiden Differentialquotienten, genommen nach der Zeit, überein. Ehe wir dieses aber verstehen können, müssen wir uns erst ganz klar darüber werden, was es heiſst, man führe die Zeit als unabhängige Variabele ein, was bei Newton und seiner Darstellung der höheren Mathematik geschieht, beinahe als wäre es etwas Selbstverständliches. Auch hier können wir uns mit solcher Darstellung nicht befriedigt erklären, versuchen vielmehr der Sache möglichst auf den Grund zu kommen, wenigstens soweit, daſs wir einsehen, es sei eine verbindende Brücke oder eine gemeinsame tiefer gehende Grundlage für beide Darstellungen vorhanden.

Vorher möchte ich auf die frühere Behandlung der Fallstrecke $1/2\,g$ und auf die philosophischen Schwierigkeiten des Werdens so kurz, wie es die Zwecke des Buches erfordern, zurückkommen.

Wie früher gesagt (Abschnitt: die Fallstrecke $1/2\,g$) kann man die für die endliche Bewegung gefundene endliche Endgeschwindigkeit und deren Gesetz $g \cdot t$ auch auf unendlichkleine Teilchen und die

Zeiten $1/n$ übertragen. Dann ist die Endgeschwindigkeit am Ende der ersten $1/n$ tel Sekunde g/n, also eine unendlichkleine Grösse, eine Geschwindigkeit nach Leibnizscher Auffassung. Der Weg aber, den diese Endgeschwindigkeit für sich allein in der nächsten $1/n$ tel Sekunde bewirken würde, wäre $g/n \cdot 1/n$, also unendlichklein von zweiter Ordnung. Dieser Weg gehört also einer niedrigeren Ordnung an als die Geschwindigkeit und ist von derselben Behaftung wie die Leibnizsche Beschleunigung. Wie jene Reihenbetrachtung ergab, kommt das richtige Resultat für die erste Fallstrecke im Endlichen heraus durch Summation der unendlichvielen Wege; diese Wege bilden aber eine Reihe und heifsen $1\,g/n^2$, $2\,g/n^2$, $3\,g/n^2 \ldots . ng/n^2$, sind also nicht einfach unendlichviele Glieder von derselben Weitenbehaftung, sondern durch Summation oder nach dem Gesetze gt, angewendet für unendlichkleine Teilchen der Sekunde und nicht blofs die ersten Teilchen $1/n$, sondern auch die bereits unendlichvielen Zeitteilchen $\ldots \frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}$ zusammen, entstanden. Daher kommt es, dafs das Resultat ein endliches ist. Wären alle unendlichvielen Glieder der Reihe unendlichklein vom zweiten Grade, so würde ein Resultat herauskommen, das unendlichklein vom ersten Grade ist. Durch blofse Summation von unendlichvielen Beschleunigungen würde sich der endliche Wert nicht ergeben. Es ist also allerdings, wie gesagt, der Weg g/n^2 vom Range der Beschleunigung, auch der Weg $2\,g/n^2$ usw., aber sofort nicht mehr, wenn man in das Gebiet derjenigen Sekundenteilchen hineingerät (in Gedanken), in denen die Wege bereits in das Weitengebiet des Unendlichen ersten Grades hineingestiegen sind. So einfach sich auch die Rechnung mit der unendlichen Reihe macht, für das Verständnis dessen, was bei der beschleunigten Bewegung vor sich geht, ist es doch nur eine sehr mangelhafte Darstellung. Ich habe darum früher die Ausführung nur als Beispiel für die unendliche Reihe derart angegeben, unter dem Vorbehalt, den wirklichen Vorgang auf besserem Wege zum Verständnis zu bringen.

Die Behandlung des Problemes mit höherer Mathematik kann erst folgen, wenn wir die Untersuchung über deren Grundlage weiter geführt haben.

Die kontinuierliche Veränderung bei Zeit und Raum. Das Werden.

Den Begriff des Kontinuierlichen habe ich früher definiert durch die Möglichkeit einer jeder beliebigen Weitenbehaftung. Die räumliche Veränderung bietet bedeutende philosophische Schwierigkeiten,

deren sich schon die alten Griechen bewufst geworden sind. Dadurch dafs man sich in der neueren Philosophie daran gewöhnt hat die Zeit als etwas zu behandeln, das der menschlichen Anschauung entweder ganz oder doch auch angehört, und den Raum als eine andere Form der Anschauung davon trennt, ist man aus manchen Schwierigkeiten herausgekommen. Man hat sich immer mehr gewöhnen müssen in demselben einheitlichen Geiste verschiedene Grundelemente anzuerkennen, die durchaus nicht mit einander vermengt werden können, ohne sofort in Widersprüche hineinzuführen. Andererseits bleibt aber die Thatsache bestehen, dafs zwar eine unordentliche Vermengung unberechtigt ist, dafs aber eine Vereinigung oder ein Zusammenwirken, geradezu ein Zusammenschaffen im Geiste stattfindet, wie es bei einer einheitlichen Seele auch nicht anders zu erwarten ist. Mag nun auch die Seele sein, was sie wolle, und mag es auch mit ihrer Einheitlichkeit so eigentümlich stehen, dafs man an diesem Begriffe metaphysisch herumdeuteln kann — dafs eine den Menschen selbstverständlich erscheinende Vorstellung wie die der Veränderung mit der Zeit zu schaffen hat und aufserdem auf das Engste mit Anderem verknüpft ist, läfst sich nicht verkennen. Und die Schwierigkeit dieser Beziehung ist unvermindert dadurch, dafs wir Zeit und Raum von einander getrennt denken. Wir müssen sie bei der räumlichen Veränderung doch wieder zusammen bringen. Nur sind wir so vorsichtig bei allen einzelnen Untersuchungen immer wieder die Verschiedenartigkeit zu betonen und zu erkennen und andererseits gewisse Grundelemente des Geistes aufzusuchen wie die Behaftung mit verschiedenen Weitenvorstellungen, die beiden Anschauungen gemeinsam sind. Warum letzteres? Das ist damit natürlich keineswegs erklärt. Halten wir es als Thatsache fest, und seien wir vorläufig zufrieden, wenn wir im stande sind das Geistige so in einzelnen Thatsachen auszusprechen, dafs nicht direkte Widersprüche uns zu quälen brauchen. Dies Ziel ist schon ungemein schwer zu erreichen. Versuchen wir darum zunächst nur von diesem Standpunkte aus einiges Weitere über die örtliche Veränderung zu sagen.

Trotz des Gesetzes der Erhaltung der Energie, trotzdem man im Sinne der heutigen Naturwissenschaft sagen kann, dafs kein Stoff verloren zu gehen scheint und keine sogenannte Kraft, wenn man Stoff und Kraft vorsichtig und nur ihrer Erscheinung nach definiert, bleibt doch die Schwierigkeit des räumlichen Werdens. Wie kann ein Pfeil, der zuerst an einer Stelle unter seiner Umgebung erschien, an der anderen erscheinen? Wie kommt es, dafs dies stets nach Verlauf irgend einer Zeit geschieht? Wie kommt es, dafs wir doch sagen

müssen, der Pfeil, der jetzt an einem Orte erscheint, sei — falls man nur von dieser Erscheinung spricht — ebensogut als ruhend anzusehen? Und doch soll er sich bewegen, er soll sogar schnell fliegen, zu keiner Zeit stillstehen!

Dafs in diesen Fragen manches nur der falschen Ausdrücke halber widerspruchsvoll erscheint, ist uns klar. „Ruhen" kann nicht heissen: in einem Zeitpunkte an einem Orte erscheinen. Durch letztere Vorstellung wird über Ruhe und Bewegung gar nichts gesagt: ein Pfeil, der an einem Orte nur in einem Zeitpunkte erscheint (oder besser vorgestellt wird,) ruht weder noch bewegt er sich. Erst wenn man irgend einen Zeitverlauf mit vorstellt, kann man über Ruhe oder Bewegung entscheiden. Also wir müssen eine Behaftung der räumlichen Pfeilvorstellung mit der Zeitvorstellung vornehmen oder diese Vereinigung von Anschauungsarten durch etwas von uns Unabhängiges irgendwie bewirken lassen — mag auch dies „irgendwie" eine sehr sonderbare Thatsache sein.

Das räumliche Werden oder die Bewegung oder die räumliche Veränderung wird durch die genannte Absonderung der Anschauungsarten von Widerspruch befreit. Diese Absonderung kann auf verschiedene Weise vorgestellt werden. Wenn Leibniz die Bewegung mit dem Endlichen, die Geschwindigkeit mit dem Unendlichkleinen und die Beschleunigung mit dem Unendlichkleinen zweiter Ordnung in Vergleichung stellt, schliefst er sich eng an die natürliche, unseren Sinnen erscheinende Bewegung an, die ohne Behaftung mit dem Unendlichkleinen nicht klar verstanden werden kann. Zur klaren Unterscheidung der gleichmäfsigen und der beschleunigten, ja sogar zur Vorstellung der sich von selbst fortsetzenden gleichmäfsigen Bewegung ist das Unendliche nötig: unendlichkleine Strecken erster bez. auch zweiter Ordnung. Die Zeitvorstellung ist dabei mit dem Raume stets eng verknüpft, wie es sich ja auch beim Anblick eines bewegten Körpers sofort für die Anschauung ergiebt. Es ist uns der Wunsch sehr begreiflich auf irgend eine Art die Zeit wenigstens in Gedanken loszulösen von der Vorstellung der Strecke derart, dass ein den Sinnen sofort auffälliger Unterschied vorhanden ist. Dies könnte nur durch künstliche Zerlegung der in der Natur verbundenen zeitlichen und räumlichen Anschauung geschehen, etwa so, dafs man für jede eine besondere Richtung in der Ebene wählte. Dies müfste eine eigentümliche Veränderung in der Vorstellung der Geschwindigkeit und Beschleunigung nach sich ziehen. Gehen wir zunächst der Bedeutung einer Zerlegung in zwei Richtungen, wie sie in der analytischen Geometrie seit Cartesius üblich ist, auf den Grund!

Die bildliche Darstellung einer Linie durch zwei Variabele in der Ebene. Die Abhängigkeit.

Stellt man sich zwei in einer horizontalen Geraden liegende Strecken von 3 und 6 Einheiten vor, so kann man ein Verhältnis formulieren, welches lautet: drei Horizontaleinheiten : 6 Horizontaleinheiten oder $3\,h : 6\,h = 1/2$. Die Seiten dieser Gleichung sind identisch, sobald man benutzt, dafs $h : h$ gleich eins ist und $3 : 6 = 1 : 2$; so wirft man dabei die Vorstellung der Horizontalen oder allgemein der Benennungen ab und behält blofs die Vorstellung der Zahleneinheiten oder den Zahlenwert des Verhältnisses. Man könnte, wenn man wollte, statt h sagen x. Wenn man schreibt $3\,x : 6\,x = 1/2$, so kann man dies auffassen als Verhältnis zweier irgendwie benannten Zahlen, die aber dieselbe Benennung haben. Schreibt man $3\,x : 6\,y$, so kann man dies auf ganz verschiedene Weise auffassen. Soll es ein Bruch in der gewöhnlichen Art des Bruches sein, so muss man unter x und y verstehen Anzahlen von vollkommen derselben Einheit in ganz demselben Sinne. Es könnte z. B. x eine beliebige Zahl wie 7 und y eine andere Zahl wie 10 bedeuten sollen, oder auch x eine überhaupt nach Belieben veränderliche Zahl. Wenn man dann schreibt, $3\,x : 6\,y$ solle gleich einem bestimmten Zahlenwerte sein z. B. gleich 20, so darf man y nicht mehr irgend einen beliebigen Wert beilegen, sobald x einen bekommen hat, sondern es folgt durch Rechnung aus der Gleichung, dafs dann y einen bestimmten (von x abhängigen) Wert hat; oder umgekehrt: legt man dann y irgend einen beliebigen Wert bei, so folgt, dafs alsdann y davon abhängig ist und nicht mehr beliebigen Wert hat. In beiden Fällen aber kann x und y als einfache Zahl, eine Vielheit der reinen Einheit 1, ohne Benennung aufgefafst werden.

Setzt man $tan\ \alpha = 3$ cm : 6 cm, so hat dies durchaus nicht mehr den blofsen Sinn einer Zahl 3 : 6 oder 1/2, sondern man stellt sich dabei vor, dafs die 3 cm in einer Richtung liegen, die senkrecht ist zu der Richtung, in der die 6 cm vorgestellt werden. Wenn man sich z. B. die 3 cm vertikal gelegt denkt, so sind die 6 cm aufzufassen als Horizontaleinheiten, ohne dafs man dies in dem Bruche 3 cm : 6 cm erkennen kann. Allerdings hat ja $tan\ \alpha$ alsdann den Zahlenwert 3/6, aber man darf denselben nur dann dafür einsetzen, wenn es auf die Unterscheidung der beiden Richtungen für das weitere Ausrechnen nicht mehr ankommt. In der analytischen Geometrie giebt man die Vorstellung der verschiedenen Benennungen niemals auf. Bezeichnet man die z. B. in horizontaler Richtung vorgestellten

Einheiten mit x, so bedeutet dies x nicht eine reine Zahl, sondern eine Zahl mit der Benennung „Horizontaleinheiten"; und y bedeutet Vertikaleinheiten (natürlich ist die geographische Bezeichnung „horizontal" und „vertikal" dabei ganz und gar nicht nötig, ich habe sie nur gewählt, um mich bequem ausdrücken zu können; es kommt nur darauf an, dafs bei rechtwinkligen Koordinaten die beiden Richtungen senkrecht aufeinanderstehen und in ihnen stets die Einheiten als anders gerichtet vorgestellt werden).

Zwar ist es richtig, dafs eine analytische Gleichung, die wie etwa $y = ax + b$ eine gerade Linie vorstellt, stets auf beiden Seiten denselben reinen Zahlenwert ergiebt, sobald man für x, y und die übrigen konstanten Gröfsen sich nur Zahleneinheiten ohne Benennungen denkt. Aber im selben Augenblicke verliert die Gleichung ihre analytisch-geometrische Bedeutung. Also in einer geometrische Gebilde bezeichnenden Gleichung sind zwar stets die Anzahlen der Einheiten auf beiden Seiten der Gleichung, summiert, dieselben (derart mufs die Gleichung durchaus gebildet werden), aber sie bedeutet viel mehr.

Man könnte fragen, warum man nicht lieber neben die Buchstaben x, y, b usw. die Benennungen schriebe. Ich will dies einmal für die Gleichung $y = 1 \cdot x + 1$ thun. Dieselbe lautete dann : y Vertikaleinheiten sind dann gleich $tan\ \alpha \cdot x +$ eine Vertikaleinheit. Denn es ist doch zweifellos, dafs, wenn links Vertikaleinheiten stehen, auch die rechte Seite nur die Summe von Vertikaleinheiten vorstellen kann. Die 1 bedeutet also in diesem Falle eine Vertikaleinheit. x aber bedeutet an sich Horizontaleinheiten; das ganze Glied mit x indessen bedeutet $\frac{\text{Anzahl Vertikaleinheiten}}{\text{Anzahl Horizontaleinheiten}} \cdot x$ Horizontaleinheiten. $Tan\ \alpha$ soll ja gleich 1 sein, *tan* bedeutet aber hier Vertikaleinheiten durch Horizontaleinheiten, diese Anzahlen müssen also hier gleich sein, und das ganze Glied mit x bedeutet, da die Benennung „Horizontaleinheit" im Nenner gegen die Benennung neben x fortfällt, Vertikaleinheiten.

Bringt man die Gleichung auf eine andere Form z. B. $-x + y = 1$ oder $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1$, so liest jeder, der etwas analytische Geometrie gelernt hat, heraus, dafs diese Gerade (natürlich dieselbe wie vorher) auf der x-Axe eine negative Einheit, auf der y-Axe eine positive Einheit abschneide. Und es ist sehr bequem die Gleichung auch in dieser Form zu haben, nämlich um sofort diese Abschnitte herauslesen zu können. Die erste Form aber war sehr bequem, um sofort durch *tan* sagen zu können, welchen Winkel die Gerade mit der positiven Richtung der x-Axe bilde. Wenn ich in die zweite Form

die Benennungen hineinschreibe, so lautet sie: x Horizontaleinheiten, dividiert durch eine negative Horizontaleinheit plus y Vertikaleinheiten, dividiert durch eine positive Vertikaleinheit, sei gleich 1. Und zwar kann diese 1 keine Benennung bei sich haben, denn die gleichen Benennungen in jedem Bruche links oben und unten fallen fort; also haben die Summanden links und rechts nur die Bedeutung von reinen Zahlen ohne Benennungen und nur die Zähler und Nenner kennzeichnen die beiden senkrecht zueinander stehenden Richtungen. Natürlich könnte man auch auf der rechten Seite im Zähler und Nenner dieselbe Benennung zufügen; in der That entsteht aus der allgemeineren Gleichung $y = ax + b$, wobei jedes Glied Vertikaleinheiten bedeutet, die andere Form $\frac{y}{b} + \frac{ax}{-b} = 1$, indem man beide Seiten erst einmal durch b dividiert, also 1 erhält als b Vertikaleinheiten: b Vertikaleinheiten.

Man sieht, es wäre sehr langweilig stets die Benennungen hinzuzufügen. Mag man also auch bei der einen Form der Gleichung jedem Summanden eine andere Benennung zuzuschreiben haben als bei der anderen Form, es kommt uns nur darauf an bei dem Buchstaben x stets an Horizontaleinheiten und bei y stets an Vertikaleinheiten zu denken; dies mufs man stets wissen und stets mufs man aus diesen Buchstaben diese Bedeutung herauslesen, sonst stellt die Gleichung überhaupt nicht mehr eine gerade Linie in der Ebene vor. Die Bedeutung der übrigen Gröfsen liest man heraus, indem man sich gewöhnt gewisse Formen der Gleichung zu lernen und deren Sinn geometrisch zu verstehen z. B. dafs bei der Form $\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$ die Nenner links die Abschnitte auf den Axen bedeuten.

Höchst eigentümlich ist diese ganze Methode, etwas Eindimensionales, die Linie, durch zwei Dimensionen darzustellen. Es handelt sich freilich zunächst darum, die Lage aller Punkte dieser Linie zum beliebig gewählten Anfangspunkte und den beiden Axen durch Streckenanzahlen festzustellen, also nicht eigentlich um eine Beschreibung des Wesens einer Linie. Wer mit der Ableitung der Gleichungen Bescheid weifs, der weifs, dafs stets entweder eine Funktion wie tangens oder eine Proportion bei ähnlichen Dreiecken oder der Pythagoreische Lehrsatz (bei Längenberechnungen) zur Anwendung kommen, also lauter Anschauungen, die sich stets auf beide Dimensionen beziehen. Es bedeutet auch die Gleichung nur die für alle Punkte der Linie giltige zweidimensionale Beziehung des von dem Punkte auf die eine und des auf die andere Axe gefällten

Lotes. Es ist dabei vorausgesetzt, daſs durch beliebige Punkte auch die ganze Linie beschrieben werden kann, oder besser, daſs man die Linie mit beliebigen Punkten behaften und sich zwischen diesen beliebigen Punkten stets entsprechend beliebige Strecken vorstellen kann. *Tan* oder die Proportion oder der Pythagoras reden immer nur von Strecken und zwar von Strecken, die erstens auf der Linie selbst, zweitens auch auf allen zu beiden Axen parallel zu legenden Geraden (den Koordinaten) vorgestellt werden können. Stillschweigende Voraussetzung ist also, daſs man sowohl die beschriebene Linie selbst wie auch die Koordinaten in derselben Art mit Streckenvorstellung behaften kann. Und darauf beruht es auch, daſs diese Gleichungen für das Endliche wie für das Unendliche jeder Ordnung brauchbar sind. Es ergiebt sich daraus der für das Folgende sehr wichtige Satz:

Man kann die Behaftung einer Linie nur darum auch durch Behaftungen von geraden anders gerichteten Linien (den Koordinaten) wiedergeben, weil thatsächlich eine beliebige Behaftung auf alle Linien in jeder Richtung der Ebene anwendbar ist. Die Darstellung durch eine Gleichung ist darum nur eine Übertragung oder ein Bild, bei dem man als Material andere Geraden benutzt, welche hinreichende Eigenschaften haben, um die Behaftungen der Linie darzustellen (Vergleich mit den Farben eines Bildes).

Welche Eigenschaften einer Linie stellt denn nun solche Gleichung dar? Alle? Stellt sie nur das dar, was wir uns innerhalb der Linie selbst vorstellen können, die verschiedenen Behaftungen mit Streckenverhältnissen oder stellt sie noch anderes dar? Man sollte denken, wenn diese Darstellung doch zweidimensional ist, so könnte sie vielleicht solches darstellen, was man innerhalb der Linie selbst nicht finden kann z. B. den Unterschied zwischen krumm und gerade. Wir sahen mehrfach, daſs das Krumme nur in zwei Dimensionen vorstellbar ist.

Es wäre das also schon ein groſser Vorteil dieser bildlichen Darstellung, sie scheint dann beinahe die Fehler jeder Abbildung zu verlieren und mehr zu sein als ein Bild. Aber man bedenke, daſs die Wahl zweier z. B. senkrecht aufeinanderstehender Koordinatenaxen jedenfalls schon eine Willkür ist, welche nicht etwa durch das Krumme oder sonst irgend eine Eigentümlichkeit des Darzustellenden verlangt wird.

Überhaupt ist recht befremdlich die Rolle, welche die beiden Koordinaten x und y einander gegenüber spielen. Jede für sich genommen, soll von der anderen unabhängig sein, d. h. man kann sich

z. B. von einer unendlichen Geraden irgend einen Punkt aussuchen, dessen Lot auf die x-Axe einen gerade gewählten ganz beliebigen Wert haben soll. Dann aber ist y dieses Punktes nicht mehr beliebig, wie auch die Gleichung ergiebt. Umgekehrt kann man auch irgend ein y beliebig auswählen, dann ist x nicht mehr beliebig. Also hat keines vor dem anderen etwas voraus? So ist's. Aber man könnte doch, wenn man wollte, der einen Koordinate z. B. der Abscisse eine Eigenschaft beilegen, die der anderen, der Ordinate y, dann nicht zukäme. Was für eine Eigenschaft sollte das sein? Das wäre doch nur möglich, wenn man in dem Wesen der Linie zweierlei voneinander Verschiedenes entdecken könnte, was man zertrennen und auf die Koordinaten getrennt übertragen könnte.

In der That pflegt man x die unabhängige Variabele zu nennen, indem man auf die Abscisse diejenige Freiheit überträgt, die wir haben, wenn wir uns irgend eine Lage eines Punktes der Linie gegenüber irgend welchen anderen Punkten derselben auswählen.

Noch etwas anderes kann man in die eine Koordinate verlegen. Wenn man eine Linie mit Streckenverhältnissen behaftet, so kann dies in beiden Richtungen geschehen, z. B. hin und her, vorwärts und zurück. Zu einer vollendeten Vorstellung der Linie gelangt man aber mit Sicherheit bei passend gewähltem Anfange durch Innehaltung einer Richtung. Es gehört dies nicht zum Wesen der Linie, denn es wäre auch möglich durch Vorwärtsgehen und Rückwärtsgehen unter Umständen die ganze Linie kennen zu lernen, wenn man nicht stets in denselben Gröfsen vorwärts und wieder rückwärts geht. Doch würde dabei manches mehrfach durchlaufen werden. Es ist demnach praktisch und für die möglichst einfache Durchlaufung der Linienvorstellung nötig eine Richtungsordnung innezuhalten. Das kann man in die eine der Koordinatenaxen verlegen, indem man sich vornimmt die x-Axe nur nach einer Richtung hin mit allen möglichen Weitenvorstellungen zu behaften.

Offenbar kann man in diese Betrachtung schon die Zeit hineindenken. Weil die Zeit so beschaffen ist, dafs sie mittels einer Stelle der Gegenwart ohne Umkehr vorwärts eilt, und weil unsere Vorstellungsthätigkeit psychologisch durchaus an die Zeit geknüpft ist, so bringen wir eine Ordnung in die Vorstellung einer Linie, d. h. in die aufeinanderfolgenden Vorstellungen der einzelnen Stellen der Zeit gemäfs. Wir sahen oft, dafs man die Bewegung oder das „Durchlaufen" auch ersetzen kann durch alle möglichen Streckenvorstellungen in allen möglichen Weitenbehaftungen derart, dafs die Strecken derselben Behaftung stets aneinander stofsen. Wenn wir nun auch thatsächlich

Zeit gebrauchen, um aus einzelnen solche Gesamtvorstellung zu gewinnen, so ist doch die Gesamtvorstellung etwas von der Zeit Loslösbares, durch bloſse Streckenzusammenfassung Bildbares. Verlegen wir nun das Aneinanderdenken beliebig behafteter Strecken in die eine Axe, so braucht dies noch nicht Zeitliches zu sein, vielmehr kann man auch hierbei die Zeit fortdenken und sagen: man kann die rein räumliche Ordnung oder lückenlose Aufeinanderfolge der mit irgend welchen Weitenvorstellungen behafteten Strecken auch ohne Zeitbegriff in die eine Axe oder die eine Koordinatenschar verlegen. Dann braucht sie in der anderen Richtung nicht besonders vorgestellt zu werden, erfordert nicht mehr die hierin liegende Selbständigkeit, sondern diese anderen Koordinaten werden abhängig. Die Zeit selbst aber mit ihren Verhältnissen kommt bei dieser Darstellung noch nicht vor, x soll nicht eine veränderliche Zeit, sondern eine wirklich räumliche Veränderliche bedeuten.

Fassen wir das Gesagte zusammen und übertragen es auf das arithmetische Verhältnis beider Variabelen. Es ist üblich die eine Veränderliche als Unabhängige anzusehen d. h. unser geistiges Belieben, die Gesamtvorstellung mit verschiedenen Weitenvorstellungen an jeder beliebigen Stelle zu behaften, in diese Variabele hineinzuverlegen, auſserdem aber hineinzuverlegen den Gedanken des lückenlosen, kontinuierlichen Aneinanderdenkens der einzelnen gleichen oder ungleichen Gröſsen jeder einzelnen Weitenbehaftung. Der anderen, sogenannten abhängigen Variabelen ist dann jenes Belieben genommen, es zeigt sich an ihr aber stets das Gesetz der Funktion für den einzelnen, gerade vorgestellten Wert der Unabhängigen. Es zeigt sich, ob diese Funktion für gewisse Werte von x plötzliche Sprünge, Lücken, Veränderungen mit sich bringt, ob die dargestellte Linie gerade oder krumm ist etc.

In der That kann man ein Bild von der gesamten krummen Linie nur gewinnen, wenn man die sämtlichen möglichen zweidimensionalen Verhältnisse, die Lage innerhalb der Ebene vollständig berücksichtigt. Durch zwei Koordinaten aber wird jeder Punkt der Ebene bestimmt. Also mit der beliebigen Behaftung der einen Axe durchläuft man die eine Dimension vollständig; durch die Lote, welche stets im Endpunkte solcher Abscissen errichtet werden, würde man zu jedem Punkte der Ebene gelangen; dadurch aber, daſs man die Gleichung $y = f(x)$ aufgestellt hat, bindet man sich an bestimmte Punkte, diejenigen der betreffenden Kurve. Aber dadurch, daſs man bei Vorstellung der Kurve doch nicht bloſs an diese Abscissen und die begrenzten Ordinaten denkt, sondern auch noch die übrigen

Punkte der Ebene vergleichsweise mit in der Vorstellung hat, drückt man in der That die Lage der Kurve in der Ebene, zu allen Punkten der Ebene aus.

Um den Verlauf einer Kurve praktisch vollständig zu erkennen, mufs man entweder eine unendliche Anzahl von Beziehungen in irgend welchen Richtungen angeben; wie beispielsweise die Definition des Kreises lautet, er sei der geometrische Ort für die Punkte, die von einem gegebenen festen Punkte denselben bestimmten Abstand haben. Damit ist die Vorstellung unendlichvieler Radien in unendlichvielen Richtungen verlangt und aufserdem auch noch die Gröfse dieser Radien in Bezug auf irgend welche andere Gröfse der Ebene (die Mafseinheit). Oder bei der Geraden sagt man, es sei solche Linie, dafs die Entfernung (der kürzeste Weg) zwischen zwei Punkten derselben stets ganz in die Linie hineinfällt. Dies ist nur möglich durch die gleichzeitige Vorstellung vieler Entfernungen, und aufserdem ist noch, da es eine bestimmte Gerade sein soll, die Lage zu allen Stellen der Ebene notwendig. Die zweite Art ganz dasselbe auszudrücken ist die der analytischen Geometrie bei rechtwinkligem System. Sie sieht von den unendlichvielen Richtungen ab und verlegt alles gemäfs dem Wesen der Ebene in zwei Richtungen. Die Gleichung $y = mx + b$ oder $x^2 + y^2 = r^2$ drückt aber nur unter den oben genannten Voraussetzungen und den dazu gesetzten Vorstellungen die Linie aus. Wir sehen also, dafs zur genauen Beschreibung aller Eigenschaften des Krummen, z. B. des höchsten und niedrigsten Punktes, der Tangente, Normalen ein blofses Ausrechnen oder Hinzeichnen jeder zu irgend einer Abscisse gehörigen Ordinate nicht ausreichen wird, sondern dafs man geometrisch gewisse zweidimensionale Beziehungen (charakteristisches und wesenswichtiges Dreieck) und arithmetisch entsprechend gebildete Ausdrücke (Differentialquotienten etc.) nötig haben wird.

Hat man zuerst anschaulich vor sich geometrische Gebilde und will sie analytisch ausdrücken, so ist hierzu Voraussetzung die Möglichkeit sowohl den Raum in allen Dimensionen als auch die Zahl in den ihr zukommenden Dimensionen in gleicher Art mit Weitenvorstellungen zu behaften. Hat man aber zuerst vor sich irgend welche arithmetischen Ausdrücke mit zwei Variabelen wie $s = g/2 \cdot t^2$, etwa aus der Physik entlehnt, so kann man künstlich solche Funktion in zwei Dimensionen darstellen und allerlei Eigenschaften wie die Geschwindigkeit, Beschleunigung u. a. geometrisch abbilden oder ausmalen.

Ehe ich mich der analytischen und geometrischen Bedeutung des Differentialquotienten bei blofsen räumlichen Kurven, der Ausdeutung

des charakteristischen und wesenswichtigen Dreiecks zuwende, möchte ich die Benutzung der Zeit als einer Veränderlichen besprechen. Bekanntlich sind Differentialquotienten, nach der Zeit genommen, sofort aufgestellt und mit gröfstem Nutzen in der Physik verwendet worden, und es wird die Bedeutung der höheren Mathematik oft genug hiernach bemessen.

Bildliche Darstellung der Zeiten als Strecken einer Geraden und als Zahlen.

Es wird meist ohne Umstände die Grösse t oder die Zeit als Zahl in den Funktionen verwendet. Wenn in der Nntur etwas — wie man sagt — mit der Zeit sich ändert, so nimmt man die Zeit als eine Variabele an und behandelt sie wie irgend eine andere Zahl. In der That wendet man die Zahlenvorstellung auf alles Mögliche an, bei jeder Begriffsbildung kommt schon etwas vor, was auch der Einheit eigentümlich ist, bei jedem Schlusse kommen schon Zahlenbildungen vor, ja schon die Verbindung „mehrerer" Begriffe gehört im gewissen Sinne der Mathematik an, warum also auch nicht der Begriff mehrerer Zeiten? Aber die Zeit hat eine hervorragende Eigenschaft. Sie ist eine Mannigfaltigkeit, sie schreitet fort, sie erlaubt die Vorstellung von gleichen und ungleichen Grössen, die Verhältnisse mit bestimmten Zahlenwerten. Darin ist sie dem Raume so ähnlich, dafs man auf beides Weitenbehaftungen im Endlichen oder Unendlichen beliebiger Ordnung anwenden kann. Man mufs sich bewufst bleiben, dafs bei Einführung der Zahlen in Funktionen die Gröfsen t Zahlen sind, die man mit allen möglichen Weitenvorstellungen versehen kann, freilich nicht gerade wie die Zahl — denn was sollten wohl imaginäre Zeiten sein? — aber doch wie die ganzen, gebrochenen und irrationalen Zahlen. Die gerade Linie ferner ist mit Streckenvorstellungen behaftbar ebenfalls in verschiedenen Weitengebieten, man muss durchaus zugeben, dafs man sich unendlichkleine Gröfsen ohne Zwang in der Linie und in dem Zeitverlauf vorstellen kann. Wenn wir darum die Zeit als Zahl gebrauchen, so sind wir im Rechte, solange wir uns auf diese Thatsächlichkeit beschränken und haben den Gebrauch stets so aufzufassen. Wir haben bei dem Buchstaben t für gewisse Zwecke durchaus hinzuzudenken die Benennung Zeit, für andere Zwecke aber dürfen wir auch die Benennung vergessen, wenn es nämlich wie in der analytischen Gleichung im Augenblicke nur auf die Summen der Einheiten und deren Verhältnisse ankommen soll. Auch wenn wir eine Axe mit Zeitgröfsen behaftet denken, liegt darin keine andere

Schwierigkeit, als wenn wir in der analytischen Geometrie die Gröfse x stets mit etwa Horizontaleinheiten behaftet vorstellen. Schwer erscheint die Sache nur, wenn man fälschlich meint, in solcher Gleichung sei alles auf ein und dieselbe Benennung zurückgeführt.

Die Zeit hat aber der Zahl und dem Raume gegenüber die Eigentümlichkeit, dafs sie sich thatsächlich in bestimmter Ordnung durch die Stelle der Gegenwart abspielt. Man kann allerdings in der Erinnerung die Zeiten vorwärts und rückwärts und sprungweise wie die Linie oder die Zahlenreihe durchdenken, aber sobald die Gleichung etwas Natürliches bedeuten und das Natürliche ausdeuten soll, so muss die Zeitvariabele in der natürlichen Ordnung vorgestellt werden. Das ist sehr leicht erreichbar, indem man nur die eine Dimension mit ihr behaftet und etwa in die Axe und die Schar der Abscissen (parallel zu jener Axe) erstens die Veränderlichkeit hineinverlegt und zweitens auch die Ordnung des Zeitverlaufes. Dann liegt alles Übrige in der Vorstellung der anderen Dimensionen.

Vorausgesetzt ist die nicht weiter erklärbare Thatsache (falls man nicht der Metaphysik die Fähigkeit einer Erklärung zutraut), dafs in der Welt die Regelmäfsigkeit räumlicher Veränderung an die Regelmässigkeit der Verhältnisse im Zeitverlauf geknüpft ist. Gerade so aber kann bei Beschreibung einer Kurve die Regelmäfsigkeit des Ganzen oder auch die Regelmäfsigkeit in der Gröfse der Ordinaten geknüpft werden an die Veränderungen innerhalb der x-Axe.

Auf Schwierigkeiten stofsen wir nur, wenn wir uns über die thatsächlichen Veränderungen in der Art der Bewegung d. h. die veränderte Verknüpfung der Zeiten und Raumgröfsen (gröfsere Geschwindigkeit) Rechenschaft geben wollen. Wir sind einmal so veranlagt erstens stets nach allgemeinen Vorstellungen zu suchen, die wir bei allem, was passiert, wieder anwenden können, zweitens aber stets nach Gründen zu fragen und zu versuchen allem Auffälligen gemeinsame Ursprünge zuzuschreiben. Nur so sind wir im stande die regelmäfsigen Veränderungen trotz ihrer ungeheuren Mannigfaltigkeit vorauszusagen.

Also wir müssen, ob wir wollen oder nicht, bei der Verschiedenheit der räumlichen Veränderung Vergleiche ziehen. Diese sind nutzlos, solange sie nur in der einzelnen Beschreibung jedes einzelnen Falles bestehen. Fragen wir aber nach einem gemeinsamen Ausdrucke und einer gemeinsamen Vorstellung, wenn viele Male immer wieder etwas Verschiedenes (z. B. verschiedene Fallstrecken in verschiedenen Sekunden seit Beginn des Falles) vor sich geht, was doch unter ähnlichen Umständen stattfindet, so müssen wir uns etwas vorstellen, was wir sinnlich nicht wahrnehmen, die Anfänge, den Verlauf der Bewegungen

im Kleinsten, die Vorstellung dessen, was geschehen würde, wenn gewisse Umstände wegfallen würden (Anziehung, Erdnähe usw.), die nicht immer in derselben Art da zu sein brauchen. Wir fangen an sofort mehr in selbstgebildeten als in den sinnlich erregten Vorstellungen zu leben, wir sagen, die Bewegung habe angefangen, obwohl wir genau genommen, den Anfang nicht sehen, sie werde anders, obwohl wir nicht genau sehen, wo und wann und wie sie anders wird u. s. f. Übrigens fühlt man manchmal selbst, was man sich sonst nur denkt, z. B. beim Radfahren das Einsetzen und Aussetzen der Triebkraft.

Während ich früher bei der Ableitung der Formel für die Fallstrecke mit dem Unendlichkleinen anfing, nur zu dem Zwecke um die Eigentümlichkeiten der Reihen zu untersuchen, werden wir nun von den sinnlichen Thatsachen ausgehen, wie der Physiker, und von ihnen auf das Unendliche kommen. Wieder soll der Fall als Beispiel dienen. Wir treiben damit nicht eigentliche Physik, sondern bleiben durchaus bei der Sache, bei der Aufsuchung und Klärung der Grundsätze des Unendlichen. Wir können, wenn wir unser Beispiel richtig verstehen, die Benennung Zeit ohne Schwierigkeiten wieder fortlassen und haben dann das Reinmathematische vor uns.

Das Differential und der erste Differentialquotient von $g/2 \cdot t^2$.

Es sei durch sorgfältige Versuche festgestellt, dafs ein ohne Hindernisse fallender Körper in der ersten Sekunde $g/2 = 4{,}9$ m, in den beiden ersten zusammen $4{,}9 \cdot 2^2$ usw. zurücklege und man ziehe aus einer grossen Anzahl von Erfahrungen den Schlufs, dafs der geradlinige Fallweg durch die Formel $y = g/2 \cdot t^2$ allgemein auch für viele Sekunden und irgend welche Bruchteile derselben dargestellt sei. Dabei bedeutet die linke Seite Meter, also auch die rechte, und es bedeutet t einfach eine reine Zahl, obwohl man sich Zeiteinheiten dabei vorstellt. Der regelmäfsige Verlauf der Zeit und eine ihm entsprechende Vorstellung von gleichmäfsiger Bewegung ist einfach angenommen worden, obwohl der Fall selbst die gleichmäfsige Bewegung nicht zeigt, sondern eine sogenannte regelmäfsig beschleunigte.

In dieser Annahme liegt es, dafs man die Variabele t als unabhängige Zahl betrachten und ihr, wenn man will, einen selbständigen Verlauf zuschreiben kann. In der That sind wir gewohnt, den Zeitverlauf wie etwas Ehern-unangreifbares zu betrachten, also bei der

räumlichen Bewegung dem Raume mehr die Rolle des Leidenden zuzuschreiben. Darauf kommt es aber gar nicht an; es genügt die thatsächliche Verknüpfung zwischen beiden. Sie erlaubt uns der Zeit, wenn wir wollen, die selbständige, führende Rolle zuzuschreiben, ohne den Verlauf dadurch zu fälschen.

Obwohl nun $y = g/2 \cdot t^2$ stets eine Anzahl von Metern in gerader vertikaler Linie vorstellt, so können wir doch eine bildliche Darstellung in zwei Dimensionen machen; eine Übertragung, die uns, richtig angelegt, gewisse Dinge richtig zeigen mufs.

Wir behaften jede zur x-Axe parallele Strecke und diese selbst in derselben Art mit jeder Weitenvorstellung wie die Zeit und denken uns zu jeder x- oder t-Gröfse Zeiteinheiten hinzu. Nun zählen wir y in einer anderen Richtung z. B. stets senkrecht dazu, parallel zur y-Axe des rechtwinkligen Koordinatensystems. Dann bedeutet jede solche Ordinate die Länge eines Fallweges bei einer bestimmten Abscisse t, d. h. physikalisch, wenn seit Beginn der Fallbewegung t Sekunden vergangen sind. Die Ordinaten sind also wirklich, wenn man sie mit Metern bezeichnet, die Fallstreckenlängen, aber jede stellt für sich einen bestimmten Weg für die betreffende Zeit vor, nicht etwa findet der veränderliche Fall innerhalb einer dieser y-Gröfsen statt (die Veränderlichkeit wurde in die x-Axe verlegt).

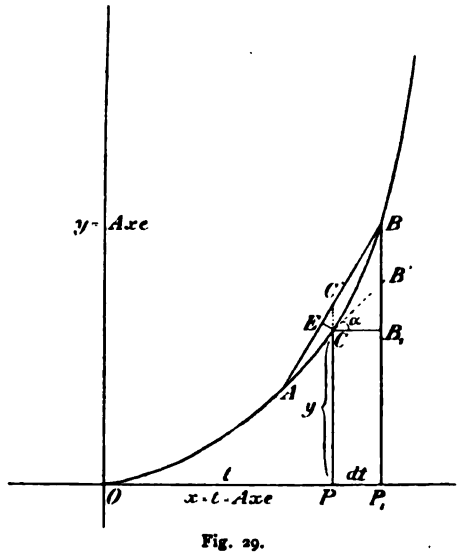


Fig. 29.

Die Endpunkte aller y-Gröfsen liegen nun auf einer krummen Linie (Figur 29). Jeder Mathematiker sieht sofort an der Gleichung wie an der Figur, was für eine Kurve es ist. Zu jedem Punkte der Kurve kann man eine Ordinate und zugehörige Abscisse t finden. Die Kurve ist selbstredend nicht etwa irgend eine beim Falle vorkommende krumme Bewegung, sondern eine bloſse bildliche Ausdeutung. Sie dient nur dazu die Endpunkte der Fallstrecken bequemer und rascher zu übersehen und die Längen zu vergleichen. Alle Parallelen zur y-Axe sind behaftet mit Metern, alle Parallelen zur x-Axe mit Zeiteinheiten. In der Gleichung selbst steht, analytisch genommen, keine Benennung, aber man denkt sie sich nebenbei (siehe

das zweitvorhergehende Kapitel). In der y-Richtung erkennen wir stets nur abhängige, feste Weitenbehaftungen, und die zweidimensionalen Figuren, die wir mittels irgend welcher Koordinaten, oder Hilfslinien zeichnen können, geben uns gewisse Verhältnisse zwischen Zeit- und Raumgröfsen wieder, nämlich irgendwie behafteter Zahlengröfsen mit zugedachten Benennungen, und als Verhältniswerte (z. B. *tan*) reine Zahlenwerte.

Es fragt sich, ob man nun imstande ist einerseits arithmetisch, andererseits geometrisch das herauszusuchen, was wir uns bei der Fallbewegung vorstellen möchten und was man zu nennen pflegt Geschwindigkeit, Beschleunigung und Ähnliches; ob man sich in geeigneter Weise in das Unendlichkleine versetzen und Vorstellungen anschaulich bilden kann, die man in der Natur nicht sieht, die man aber durchaus zum Verständnis der Natur haben mufs. Zu erkennen, wie grofs etwa der Weg in der ersten unendlichkleinen Zeit nach Beginn des Falles sei, dazu nützt uns die zweidimensionale Übertragung zunächst nichts. Zeichnen können wir das Unendlichkleine nicht, wollen wir es uns vorstellen, so können wir annehmen, auch für unendlichkleine Mafse gelte die Formel $y = g/2\, t^2$. Dies läfst sich nie in der Natur konstatieren, es läfst sich aber überhaupt nicht ganz für sich allein angeben, wie grofs dieses $y = g/2 \cdot \delta^2$ oder $g/2 \cdot dt^2$ sei, wir sagen, es sei wohl eine unendlichkleine Gröfse zweiter Ordnung; dafs sie mit dem Faktor $g/2$ behaftet sei, hat nur Sinn, wenn wir imstande sind dadurch wieder auf das Endliche g zu kommen, also uns genügend viele unendlichkleine Gröfsen zweiter und dann erster Ordnung vorzustellen. Man kann auch die Annahme, es sei das Unendlichkleine im Einzelnen wirklich durch g irgendwie ausdrückbar, aufgeben. Wir müssen indessen, sobald wir durch unendlichviele unendlichkleine Gröfsen zu dem Endlichen in der Vorstellung gelangen wollen, diese Summation auch dementsprechend vornehmen.

Bilden wir zunächst $t + dt$, so fragen wir: hat dt neben t einen Sinn? Es trägt zur endlichen Vermehrung des Wertes von t nicht bei, vielmehr haben wir eine äufsere Zusammensetzung von Gröfsen zweier Weitenbehaftungen vor uns; dt hat nur eine bestimmte Bedeutung im Verhältnis zu anderen unendlichkleinen Gröfsen, $dt \cdot dt$ gar nur im Verhältnis zu anderen zweiter Ordnung. Es ist nämlich t^2 nicht etwa eine Gröfse zweier Dimensionen, also $dt \cdot dt$ gehört auch nur Zahlenwerten gerechnet in einer Dimension, ist also eine unendlichkleine Zahl zweiter Ordnung.

Die Quadrierung $(t + dt)^2 = t^2 + 2t \cdot dt + dt^2$ bedeutet auch nicht, dafs es etwa darauf ankomme t^2 oder dt^2 gerade um das

zweifache Produkt $t \cdot dt$ zu vermehren; denn alle diese Summanden gehören verschiedenen Weitenbehaftungen an. Aber wenn man mit t einerseits, mit dt und dt^2 andererseits noch entsprechend viele Gröfse gleicher Weitenbehaftung vergleicht, sodafs die Gröfsen der einen übergehen in Gröfsen der anderen Weitenbehaftung, dann gilt auch jene bestimmte Form. Die Ausführung soll also bedeuten, dafs bei unserer Funktion stets das Gesetz der Potenzierung inne gehalten werden soll. Wenn wir uns nämlich statt des einen dt unendlichviele solcher vorstellen und schreiben $t + (dt_1 + dt_2 + dt_3 + \ldots)$, so ergiebt sich sicher $(t + [dt_1 + dt_2 + dt_3 + \ldots])^2 = t^2 + 2t \cdot (dt_1 + dt_2 + \ldots) + (dt_1 + dt_2 + \ldots)^2$ nach den gewöhnlichen Gesetzen der endlichen Zahlen. Betrachten wir den zweiten Summanden allein, so können wir ihn schreiben $2t \cdot dt_1 + 2t \cdot dt_2 + \ldots$ Jedenfalls können wir nun innerhalb der Weitenbehaftung des Unendlichkleinen die Glieder dt_1 usw. logisch voneinander trennen und auch äufserlich die ganze Summe in veränderter Reihenfolge $t^2 + 2tdt_1 + 2tdt_2 + \ldots$ schreiben, sobald man nur den Gedanken dabei festhält, es solle ein Glied wie $2t \cdot dt_1$ nicht für die Dauer und nicht für unsere schliefslichen mit dem Endlichen zu vergleichenden Resultate isoliert gehalten werden von unendlichvielen anderen unendlichkleinen Gröfsen. Und es bedeutet $y = g/2\ (t + [dt_1 + \ldots])^2 = g/2\, t^2 + g/2 \cdot 2tdt_1 + g/2\, dt_1 + g/2\, 2\, t\, dt_2 + \ldots$, es bestehe die so zerlegte Fallstrecke aus der Strecke, hervorgebracht durch die teilweise Wirkung der einen endlichen Zeit t (ich will im Folgenden sagen: der alten Zeit), dann einer Strecke, beeinflufst durch die bisherige alte Zeit t und die eine neue Zeit dt_1, in der Weitenbehaftung des Unendlichkleinen gedacht, aber zusammen mit den übrigen derartigen hervorbringend eine endliche Strecke; endlich aus Strecken, nur bewirkt durch die neue Zeit dt_1 usw.

Es möge nun, auch wenn ich mir nur eine einzelne unendlichkleine Zeit dt vorstelle, die Quadrierung von $t + dt$ einen dem Gesagten entsprechenden Sinn haben, den Sinn einer logisch möglichen äufseren Zusammenstellung von Gröfsen verschiedener Weitenbehaftung, die unter später hinzugefügten und gleich von vornherein im Auge behaltenen Umständen allesamt zu endlichen Gröfsen anwachsen können oder doch gewisse Beziehungen der endlich-sinnlichen Bewegung deutlicher machen.

In der Figur (29) haben die Strecken folgende Bedeutung. In der x- oder t-Axe stelle man sich eine alte Zeit $t = OP$ mit einem bestimmten Endpunkte P vor, sodafs PC das zugehörige y oder die

Fallstrecke in Metern wäre. t soll endlich sein; dann kann man sich im Grenzgebiete (nach unserer früheren Definition) dieses endlichen Endpunktes P andere, im Unendlichkleinen von ihm unterscheidbare Punkte vorstellen, z. B. P_1, sodafs $PP_1 = dt$ eine unendlichkleine neue, sich an t anschliefsende Zeit wäre, die an sich noch unbestimmt ist. Dann gehört zu $t + dt$ die Ordinate $P_1 B$, sie ist eine gemischte Summe und besteht aus $y = P_1 B_1 = PC = g/2 \cdot t^2$ und aus $B_1 B$. Dies $B_1 B$ kann nur bedeuten $P_1 B - P_1 B_1 = P_1 B - PC = g/2\,(t + dt)^2 - g/2\,t^2$. Wir wollen diese unendliche kleine Differenz zweier Ordinaten nennen dy oder das Differential der Funktion y. Wir können dasselbe schreiben $g/2\,(t^2 + 2tdt + dt^2 - t^2)$ und, da wir die oben genannten Gedanken immer bei dieser gemischten Summe beibehalten, sind wir auf dem Wege zu einem neuen endlichen Werte von t und der Fallstrecke. Wir dürfen auf diesem Wege wohl Umschau halten und werden nicht fürchten uns in Verkehrtes zu verlieren, wenn wir immer den alten endlichen und den neubetretenen endlichen Weg im Auge behalten. Ohne Frage ist $t^2 = t^2$, es bleibt mithin $dy = (2t \cdot dt + dt^2) \cdot g/2$, in dem die Weitenbehaftung des Endlichen nicht mehr unmittelbar enthalten ist, sondern nur noch Gröfsen zweier niedrigerer Behaftungen. Was bedeuten nun die beiden Summanden? Dies ist sehr leicht zu sagen für den zweiten. Denn da $g/2 \cdot t^2$ den Fallweg, hervorgebracht in der Zeit t, von der Ruhe, dem Anfange der Zeit t an gerechnet, bedeutet, so mufs ganz entsprechend $g/2 \cdot dt^2$ einfach einen Fallweg bedeuten, hervorgebracht in der Zeit dt, so als ob der Körper am Anfang der Zeit dt geruht und sich einfach nach dem natürlichen Fallgesetze bis zum Ende der Zeit dt bewegt hätte (wieder setzt man hier voraus, dafs die Gesetze des Falles ebensowohl für das Unendlichkleine gelten wie für das Endliche). Bei dem Summanden $gt \cdot dt$ kommt aber t und dt vor, also steckt darin in irgend welcher Weise die Wirkung der alten, endlichen Zeit t und auch noch die Zahl dt. Letztere bedeutet nichts anderes als den unendlichsten Bruchteil einer Einheit, eigentlich einer Sekunde, aber — wie wir sahen — für die Fallwege nur einer benennungslosen Zahleneinheit. $gtdt$ ist also die unendlichkleine (hiermit ist dt genügend ausgedrückt und nun erledigt) Wirkung dessen, was beim Falle in der alten Zeit t vor sich geht (hiermit ist gt ausgedeutet). Würde man unser dy einfach mit unendlich multiplizieren oder durch eine unendlichkleine Zahl dividieren, so würde man erhalten eine Summe gemischt aus einem endlichen Summanden und einem unendlichkleinen, nämlich, falls dieser unendlichkleine Divisor gleich dem unendlichkleinen Bruchteil dt gewählt wird, die Summe $gt + g/2 \cdot dt$. Betrachtet man solche Summe nur für das

Weitengebiet des Endlichen, so hat der unendlichkleine Summand keine vermehrende Bedeutung und es wäre der Ausdruck genau der endliche Weg $g \cdot t$. Ebenso hat in dy der zweite Summand keine Bedeutung für die Vermehrung des unendlichkleinen ersten $gt \cdot dt$ und wir dürfen sagen: für die Weitenbehaftung mit dem Unendlichkleinen ist $dy = gt \cdot dt$. Diese Gröfse, nicht die gemischte $gtdt + g/2\,dt^2$, pflegt man das Differential zu nennen.

Eine Wirkung der den Fall beherrschenden Gesetze, hervorgebracht nur innerhalb der alten Zeit t, ohne irgend eine den Wert vermehrende Wirkung der — ich will kurz sagen: — Fallkräfte innerhalb der unendlichkleinen neuen Zeit, heifst nichts anderes als eine über das Ende der Zeit t hinaus fortgesetzte Bewegung ohne die Beschleunigung des Falles, also eine unendlichkleine Geschwindigkeit am Ende von t.

Auch in der Figur (29) kann man solche Trennung der unendlichkleinen Endgeschwindigkeit von dem neubewirkten Fallraume $g/2\,dt^2$ vornehmen. Man mufs aber freilich, wenn man die Wirkung der alten Zeit als Strecke begreifen will, auch ein wenig in die alte Zeit zurückgreifen. Kommt in der neuen Zeit dt die eigentliche Wirkung der Fallkraft zutage, so wird dadurch die von uns gebildete Kurve eine krumme. Das Wesen des Krummen aber im Gegensatze zum Wesen des Geraden, also hier einer Geschwindigkeit ohne Beschleunigung kann man aber nur begreifen durch mindestens drei unendlichnahe Punkte der Kurve, durch das wesenswichtige Dreieck. Es sei also A ein Punkt der Kurve (Endpunkt einer Ordinate, näheres über die Lage von A im drittnächsten Abschnitte!), welcher noch dem Grenzgebiete des endlichen Punktes P bez. C angehört, aber noch vor C, also noch im Bereiche der alten Zeit liegt. Würde dann die Seite AC des wesenswichtigen Dreiecks ACB einfach verlängert bis B', so würde dy in B' getrennt, und es entstände statt des Dreiecks CB_1B das Dreieck CB_1B'. Es ist nun nach früheren Sätzen die Verlängerung von PC, nämlich CC', angehörig dem „vermittelnden" Dreiecke $CC'E$, von dem Grade δ^2, während AC oder AB' unendlichklein vom ersten Grade sind. Und es verhält sich $AC : AB' = CC' : B'B$. Also sind die rechten Glieder von derselben Weitenbehaftung, weil es die linken auch sind, mithin ist $B'B$ unendlichklein vom zweiten Grade, während B_1B' vom ersten Grade ist. Wächst PC oder P_1B_1 um B_1B', so ist dadurch ein die Krümmung kennzeichnendes wesenswichtiges Dreieck nicht entstanden, sondern nur eine gerade Strecke ACB', die Krümmung entsteht erst durch den Zusatz $B'B$ zu B_1B'. Also ist $B'B = g/2\,dt^2$,

welches ja ebenfalls die den Fall von der gleichmäfsigen Bewegung unterscheidende Wirkung in der neuen Zeit dt vorstellt; und es ist $B_1B' = gt \cdot dt$.

Was hat es nun zu bedeuten, wenn ich das gemischte $dy = g \cdot t \cdot dt + g/2\, dt^2$ oder $B'B$ mit ∞ multipliziere oder durch δ dividiere? Nehme ich ein ganz beliebiges, also nicht gerade dem dt gleiches δ, so wird $dt : \delta$ nicht gleich 1, es entsteht zwar eine endliche Strecke, aber nicht gerade die Strecke $g \cdot t$. Es bedeutete aber dt einen unendlichen Bruchteil einer Sekunde und in dieser Zeit kam die unendlichkleine Endgeschwindigkeit B_1B' zustande. Es ist nun natürlich diese Geschwindigkeit so oft zu vervielfachen, dafs gerade eine in einer Sekunde zurückgelegte Strecke entstehen müfste, also ganz genau mit der Zahl dt. Diese ist aber in der Figur CB_1. Will man nur wissen, welche Endgeschwindigkeit die Fallwirkung während der endlichen Zeit t hervorbringt, nicht aber, welches die Wirkung der die Beschleunigung erregenden Ursache in der kleinen neuen Zeit dt ist, so kann man dies Glied $g/2 \cdot dt^2$ oder die Strecke $B'B$ einfach fortlassen, und es ist für die Feststellung der Geschwindigkeit völlig ausreichend und allein wertbestimmend das Dreieck CB_1B'. Dies ist das charakteristische Dreieck von Leibniz (oder Barrow). Es sieht zwar aus, als verbände es nicht zwei unendlichnahe Punkte der Kurve, wir brauchen aber nur in der Figur durch A eine Parallele zur x-Axe zu legen, so entsteht dasselbe Dreieck mit der Hypotenuse AC. Der Mangel dieses charakteristischen Dreiecks ist, dafs dabei die Krümmung selbst fortfällt, hierfür mufs man das wesenswichtige Dreieck heranziehen, also $B'B$ in der Figur mitberücksichtigen und damit $AB'B$ und ACB. Man darf darum, wenn man auf das wesenswichtige Dreieck und alles, was in die Weitenbehaftung δ^2 hineinreicht, für den Augenblick verzichtet, B_1B' als Differenz der Ordinaten betrachten und nun bilden $B_1B' : B_1C$ oder $dy : dt$ oder dy/dt, gesprochen „dy nach dt", den sogenannten ersten Differentialquotienten der Funktion y, genommen nach der unabhängigen Variabelen, hier der Zeit.

Da $dy : dt$ in unserem physikalischen Falle ergiebt $g \cdot t\, dt/dt$ oder $g \cdot t$, so ist dies eine nicht in der Figur sichtbare endliche Strecke, deren unendlichkleinster Teil dy in der Figur als B_1B' sichtbar ist, wenn man sich diese Strecke mit Metern benannt denkt. Es ist das Verhältnis $dy : dt$ ebenfalls hier eine Anzahl von Metern, bedeutet also nicht ganz genau dasselbe wie *tan* des Winkels $B'CB_1$. Denn die gonyometrische Tangente ist eine reine Zahl; denkt man sich freilich zu der Strecke $B'B_1$ immer Meter hinzu, zu der Strecke CB_1

aber keine Benennung, und dies auch, wenn man schreibt $tan\, \alpha = dy : dt$, dann bedeutet diese mit der Benennung Meter versehene Tangensfunktion die endliche Geschwindigkeit $g \cdot t$ (in diesem Falle). Im allgemeinen ist $tan\, \alpha$ im charakteristischen Dreiecke gleich dem Differentialquotienten, wenn auch dieser eine reine Zahl ist, also entweder Ordinate und Abscisse keine Benennung hat, oder beide dieselbe Benennung tragen, die dann fortfällt.

Wir müssen noch einmal auf einen wesentlichen Unterschied zwischen unserer Betrachtung mit einer einzigen unendlichkleinen Zeitstrecke und der nachherigen Multiplikation mit ∞ und der Vorstellung zurückkommen, dafs von vornherein unendlichviele dt vorgestellt werden, die zusammen eine endliche neue Zeit t_1 sein sollen. Dann entsteht das Resultat $g \cdot t \cdot t_1 + g/2 \cdot t_1^2$, wobei beide Summen dem Endlichen angehören, also einfach eine neue endliche, an die alte angesetzte Fallstrecke. Entwickelt man aber zuerst $(t + dt)^2 = t^2 + 2t \cdot dt + dt^2$, so entsteht kein endlicher Wert, sondern unser $dy = g \cdot t \cdot dt + g/2 \cdot dt^2$, welches dem Unendlichkleinen angehört, nebst einer zugefügten Vorstellung des Unendlichkleinen zweiten Grades, die neben $g \cdot t \cdot dt$ keinen vermehrenden Gröfsenwert hat. Würde man jetzt durch dt dividieren oder das Dastehende unendlichoft summiert denken, so wird das Glied $g/2 \cdot dt^2$ nicht endlich, es entsteht nur $g \cdot t$ als endlich, aber nicht das Resultat $g \cdot t \cdot t_1 + g/2\, t_1^2$. Der Unterschied ist also der, dafs $dy : dt$ eine Raumlänge bedeutet, welche in ihrem Werte durch eine etwaige neue Zeit des Fallens t_1 gar nicht beeinflufst wird; es ist gar nicht so gebildet, als ob der Körper weiter fiele! Vielmehr hat man eine unendlichkleine Strecke $g \cdot t \cdot dt$ — oder $g \cdot t \cdot dt + g/2 \cdot dt^2$ — einfach ebensooft zu sich selbst addiert, wie die Zahl $1 : dt$ angiebt.

Wenn man demnach die nach Verlauf einer endlichen Zeit t in einer noch folgenden unendlichkleinen Zeit vom fallenden Körper zurückgelegte unendlichkleine Strecke (ersten Grades, die auch noch, ohne Wertvermehrung in dieser Weitenbehaftung, zusammengesetzt ist mit einer Strecke niederer Weitenbehaftung) unendlichoft addiert, so entsteht daraus eine endliche Strecke, die nicht vom fallenden Körper (während die Ursachen des Falles wirken) zurückgelegt, vielmehr nur künstlich gedacht wird. Ist dy/dt demnach eine Geschwindigkeit, so ist es eine künstliche, endliche Endgeschwindigkeit.

Das Differential dy aber ist nicht etwas Künstliches, sondern etwas unserer Vorstellung von der Fallbewegung

direkt Entnommenes. Ist *dy* also eine Geschwindigkeit, so ist es eine solche nach Leibnizscher Art, für einen unendlichkleinen Bruchteil einer Sekunde.

Wieso aber ist es überhaupt eine Geschwindigkeit? So lange wir noch stehen haben $g \cdot t \cdot dt + g/2 \cdot dt^2$, ist es eine gemischte Summe und bedeutet alles das, was der Körper zurücklegt von dem Punkte an, den er nach Verlauf der alten Zeit t erreicht hat (in Figur 29 die Strecke B_1B). Wir führten aber bereits aus, daſs alles was $g \cdot t \cdot dt$ für das Endliche, für die Natur irgendwie repräsentieren könnte (falls wir es in das Sinnliche bringen könnten — durch Vervielfachung) herrührt von einer Wirkung, die während der alten Zeit t stattfand, nicht von einer Wirkung, die nach der Zeit t sich räumlich kundgab. Es ist deswegen losgelöst von den weiter wirkenden Ursachen des Falles, und eine solche Bewegung, die sich nach allen möglichen Ursachen, wenn man sie nicht hindert, zeigt (Trägheit) heiſst für uns eine Geschwindigkeit.

Das Differential und der Differentialquotient der Fallgeschwindigkeit $x = g \cdot t$.

Weil ich im Vorhergehenden die Fallstrecke $g/2 \cdot t^2$ als Variabele mit y bezeichnet habe, so will ich den ersten Differentialquotienten dieser Fallstrecke nach der Zeit, nämlich $g \cdot t$ nicht wieder mit y bezeichnen. Es könnte dies zwar geschehen und wäre dann ein anderes y als vorher, aber auch eine von der Zeit als Unabhängiger abhängige Variabele. Doch möchte ich Verwechselungen vorbeugen; die Wahl des Buchstabens ist ja ganz beliebig, ich wähle also x für die künstliche, die Sekunden-, die endliche oder, was alles dasselbe ist, die Endgeschwindigkeit. Natürlich bedeutet dieses x nun nicht etwa die Koordinate, der wir vorher die unabhängige Variabele zuschoben. Vielmehr müssen wir uns zur bildlichen Darstellung dieser geradlinigen Geschwindigkeit eines rechtwinkligen Koordinatensystems bedienen, dessen eine Achse (sie sei horizontal oder parallel dem unteren Rande des Papieres) wieder mit Zeitgröſsen behaftet wird, während die zu irgend einem Werte t gehörige Ordinate die Länge der betreffenden Endgeschwindigkeit nach t Fallsekunden bezeichnet. Die Fallstrecke selbst kommt in der ganzen Figur überhaupt nicht mehr vor, sondern nur die Fallzeiten, jedesmal vom Anfang des Falles an gerechnet und die Gröſsen der künstlich vom Fall getrennten mit gleichmäſsiger Geschwindigkeit vorgestellten (oder bei der Fallmaschine annähernd richtig, entsprechend geschauten) Sekundenwege. Die Gleichung $x = g \cdot t$ bezeichnet die sämtlichen Endpunkte aller möglichen Endgeschwindig-

keiten, und diese Endpunkte liegen auf einer Geraden, die durch den Nullpunkt geht und einen Winkel mit der t-Axe bildet, deren gonyometrische Tangente gleich g ist. Es sei (Figur 30) seit Beginn des Falles die endliche Zeit t d. h. soviel Zeiteinheiten verstrichen, wie man auf der Strecke OP ablesen könnte; dann ist PC die Grösse der in einer Sekunde vom Körper zurückzulegenden Endgeschwindigkeit, falls jetzt plötzlich die treibende Erdkraft aufhörte.

Sieht man von der Reibung ab, die der Fahrende durch seine Kraft stets überwinden muss, so ist das Radfahren ein passender Vergleich. Bei gleichmässiger Anstrengung läuft das Rad immer schneller (ebenso wie der fallende Körper), wenn man aber plötzlich nach t Sekunden die Füfse vom Pedal nimmt, so rollt das Rad mit gleichmäfsiger Geschwindigkeit (abgesehen von der Reibung) weiter und zwar in einer Sekunde um eine bestimmte Strecke, die künstliche Endgeschwindigkeit. Hier hiefse sie nur insofern künstlich, als man durch Kunst plötzlich jede Triebkraft aufser Thätigkeit setzt. Sie ist die Strecke PC oder $x = g \cdot t$, falls ohne Aufhören des Tretens nach t Sekunden vom Radfahrer der Weg $g/2\ t^2$ erfahrungsgemäfs zurückgelegt würde; natürlich ist kein Radfahrer im stande, mit solcher Gleichmäfsigkeit zu treten, wie die Erde anzieht. Hört der Radfahrer nicht auf zu treten, so ist seine am Ende von t vorzustellende unendlichkleine Geschwindigkeit $g \cdot t \cdot dt$, also in der Figur der unendlichste Teil der Strecke PC.

Wächst nun die Zeit des Fallens oder des Tretens um PP_1 oder dt, so ist die nach $t + dt$ sich am Steine oder am Rade zeigende Endgeschwindigkeit um B_1B oder dx grösser als die nach der Zeit t. Dieses Differential der Endgeschwindigkeit ist etwas Unendlichkleines, aber keineswegs dasselbe wie der unendlichste Teil der vorhergehenden künstlichen Endgeschwindigkeit. Denn dieser ist die natürliche, unendlichkleine Geschwindigkeit nach t Sekunden des Falles und hängt nicht mehr von den Fall- oder Tretkräften ab, die nach der Zeit t noch angewendet werden, sondern richtet sich in seiner Grösse nur nach der alten Zeit t. Das Differential dx oder $P_1B - PC$ bezeichnet die unendlichkleine Änderung, welche die künstliche Endgeschwindigkeit zeigt, wenn das Fallen oder Treten noch eine unendlichkleine neue Zeit dt fortgesetzt worden ist, die Art und Weise, wie die Endgeschwindigkeit bei weiter verlaufendem Falle sich ändert. Es ist mithin dieses dx oder B_1B eine höchst komplizierte Vorstellung. Beim natürlichen Falle oder beim wirklich fortgesetzten Treten kommt dieses dx überhaupt gar nicht vor. Denn es tritt dabei die endliche oder künstliche Sekundengeschwindigkeit überhaupt nicht in Aus-

führung; was daselbst natürlich vorkommt oder wenigstens als natürlich und wirklich vorkommend gedacht werden kann, ist die unendlichkleine Endgeschwindigkeit $gt \cdot dt$. Wenn man allerdings mit dem Treten aufhört und das Rad weiter rollen läfst, dann tritt in der nächsten Sekunde die gleichmäfsige Endgeschwindigkeit in natürliche Erscheinung. Dann aber tritt dx sicherlich nicht in Erscheinung. Höchstens könnte man sagen, der unendlichste Teil dieser gleichmäfsigen Sekundenstrecke sei die Leibnizsche oder natürliche unendlichkleine Geschwindigkeit, abhängig nur von der alten Zeit t. Nicht aber ist ein unendlichkleiner Teil dieser Geschwindigkeit die Änderung von $x = g \cdot t$ selbst. Letztere Änderung dx kommt überhaupt nur vor, wenn das Einhalten des Tretens nicht stattfindet, wenn nach der Tretzeit t noch eine Fortsetzung des Tretens in der Zeit dt stattfindet. Dann aber kann eine endliche Endgeschwindigkeit x gar nicht zu stande kommen, also auch nicht eine unendlichkleine Veränderung dieser endlichen Geschwindigkeit x.

Was kommt denn nun eigentlich zu stande, wenn das Fallen oder das Treten nach der Zeit t noch um die Zeit dt fortgesetzt wird? Nun wir wissen ja, es kommt die Leibnizsche Geschwindigkeit $g \cdot t \cdot dt$ derartig zu stande, dafs die Vorstellung sie annehmen kann für die Weitenbehaftung des Unendlichkleinen. Wir wissen aber, das sich $g \cdot t \cdot dt$ ändern mufs, wenn sich die alte Zeit t um irgend etwas ändert. Es möge sich die alte Zeit t um dt ändern, d. h. der fallende Körper soll nicht t, sodern die Zeit $t + dt$ fallen. Die unendlichkleine Geschwindigkeit würde nunmehr sein $g(t + dt) \cdot dt$, indem hier einfach an die Stelle des t im vorigen Abschnitt ein $t + dt$ getreten ist, oder $g \cdot t \cdot dt + g \cdot dt^2$. Also dadurch, dafs statt in der Zeit t der Fall in einer Zeit $t + dt$ vor sich gegangen ist, ist statt der unendlichkleinen Geschwindigkeit $g \cdot t \cdot dt$ die Geschwindigkeit $g \cdot t \cdot dt + g \cdot dt^2$ eingetreten. Es hat sich demnach die Leibnizsche Geschwindigkeit um ein Unendlichkleines zweiter Ordnung, nämlich um $g \cdot dt^2$ oder, da dt als Zahl der unendlichste Teil der Einheit bedeutet, um g / ∞^2 geändert. Diese Gröfse enthält, wie wir sehen, die Zeit t überhaupt nicht mehr. Es ist für sie also ganz gleichgültig, wie lange Zeit der Fall oder das Treten schon gewährt hat. Es stellt denjenigen Zuwachs der unendlichkleinen natürlichen Geschwindigkeit dar, welchen diese Geschwindigkeit unter allen Umständen, nach jeder Zeit erhält und zwar in jeder unendlichkleinen Zeit, in der überhaupt die

Fallkraft oder die Tretkraft wirkt. Es ist demnach ein Ausdruck für die Gröfse dieser Kraft, ganz unabhängig von der bisherigen Wirkungszeit, ein Ausdruck für das, was die beschleunigte Bewegung von der gleichmäfsigen Bewegung unterscheidet.

Bei einer gleichmäfsigen Bewegung ist die unendlichkleine Endgeschwindigkeit immer dieselbe, wie lange auch schon die Bewegung anhalten mag, sie hängt also nicht von der Zeit ab; die Zeit kann darum auch in der Form für diese Geschwindigkeit nicht durch Vermehrung irgend eine Änderung, irgend eine Gröfse dieser Art hervorbringen, die gegenüber der Geschwindigkeit wieder unendlichklein wäre. Zwar auch dann kann man sich eine unendlichkleine Geschwindigkeit überall vorstellen und auch von dieser, wenn man Lust hat, sich wieder einen unendlichkleinen Teil denken, aber dieser unendlichkleine Teil ist etwas ganz Anderes als jene unendlichkleine Gröfse zweiter Ordnung $g \cdot dt^2$. Diese Gröfse ist also nicht der unendlichste Teil eines unendlichsten Teiles von PC (siehe Anfang dieses Abschnittes), also nicht etwa $g \cdot t : \infty^2$, auch nicht der unendlichste Teil des unendlichsten Teiles von P_1B d. h. von $g \cdot (t + dt)\, dt$, denn der unendlichste Teil von dieser Gröfse wäre $g \cdot (t + dt)\, dt^2$; sondern es ist der unendlichste Teil von dx oder BB_1.

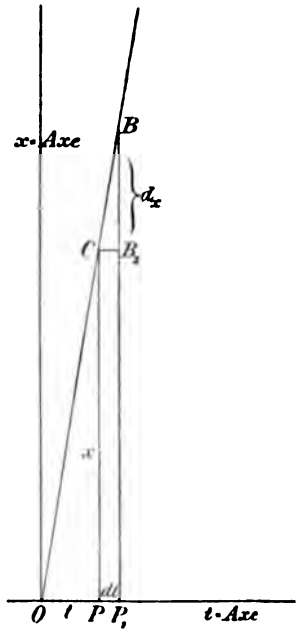


Fig. 30.

Wir sahen, dafs dx war $= g(t + dt) - g \cdot t$, nämlich $= P_1B - PC$. Dies ergiebt aber nach Ausführung der Klammer die Gröfse $g \cdot dt = dx$. Der unendlichste Teil hiervon ist in der That $g \cdot dt^2$.

Dieses $g \cdot dt^2$ oder $dx \cdot dt$ oder, wenn wir für x wieder setzen (voriger Abschnitt) $dy : dt$, dieses $d\frac{dy}{dt}\, dt$ ist dasjenige, welches die Wirkung der beschleunigenden Kraft in unendlichkleiner Zeit, ganz unabhängig von der bisher verlaufenen alten Zeit darstellt. Man mufs es also nennen die Beschleunigung, eine unendlichkleine Grösse zweiter Ordnung, welche beim natürlichen Verlauf der beschleunigenden Kraft in jedem unendlichkleinen Zeitteilchen dt in derselben Art auftritt. Wir müssen es für die Leibnizsche Beschleunigung

erklären. In der Figur kommt sie nicht vor, nur dann, wenn wir uns BB_1 in unendlichkleine Teile zerlegt denken. Die Gröfse dx oder das Differential der endlichen Endgeschwindigkeit ist es nicht.

In der Physik nennt man nach Newtons Beispiel etwas ganz anderes die Beschleunigung oder das Maafs der Kraft, nämlich nicht eine uendlichkleine Gröfse zweiter Ordnung, nicht die Gröfse dx multipliziert mit dt oder dividiert durch ∞, sondern im Gegenteil diese Gröfse dx, dividiert durch dt oder multipliziert mit ∞. Auf diese Weise mufs nicht eine unendlichkleine Gröfse zweiten Grades herauskommen, sondern eine endliche Gröfse. Es ist diese $dx : dt$, also in der Figur $B_1B : B_1C$ oder $tan\ BCB_1$ d. h. der Differentialquotient von x nämlich dx/dt oder, da x selbst der Differentialquotient von y oder dem Fallwege ist, ist diese physikalische Beschleunigung der zweite Differentialquotient (Differentialquotient des Differentialquotienten) $\frac{d^2y}{dt^2}$ der Funktion y, also hier der Fallstrecke.

Die Rechnung ergiebt dafür, da $dx = g \cdot dt$ war, die Gröfse g. Jeder Physiker nennt dieses g oder etwa 9,8 m die Fallbeschleunigung oder das Maafs der Erdanziehung.

Es ist dies auf unserem Denkwege, dem Wege der höheren Mathematik oder des Differenzierens, auf eine sehr komplizierte Art gefunden, unter mehreren Annahmen, die bei dem fortgesetzten Falle überhaupt nicht vorkamen. Die Leibnizsche Beschleunigung oder $g \cdot dt^2 = g : \infty^2$ dagegen ist etwas, was unsere Vorstellung allerdings bei der wirklich fortgesetzten beschleunigten Bewegung ohne Unterbrechung der Fallkraft oder Tretkraft als natürlich vorhanden annimmt. Dafür hat die endliche Beschleunigung g oder der zweite Differentialquotient der Fallstrecke, genommen nach der Zeit, aber den Vorzug, eine endliche Gröfse zu sein. Wann sehen wir diese endliche Gröfse? Sehen wir sie als eine Beschleunigung?

Die physikalische (endliche oder künstliche) Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Wir haben gesehen, dafs während die Kraftwirkung vor sich geht, weder eine Endgeschwindigkeit im Sinne der Physik, die endliche Gröfse gt oder $dy : dt$, vor sich geht noch auch die sogenannte Beschleunigung g d. h. $d^2y : dt^2$. Man sieht nach Ablauf von irgend welchen ganzen oder auch gebrochenen Sekunden nur die Fallstrecken $g/2 \cdot t^2$.

Man kann sich aber wohl vorstellen die Geschwindigkeit am Ende irgend einer Zeit t als eine unendlichkleine Gröfse erster Ordnung, nämlich dy, und auch mittelst der Weitenbehaftung des Unendlichkleinen zweiter Ordnung die immer gleiche Beschleunigung, die unabhängig ist von der alten Fallzeit, nämlich das zweite Differential d^2y oder das erste Differential der Endgeschwindigkeit dy.

Die Natur zeigt, wenn man den Trägheitssatz anerkennt, die Kraft immer nur im Unendlichkleinen zweiter Ordnung, niemals sinnlich; was wir sinnlich wahrnehmen, sind Resultate, hervorgegangen aus unendlichvielen Wirkungen untermischt mit den Thatsachen der Trägheit. Da die Trägheit nun einmal gesondert vorgestellt wird, aber doch in jedem Augenblicke vorhanden sein soll, so kann es auch im Endlichen keine reine Kraftwirkung ohne Mitwirkung der Trägheit geben. Selbstverständlich ist gerade durch den Abzug der Trägheit die Kraft definiert. Aber wir würden auch ohne das nach einem Unterschiede suchen zwischen solchen Ursachen, die gleichmäfsige Bewegung hervorbringen (also alsdann eine besondere allgemeine Art von Kraft) und solchen, die Beschleunigung hervorbringen, d. h. Wege, die sich nicht mehr wie die Zeiten verhalten, sondern bei gleichen Zeiten zunehmen oder abnehmen.

Man kann es der Physik nicht verdenken, namentlich nicht der experimentellen, welcher die Rechnungen mit den niederen Weitenbehaftungen nicht recht geheuer erscheinen, wenn sie danach sucht, sich die Endgeschwindigkeit als etwas Endliches vorzustellen und ebenso die Beschleunigung. So viel ist gewifs, dafs in demselben Augenblicke die charakteristischen Merkmale, die, gerade im Gegensatze zu der Vorstellung endlicher Fallstrecken, in den niederen Weitenbehaftungen ruhen, verschwinden, also auch die Fallstrecken, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung auf dasselbe Niveau steigen, in ihrem Wesen nicht mehr scharf verschieden sind. Freilich verschieden sind sie doch noch. Der Fallweg ist etwas, was mit der Zeit zunimmt, aber viel rascher als diese; die Endgeschwindigkeit $g \cdot t$ etwas, was verschieden ist, je nach der bis zu ihrem Anfange vergangenen Zeit des eigentlichen Falles, und die Beschleunigung etwas, das von der Zeit überhaupt nicht mehr abhängt. Aber wenn wir diese Gröfsen sehen wollen, müssen wir künstliche Experimente anstellen, die niemals recht gelingen. Wir müssen die Triebkraft plötzlich für eine bestimmte neue Zeit aufhören lassen und den sich nun zeigenden Weg gleichmäfsiger Geschwindigkeit nachzumessen suchen. Also wir müssen die Kraft entfernen, um die bei der Kraftwirkung vorzustellende Geschwindigkeit wahrzunehmen — ein sonderbarer künst-

licher Gegensatz! Um gar die physikalische Beschleunigung zu sehen, müssen wir sie genau so behandeln wie die Endgeschwindigkeit, müssen sie erscheinen lassen als die Endgeschwindigkeit nach der ersten Sekunde des Falles, als $g \cdot 1$, oder wir müssen den Fallweg der ersten Sekunde nachmessen und mit dem der zweiten vergleichen, oder den der zweiten mit dem der dritten usw., und wir finden, dafs die Differenz zweier solcher Sekundenfallwege g ist. Im ersten Falle bringen wir die Beschleunigung gar nur auf den Rang einer Endgeschwindigkeit, betrachten sie als eine teilweiseEndgeschwindigkeit, einen Zusatz, den man zu jeder künstlichen Endgeschwindigkeit am Ende einer Sekunde machen mufs, um die endliche Geschwindigkeit am Ende der ersten zu erhalten. Im zweiten Falle gar machen wir sie zu einer teilweisen Fallstrecke, einem Zusatzfallwege, dazu dienend, um den nächsten einzelnen Fallweg in der nächsten Sekunde der Länge nach zu erhalten.

Es ist nun allerdings richtig, dafs der Zusatz, den jede immer eine Sekunde später eintretende (oder dann künstlich herstellbare!) endliche Endgeschwindigkeit bekommen mufs, um aus der vorhergehenden künstlich (natürlich nicht bei demselben Experimente) gebildeten Endgeschwindigkeit äufserlich gebildet zu werden, mit der Gröfse der Kraft zusammenhängt. Und es ist auch richtig, dafs der Zusatz zum Wege der eigenen Sekunde, der nötig ist, um den Einzelweg der nächsten Sekunde hervorzubringen, ebenfalls durch die Gröfse der Kraft bestimmt wird; aber ist darum diese Gröfse g, dieser endliche zweite Differentialquotient ein Maafs ganz allein für die Kraft, enthält er gar nichts als die Wirkung der Kraft? Würde dies g zu stande kommen ganz allein dadurch, dafs es die Kraft giebt, die wir doch ausdrücklich von der Beharrung getrennt und erst dadurch eine Kraft genannt haben?

Nein, die Endgeschwindigkeit am Ende der ersten Sekunde g rührt nicht blos von der Kraftwirkung her, sondern sie wird mit hervorgebracht durch die Beharrung. Ein Geschwindigkeitszusatz, wie die Beschleunigung auch heifst, oder ein Zusatz zum Wege einer Einzelsekunde rührt ebenfalls her davon, dafs erstens die Kraft wirkt, aber auch zweitens fortwährend das Bestreben der Beharrung in Wirkung tritt. Es kann also sehr mifsverstanden werden, wenn der Physiker sagt, die Beschleunigung wäre das Maafs der Kraft. Sagt man: nicht die Geschwindigkeit, sondern die Beschleunigung ist das Maafs der Kraft, so erscheint der Ausdruck allerdings richtiger; er will alsdann von dem Irrtume abbringen, als könne man aus der erblickten Geschwindigkeit irgend eines Körpers sofort auf die

Gröfse der Kraft schliefsen. Das wäre nur dann möglich, wenn man weifs, dafs der Körper erst stillgestanden hat, und auch, wie lange dies her ist. Vergleicht man aber z. B. zwei Einzelfallräume in zwei aufeinanderfolgenden Sekunden, oder die künstlichen Endgeschwindigkeiten an den Enden von zwei solchen, so gewinnt man eine bessere Anschauung von der Gröfse der Kraft, die fortwährend wirken soll und braucht nicht zu wissen, wie lange der Körper schon in Bewegung ist. Insofern erlaubt g allerdings auf die Kraft zu schliefsen, und man kann auch bei Vergleichung verschiedener solcher Bewegungen auf die Verschiedenheit der bei beiden wirksamen Kräfte schliefsen, indem man diese künstlichen Beschleunigungen vergleicht. Ein Maafs also ist dieser zweite Differentialquotient für Vergleichung von Kräften allerdings, aber er ist nicht ein Ausdruck für die Kraft allein, er ist ein Resultat, hervorgebracht durch die Kraft und die Beharrung. Will man wissen, wie dieses Resultat zu stande kommt, so nützt die physikalische Beschleunigung nicht, so mufs man sich sofort in die niederen Weitenbehaftungen versenken und Leibnizens Spuren folgen.

Die Differentiale geben das, was in der Wirklichkeit vor sich geht, die Handlung besser wieder als die Differentialquotienten, sie lassen uns tiefer in die Natur blicken als die physikalischen Endgeschwindigkeiten und Beschleunigungen. Aber — und das ist für unsere Untersuchungen die Hauptsache — die Differentiale und die Quotienten, die unendlichen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen einerseits und die endlichen der Physik, stehen in einem klaren, widerspruchslosen Zusammenhange. Wir erkennen ihn, wenn wir die Grundsätze des Unendlichen erforschen.

Das zweite Differential,

in der Figur der ursprünglichen Funktion dargestellt mittels des wesenswichtigen Dreiecks.

Es ist nicht möglich, die unendlichkleinen Gröfsen dt in richtigem Verhältnisse zu den endlichen darzustellen. Daher rühren einige Fehler in der Figur 31, die man stets so betrachten mufs, dafs jede Weitenbehaftung für sich vorgestellt wird und bei Vergleichung verschiedener Behaftungen die Fehler berücksichtigt werden. (Auch die Höhen in verschiedenen wesenswichtigen Dreiecken wie CC_0B und CBD, darf man nicht ohne weiteres ihrer Gröfse nach vergleichen, falls beide Dreiecke demselben endlichen Punkte gehören — siehe später: Der Krümmungskreis!)

Es seien PP_1, P_1P_2, P_2P_3 usw. unendlichkleine Gröfsen der unabhängigen Variabelen, in unserm Beispiele vom Falle also der Zeit. Weil dieselben summiert werden sollen, indem man jede Gröfse dt mit Unendlich multipliziert, also durch dt dividiert, so wird man alle diese kleinen Streckchen als gleich annehmen. Die entsprechenden Ordinaten ergeben die Punkte C, B, D, E usw. als Punkte der Kurve. Hat eine Ordinate die Form $y = f(t)$, also im Fallbeispiele $y = g/2 \cdot t^2$,

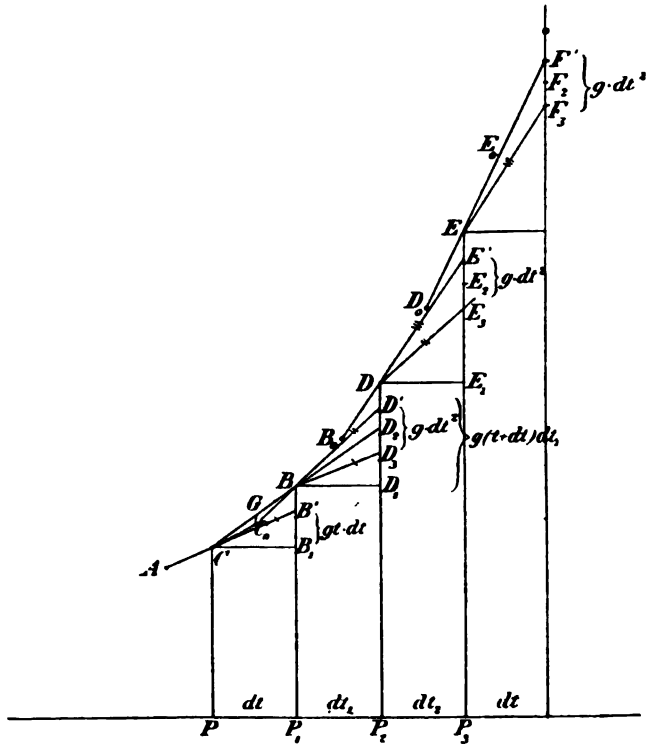


Fig. 31.

so ist $P_1B = f(t + dt)$, also $B_1B = f(t + dt) - f(t)$, hier $= g/2\,(t + dt)^2 - g/2\,t^2 = gt \cdot dt + g/2\,dt^2$. Ist $f(t)$ das Vielfache einer Potenz von t, so enthält jenes dy die endliche Potenz nicht mehr und zerfällt in Summanden mit verschiedener Weitenbehaftung, in unserem Falle in $B_1B' = g \cdot t \cdot dt$ und $B'B = g/2 \cdot dt^2$. Das Dreieck CB_1B' hat unendlichkleine Seiten gleicher Weitenbehaftung, also endliche Winkel, ebenso das Dreieck CB_1B. Letzteres ist das charakteristische Dreieck, C und B sind zwei unendlichnahe Punkte der Kurve. Betrachtet man nur die Gröfsen derselben Weitenbehaftung, so kann man anstatt des-

selben auch das Dreieck CB_1B' setzen. Zieht man aber die Gröfsen, der nächstniedrigen Weitenbehaftung mit in Betracht, so mufs man auf das Dreieck $CB'B$ Rücksicht nehmen, dessen Winkel bei C unendlich-klein ist, weil die Gegenseite unendlich-klein vom zweiten Grade ist.

Die Ordinate P_2D ist $f(t+dt+dt_1) = g/2\,(t+dt)^2 + 2\,(t+dt)\,dt + dt_1^2$, und da $P_2D_1 = f(t+dt) = g/2\cdot(t+dt)^2$ ist, so wird $D_1D = f(t+dt+dt_1) - f(t+dt) = g(t+dt)\,dt_1 + g/2\cdot dt_1^2$. Es sei nun wieder $g/2\cdot dt^2$ als DD' von D aus abgetragen, dann ist der Rest D_1D' eine Gröfse, zusammengesetzt aus Teilen von unendlichkleinem und niedrigerem Grade, nämlich hier $gt\cdot dt_1 + g\cdot dt\cdot dt_1$ oder $g\cdot t\,dt + g\cdot dt^2$. Man kann auf dieser Strecke zunächst wieder von D_1 aus sich abgetragen denken die Strecke $B_1B' = D_1D_3$. Dann bleiben noch übrig Streckchen von niedrigerem Grade. Diejenigen vom nächstniedrigerem Grade, also in unserem Falle unendlichklein vom zweiten Grade, nämlich $g\cdot dt^2$ denke ich mir wieder an D_3 angetragen, und sie würden, falls die Funktion so beschaffen ist wie in unserem Beispiele, also vom zweiten Grade, die Strecke bis D' ausfüllen; wenn aber auch noch Glieder von noch niedrigerem Grade vorhanden wären, die man sich aufserdem auf dieser Strecke liegend vorstellen müfste, ehe der Punkt D' erreicht wäre, so würden dieselben doch für das Unendlichkleine zweiten Grades keinen vermehrenden Wert, keine Bedeutung mehr haben. Also stellt D_3D' das zweite Differential (soweit die zweite Weitenbehaftung in Betracht kommt) vor, in unserem Falle $g\cdot dt^2$. (Durch Verlängerung der Linie CB würde ich in unserem Beispiele gerade auf die Mitte dieser Strecke D_3D', also nach D_2 gelangen, wie leicht aus der Gleichheit von BB', DD^1 und der Gröfse von d^2y erkennbar). Ähnlich gelangt man durch Abtragung der Strecke D_1D' von E_1 aus bis zu E_3 wieder zu einem Dreiecke mit endlichen Winkeln DE_1E_3.

Es ist nämlich $E_1E = f(t+dt+dt_1+dt_2) - f(t+dt+dt_1)$, in unserm Falle $= g/2\cdot 2\,(t+dt+dt_1)\,dt_2 + g/2\,dt_2^2$, und wenn nun EE' wieder $= g/2\,dt^2$, so ist $E'E_1 = g\,(t+dt)\,dt_2 + g\,dt_1\cdot dt_2$. Da nun aber $D_1D' = g\,(t+dt)\,dt_1$ ist, so wird, wenn $dt = dt_1$, $E_1E' = D_1D' + g\cdot dt^2 = E_1E_3 + E_3E'$. Man kann sich also wieder an die bereits bei der Betrachtung des vorigen Zuwachses erhaltene Gröfse D_1D' oder E_3E_1 angesetzt denken die Gröfse $g\cdot dt^2$, die in diesem Beispiele von E_3 bis E' reicht. Dabei können für die Weitenbehaftung mit dem Unendlichkleinen zweiter Ordnung etwaige Glieder mit einer noch niedrigeren Weitenbehaftung fortgelassen werden.

Auf diese Weise entsteht bei jedem neuen Zuwachse dt in der Figur von dem mit dem Index 3 bezeichneten Buchstaben bis zu dem

mit einem Striche oben bezeichneten, das zweite Differential oder für unser Beispiel die Leibnizsche Beschleunigung. Sie ist, wie wir sehen immer dieselbe Gröfse beim Falle, also unabhängig von der bis dahin verflossenen Fallzeit, während die unendlichkleinen Geschwindigkeiten B_1B', D_1D' usw. von der verflossenen Zeit abhängen.

Will man alle Beschleunigungen zusammenzählen, welche sich im Verlaufe einer Sekunde ereignen, so müfste man die stets gleichen Strecken D_8D', E_8E', F_8F' u. s. f. aneinanderlegen. Dies kann geschehen, indem man die Dreiecke mit dem gegenüberliegenden unendlichkleinen Winkel aneinanderlegt. Es ist nämlich immer die eine obere Seite desselben, wie BD', gleich der unteren Seite DE_8 des folgenden Dreiecks. In der Figur 31 sind diese gleichen und parallelen Seiten mit gleicher Anzahl von kleinen Querstrichen durchstrichelt. In Figur 31a sind die Dreiecke aneinandergelegt. Hätte man alle die unendlichvielen, welche im Verlaufe einer Sekunde zustande kommen, aneinandergelegt, so würde ein Dreieck entstehen, wie es Figur 31a zeigen würde als Gesamtfigur, falls man das in der Zeichnung ausführen könnte. Es wäre dann der aus unendlichvielen unendlichkleinen Winkeln links unten bestehende Winkel endlich geworden, die anliegende Seite war schon unendlichklein, die gegenüberliegende wird nun unendlichklein erster Ordnung und besteht aus $gdt^2 + gdt^2 + \ldots = g \cdot dt = d^2y : dt$. Diese unendlichvielen Beschleunigungen einer Sekunde vermehren die bisherige unendlichkleine Endgeschwindigkeit B_1B' der Figur 31 um $g \cdot dt$, sodafs die Geschwindigkeit eine Sekunde später als nach der Zeit t wird $g \cdot t \cdot dt + g \cdot dt = g \cdot dt\,(t + 1)$, d. h. in der That die Endgeschwindigkeit für die Zeit $t + 1$. Man denke sich also in der Figur 31 die Geschwindigkeit B_1B' vermehrt um diese Seite $g \cdot dt$ der Figur 31a, oder man verfolge in Figur 31 die Vergröfserung der Strecke B_1B' auf der nächsten Ordinate zu D_1D', auf der nächsten zu E_1E' usw. und gelangt eine Sekunde später d. h. nach Abtragung von unendlichvielen dt auf der t-Axe zu einem dem Dreiecke CB_1B' entsprechenden Dreiecke, dessen endlicher Winkel sich gegenüber dem Winkel C so geändert hat, dafs

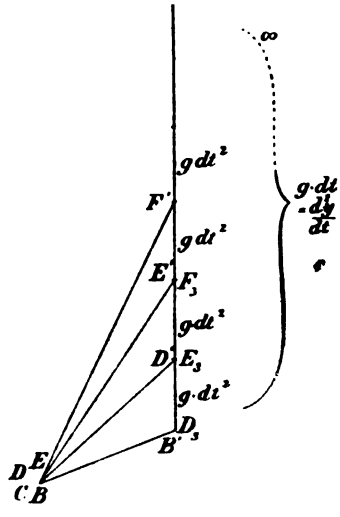


Fig. 31a.

jetzt beträgt $tan = g(t + 1)$, während vorher betrug $tan = g \cdot t$. Selbstverständlicherweise gelangt man auch schon beliebig früher zu einem Dreieck mit einem um endlichen Betrag veränderten Winkel und entsprechend veränderter Tangente, wenn man unendlichviele Beschleunigungen addiert, die zusammen nicht gerade den endlichen Geschwindigkeitszuwachs einer ganzen Sekunde, sondern einer halben oder eines beliebigen, aber endlichen Bruchteils einer Sekunde ergiebt.

Ich sagte mehrfach, dafs man die physikalische Endgeschwindigkeit und die physikalische Beschleunigung in der Natur nur künstlich herstellen könnte, indem man die beschleunigte Bewegung aufhören läfst; auch in der Figur kann man die physikalische Geschwindigkeit und Beschleunigung nicht überall nach Belieben an jeder Stelle sehen, sondern, wie unsere Figur 31 zeigt, nur die unendlichkleinen Geschwindigkeiten und die Beschleunigung von zweiter Ordnung. Indessen ist es leicht möglich auch in der Figur die Gröfse gt für irgend eine Stelle und $g\,dt^2$ unabhängig von der Stelle zu zeichnen, aber freilich auch nur, indem man von dem eigentlichen krummen Verlauf der Kurve abgeht. Verlängert man nämlich z. B. die Linie CB_1, d. h. irgend eine Parallele zur t-Axe durch irgend einen Punkt der Kurve, bis sie gleich 1 ist und verlängert die in diesem Punkte oder besser an dieser Stelle gelegte Tangente CB' oder CB (was für das Endliche einerlei ist), bis sie die im Endpunkte jener Parallele 1 errichtete Ordinate schneidet, so ist die entstehende zweite Kathete natürlich $g \cdot t$; denn tan ist hier $g \cdot t : 1$, während es im unendlichkleinen Dreiecke ist $g \cdot t\,dt : dt$. Freilich ist die Schwierigkeit der Frage unvermindert, was eine Tangente in diesem Punkte C sei.

Die physikalische Beschleunigung g aber erhält man, indem man erst einmal die Kurve genau zeichnet, also eine Parabel, deren Brennpunkt auf der y-Axe oberhalb um $1 : (2g)$ vom Nullpunkt entfernt ist (nämlich um den vierten Teil des Faktors von y in der Parabelgleichung $t^2 = (2/g) \cdot y$). Dann aber mufs man die Abscisse $t = 1$ abtragen, hier die Ordinate errichten und dann nach vorigen Angaben die unendlichkleine Geschwindigkeit dieses Kurvenpunktes $g \cdot 1 \cdot dt$ durch Erweiterung des Tangentendreiecks auf die Kathete 1 statt dt bringen. Die andere Kathete ist hier g, also die Endgeschwindigkeit, die hier mit der physikalischen Beschleunigung übereinstimmt. Das Dreieck der Figur 31a würde alsdann als unterste Linie die vom Nullpunkte des Koordinatensystems ausgehende erste Strecke dt haben, würde rechtwinklig werden und mit dem charakteristischen Dreiecke an der Stelle der Kurve für $t = 1$ übereinstimmen; die Ordinate ist hier $g/2 \cdot 1^2 = g/2$.

Von allgemeinerem Interesse ist es zu erfahren, wie sich in der Figur die stets gröfser werdende unendlichkleine Endgeschwindigkeit D_1D' usw. aus der Kurve ergiebt. Es sei D' ihr Endpunkt, dann kann die Verbindung $D'B$ nicht etwa die Verlängerung von CB sein. Denn sonst wäre Dreieck $D_1D'B$ kongruent B_1BC, die Geschwindigkeit würde sich nicht ändern, das charakteristische Dreieck bliebe dasselbe und die Kurve wäre eine gerade Linie; es könnte der Kurvenpunkt D nicht oberhalb D' liegen. Ebenso würde dann B mit B', E mit E' usw. zusammenfallen. Da aber $D_1D_8 = B_1B'$, so fielen auch die mit dem Index 3 bezeichneten Punkte mit den in der Figur darüber liegenden, immer um hier $g/2\,dt^2$ entfernten Punkten zusammen. Nun soll aber doch die Endgeschwindigkeit eine Fortsetzung der ganz zuletzt vorher vorgestellten Bewegung sein und dieselbe Richtung wie diese haben, solange man sich die wieder hinzukommende Beschleunigung noch nicht mitvorstellt. Die Gerade BD' kann also nur die Fortsetzung einer unmittelbar vorher vorgestellten Geraden (Tangente) sein. Diese Tangente mufs von einem Punkte der Kurve herkommen; wie wir aber eben sahen, kann dies nicht der unendlichnahe Punkt C sein. Mithin haben wir uns auf der unendlichkleinen Kurvenstrecke von C bis B noch einen Punkt vorzustellen, von dem die Gerade BD' ausgeht. Ein solcher Punkt sei C_0; ebenso komme CB' von einem Kurvenpunkte A, $E'D$ von B_0 her usw.

Es ist uns sehr begreiflich, warum man aufser den zuerst angenommenen Punkten noch andere nötig hat. Wäre die Kurve eine Gerade, so würden zwei unendlichnahe Punkte wie $C\,B$ genügen, um die nächste Geschwindigkeit zu liefern (freilich ohne drei Punkte CBD' der Kurve kämen wir dann auch nicht aus, wenn wir das Wesen der Geraden feststellen wollten). Nun ist die Kurve aber krumm, und zwar überall krumm; das Krumme kann man, wie wir sahen, in der Figur nur durch das wesenswichtige Dreieck anschaulich machen. Wenn wir also benutzen wollen, dafs von C nach B nicht eine Gerade, sondern eine Krumme sich erstreckt, so müssen wir uns auch ein wesenswichtiges Dreieck innerhalb der Strecke CB vorstellen. Ein solches Dreieck wie $C\,C_0B$ ist nicht nötig, wenn es nicht auf das Unendlichkleine zweiten Grades ankommt. Hier aber unterscheidet sich die Geschwindigkeit von dt zu dt um Unendlichwenig zweiten Grades, um die Beschleunigung. Die Strecke C_0G, eine Seite des vermittelnden Dreiecks, entspricht der Seite D_2D' in den ähnlichen Dreiecken BD_2D' und BGC_0. Also ist C_0G ebenfalls unendlichklein vom zweiten Grade ebenso wie die Höhe des wesenswichtigen Dreiecks.

Wir werden Näheres über diesen Zusammenhang zu ergründen suchen bei Kurven verschiedenen Grades und den allgemeinen Eigenschaften der Kurven.

Die Parabel bei gemischter Weitenbehaftung. Erweiterung des Kontinuierlichen.

Es sei die Gleichung der Parabel $x^2 = 2py$; die Leitlinie liegt alsdann parallel zur x-Axe. Die Ableitung dieser Gleichung sei vorgenommen worden bei der Vorstellung endlicher Werte von x und von y, und bei Vorstellung eines endlichen, sogenannten halben Parameters $p = FA$ (in der Figur 32). Ist z. B. P ein Punkt der Parabel so soll nach der Definition derselben sein PF gleich PL, dem Lote auf die Leitlinie. Dann ist für diesen Punkt P das Lot $PL = y + p/2$ und PF als Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreiecke gleich $x^2 + (p/2 - y)^2$. Daraus folgt dann leicht jene Gleichung. Es fragt sich zunächst, ob diese Ableitung noch Sinn hat, falls man die Ordinaten mit der Weitenvorstellung des Unendlichkleinen oder gar die eine Koordinate mit der des Unendlichkleinen erster Ordnung und die andere zugleich mit derjenigen zweiter Ordnung behaftet. Ich habe früher oft auseinandergesetzt, daſs uns nichts hindert, Dreiecke mit gemischter Weitenbehaftung zu bilden. Stellt man sich vor, PL bestehe aus einem endlichen Stücke $p/2$ und einem unendlichkleinen zweiter Ordnung y, so ist dies eine nur äuſserliche logische Zusammenstellung und es hat alsdann y nur einen bestimmten Wert gegenüber anderen y-Gröſsen derselben Weitenbehaftung. Da man sich aber auch andere Punkte P vorstellen kann, für welche y unendlichklein zweiter Ordnung ist, so hindert nichts in der gemischten Summe $p/2 + \delta_1^2$ das δ_1^2 in bestimmter Gröſse gegenüber einem zweiten δ_2^2 in der Summe $p/2 + \delta_2^2$ sich vorzustellen. Auch der Pythagoras hat noch einen entsprechenden Sinn. Es ist uns also nicht verwehrt die

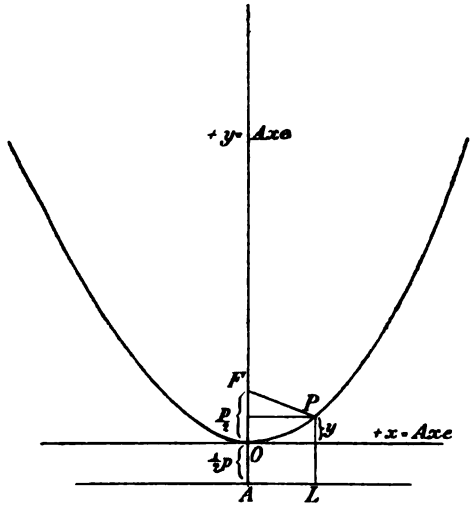


Fig. 32.

Gleichung der Parabel auch noch als abgeleitet vorzustellen, wenn p zwar endlich bleiben soll, aber die Koordinaten einer niedrigeren Weitenbehaftung angehören sollen.

Es sei nun $x = \delta$, dann ist in der Parabelgleichung $y = \delta^2 : (2p)$ d. h. eine unendlichkleine Gröfse zweiter Ordnung, sie sei geschrieben δ_1^2 so dafs $\delta^2 : \delta_1^2 = 2p$ ist. Wir haben uns also die Parabel vorzustellen als für dieses Gebiet mit gemischter Weitenbehaftung, nämlich in der Dimension x mit der Weitenbehaftung des Unendlichkleinen erster und in der Dimension y mit der des Unendlichkleinen zweiter Ordnung.

Natürlich haben wir uns bei dieser Lage des Koordinatensystems nicht das Grenzgebiet irgend eines beliebigen endlichen Punktes der Parabel vorgestellt, sondern nur das Grenzgebiet des Nullpunktes O d. h. des Scheitelpunktes. Denn sobald man sich einen mit einer endlichen Entfernung von O behafteten Punkt der Parabel vorstellt, ist x wie y endlich; man könnte alsdann zwar x um unendlich wachsen lassen und würde auf die Differentiale kommen (siehe später!), aber man hätte doch nicht die ganzen Gröfsen x und y oder eine derselben mit der Vorstellung des Unendlichkleinen behaftet, was hier zunächst unsere Aufgabe sein soll.

Man darf nicht behaupten, dafs dasjenige Gebiet (falls ich mich dieses nicht ganz richtigen Ausdruckes bedienen darf), in dem jene Parabel behaftet wird mit gemischter Weitenvorstellung, innerhalb der endlich (!) vorgestellten Ebene irgend eine Ausdehnung habe; es hat keine endliche Ausdehnung, reicht also auch von Punkte O aus nicht zu irgend welchen endlich unterscheidbaren Grenzen in der Ebene, oder hat gar keinen Raum in der Ebene, so lange diese nur mit dem Endlichen behaftet ist. Wohl aber kann man sagen, dafs man an die Vorstellung eines Punktes O der mit beliebiger Weitenvorstellung behaftbaren Ebene die Vorstellung der unendlichkleinen und unendlichkleinen Grössen zweiter Ordnung anhafte. Wenn wir sagen, man stelle sich das Grenzgebiet des endlichen Punktes O vor, so ist dieses Gebiet in der endlichen Figur weder sichtbar noch überhaupt vorhanden, wohl aber in der mit allen möglichen Weitenvorstellungen behafteten Ebene. Aber auch hierin ist es nicht etwa als ein Teil dieser Ebene vorhanden, denn etwas Unendlichkleines ist nicht ein bestimmter Teil eines Endlichen.

Wir stellen uns also zunächst die Parabel endlich vor, die endliche Gröfse p gleich FA und irgend welchen endlichen Punkt P der Kurve, sodafs jeder Kurvenpunkt gleiche Entfernung vom Brennpunkt F und der durch A gehenden Leitlinie hat. Die Ebene ist demnach

schon mit der Punktvorstellung in bestimmter Art (d. h. bei stets endlichen Entfernungen aller vorgestellten Punkte von einander) behaftet. Nun fügen wir die unendlichkleine Behaftung hinzu, indem wir im Geiste zwar die bisherigen Vorstellungen festhalten, aber an die Vorstellung des einen Punktes O anknüpfen die Behaftung mit unendlichkleinen Entfernungen in der Dimension der x-Axe. Wir wissen dann ganz genau, dafs wir nur durch unendlichviele unendlichkleine Stücke auf x etwas erhalten würden, das der Weitenbehaftung des Endlichen angehört, also in der vorigen Vorstellung vorkommen dürfte. Wir dürfen aber wohl die endliche Kurve $x^2 = 2py$ behaften mit der Vorstellung von unendlichnahen Punkten. Ist auch p dabei endlich, so kann doch y und x niedrigeren Weitenbehaftungen angehören. Setzt man $x = \delta$ und $y = \delta'^2$, so bedeutet in der Gleichung $\delta^2 = 2p \cdot \delta'^2$ die endliche Gröfse $2p$ den Wert des Verhältnisses zweier unendlichkleiner Gröfsen zweiter Ordnung, die demnach durch Festhalten des endlichen $2p$ bestimmt sind. Soll nun in der Dimension x irgend eine Gröfse $x_1 = \delta_1$ und irgend eine andere $x_2 = \delta_2$ etc. vorgestellt werden, so liegen diese Gröfsen auf der x Axe, sobald man diese mit dem Unendlichkleinen behaftet. Haben x_1 und x_2 irgend ein Verhältnis, so hindert uns nichts, uns bei $x_1^2 = \delta_1^2$ und $x_2^2 = \delta_2^2$ ein Verhältnis in der Behaftung des Unendlichkleinen zweiter Ordnung vorzustellen. Ferner sind wir nicht gehindert die Gleichungen $\delta_1^2 = 2p \cdot \delta'^2_1$ und $\delta_2^2 = 2p\,\delta'^2_2$ anzunehmen. In der Ebene, die wir uns für die Parabel denken, sollen diese Gröfsen zweiten Grades allerdings nicht liegen; in ihr soll ja nicht x^2 als Strecke vorkommen, sondern x, also auch nicht δ^2, sondern δ. Da aber in der Ebene in der Richtung der y-Axe vorgestellt werden soll die Gröfse y, diese aber für $x = \delta$ unter Festhaltung der Gleichung $x^2 = 2py$ unendlichklein von zweiter Ordnung werden mufs, so ist durch dieses von uns angenommene Gesetz die Dimension der y-Axe zu behaften mit der Weitenvorstellung des Unendlichkleinen zweiter Ordnung. Unsere geistige Freiheit ist grofs genug, diese allerdings etwas verwickelten Weitenvorstellungen zusammenzufassen zu einer Summenvorstellung und zu einem Ausdrucke: dem der Parabel in den Grenzgebieten des Nullpunktes (für δ und δ^2) bei gemischter Weitenbehaftung.

Ist für die Parabel $N.\ 1$ in Figur 33 die Gleichung $x^2 = 2p(y - b)$ und wird $x = \delta$, so wird $y = \delta^2/(2p) + b = b + \delta'^2$. Auch hier entsteht gemischte Weitenbehaftung und zwar in der Dimension x unendlichklein erster Ordnung, in der y-Dimension aber endlich und unendlichklein zweiten Grades zugleich, wobei freilich das Endliche nicht veränderlich ist. Oder wird bei der Parabel $(x - a)^2 = 2py$, also

N. 2 in Figur 33 wieder $x = \delta$, so wird $2py = \delta^2 - 2a\delta + a^2$. Darin ist enthalten die Weitenvorstellung des Endlichen, Unendlichkleinen erster und zweiter Ordnung, wobei freilich für die Vergleichung mit anderen endlichen Werten δ^2 und $2a\delta$ keine Bedeutung haben. Ist endlich die Parabel oder das Koordinatensystem so verschoben wie in Figur 33 *N.* 3, d. h. in Gleichung $(x - a)^2 = 2p(y - b)$, so ist $2py = a^2 + 2pb + \delta^2 - 2a\delta$.

Auf eine sonderbare Vorstellung gelangen wir, wenn wir in allen diesen Fällen nicht wie bisher x mit δ behaften und dann nach dem Gesetz der Gleichung die Behaftung von y als δ^2 folgern, sondern wenn zunächst y vorgestellt wird mit der Weitenbehaftung δ. Aus $x^2 = 2p\delta$ folgt x als eine Quadratwurzel aus Unendlichkleinem. Da

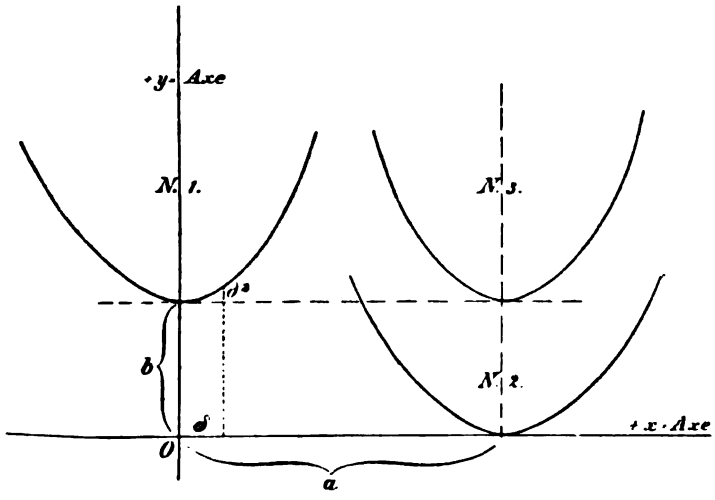


Fig. 33.

der Wert einer Wurzel diejenige Gröfse ist, die mit sich selbst multipliziert gleich dem Radikandus ist, so müfste x eine solche Gröfse sein. Multipliziert man aber eine endliche, wenn auch beliebig kleine Gröfse wie etwa 0,0000001 mit sich selbst, so entsteht wieder eine endliche, wenn auch noch kleinere Gröfse; also ist die endliche Gröfse stets zu grofs für x. Multipliziert man aber eine unendlichkleine Gröfse mit sich selbst, so entsteht eine unendlichkleine zweiten Grades, also ist die unendlichkleine Gröfse zu klein für x. Giebt es nun einen derartigen Wert, der zwischen dem Endlichen und dem Unendlichkleinen liegt, giebt es eine derartige Weitenbehaftung? Oder müssen wir sagen, dafs in Figur 32 bei Vorstellung einer unendlichkleinen Ordinate der Punkt überhaupt keine Abscisse

habe, es also überhaupt keinen solchen Punkt P in der Nähe von O auf der Parabel gebe? Wenn man aber die y-Gröfsen für kontinuierlich erklärt, wie man berechtigt ist, so heifst das, man darf auch eine Parallele zur x-Axe im Abstande $y = \delta$ gelegt denken, und diese mufs die Parabel in irgend einem Punkte schneiden oder man dürfte die Parabel nicht als kontinuierlich ansehen d. h. behaftbar mit allen Weitenbehaftungen, die nötig sind, um von irgend einem Punkte zu irgend einem anderen zu gelangen. Wenn jene Parallele $y = \delta$ die Parabel nicht schnitte, so müfste diese eine Lücke haben gerade da, wo jene Parallele hindurchginge; und da es unendlichviele $y = \delta$ giebt, müfste sie unendlichviele Lücken haben, es müfsten ihr in dem ganzen Gebiete zwischen irgend einer in einem Abstande $y = \delta$ gelegten Parallelen und einer anderen solchen Parallelen alle Punkte fehlen, da alle solche Schnitte keine Abscisse, also keine Entfernung von der y-Axe haben würden. Wäre das der Fall, so müfste auch die Ebene gewissermafsen einen gekrümmten, parabelartigen Rifs haben und zwar gerade da, wo unendlichviele Punkte vorgestellt würden, die gleiche Entfernung von F und der Leitlinie haben sollten. Es giebt aber unendlichviele Parabeln mit anderen Parametern z. B. $x^2 = 2qy$, deren Züge nicht mit der Parabel $x^2 = 2py$ zusammenfallen, die aber von O aus beginnen. Auch bei diesen unzähligen müfsten Risse sein. Der Rifs in der Ebene wäre also geradezu ein Loch oder eine Art Streifen, der unendlichschmal wäre und mit der Entfernung δ von der x-Axe beginnen würde, (denn es giebt die Parabelbehaftung $x = \delta$, also $\delta^2 = 2p\,\delta'^2$ — siehe oben), und sich nach rechts und links mit der Breite $y = \delta$ erstrecken würden. In der y-Axe selbst wäre solches Loch nicht vorstellbar. Da man aber überall Lote auf x parallel zu y errichten kann und diese mit jeder Weitenvorstellung behaften, so kann eine solche Lücke nicht in ihnen vorhanden sein, oder wir hätten die sonderbare Vorstellung von Punkten, die zwar von der x-Axe die Entfernung $y = \delta$ hätten, von der y-Axe aber überhaupt keine.

Vertauschen wir gar die Richtung der Leitlinie, bilden also die Parabel $y^2 = 2px$, so müfsten keine Abstände von der x-Axe für solche Punkte der Parabel mit $x = \delta$ existieren, was der vorigen Betrachtung der Punkte widerspricht.

Mithin sind wir auf eine neue Weitenbehaftung gekommen. Wir müssen uns entschliefsen, zwischen der Weitenbehaftung mit dem Endlichen und der mit dem Unendlichkleinen eine solche anzunehmen, die so beschaffen ist, dafs jede damit behaftete Gröfse, mit sich selbst multipliziert, eine unendlichkleine Gröfse ergiebt, oder eine Weitenbehaftung angedeutet durch die Form $\sqrt{\delta}$. Es ist kein Grund vorhanden

derartiges für unmöglich oder nicht vorhanden zu erklären. Daſs man etwa bisher daran noch niemals gedacht hat (falls das wahr ist, was ich nicht weiſs), wäre kein Grund für das Nichtvorhandensein. Es könnte eine geistige Entdeckung sein. Auch das Irrationale, welches mit diesen Gröſsen eine gewisse Ähnlichkeit hat, ist als etwas im Geiste Wirkliches anzusehen, obwohl es diejenigen, die darauf kamen, zuerst fremdartig angemutet hat und noch heutzutage von einzelnen für etwas Nichtvorhandenes angesehen wird. Sinnlich vorstellbar sind Gröſsen aus dieser Weitenbehaftung $\sqrt{\delta}$ nicht, aber das sind die unendlichkleinen ja auch nicht; geistig vorstellbar sind sie ebensowohl wie die unendlichkleinen. Die geistige Vorstellung ist eben die, daſs sie mit sich selbst multipliziert eine unendlichkleine Gröſse geben. Man kann über sie etwas Sicheres aussagen, nämlich daſs sie kleiner als endliche und gröſser als unendlichkleine Gröſsen sind. Man kann sie demnach mit Sicherheit unter die übrigen Weitenbehaftungen einordnen. Und man kann auch innerhalb dieser Weitenbehaftung das Verhältnis verschiedener solcher Gröſsen ebenso gut feststellen durch bestimmte Werte wie das Verhältnis von endlichen oder unendlichkleinen Gröſsen oder wie etwa das Verhältnis von $2 \cdot \sqrt{2} : 3\sqrt{2}$. Warum also sollten sie nicht geistig existieren, wenigstens in dem Augenblicke, wo sie mit Bewuſstsein von irgend einem Menschen vorgestellt werden, und erst recht dann, wenn sie mit Bewuſstsein von den anderen nachgedacht und nur so, nicht etwa anders nachgedacht werden müssen?

Wählen wir einen Namen dafür, so müssen wir uns an unseren alten Namen des Untersinnlichvorstellbaren halten und könnten es nennen untersinnlichvorstellbar von dem Grade $\frac{1}{2}$, da man eine Wurzel als Potenz, also hier $\delta^{1/2}$, schreiben kann. Oder wir könnten sagen, um nicht gerade bei der zweiten Wurzel stehen zu bleiben, es sei dies eine Zwischenbehaftung oder eine zwischengradige Behaftung. Wir könnten auch die bisher bekannten Behaftungen (bez. die von mir bisher so genannten) nun nennen die Hauptbehaftungen, während irgendwelche derartigen wie die zuletzt gefundenen heiſsen würden die gebrochengradigen Zwischenbehaftungen. Endlich wäre es auch erlaubt die Hauptbehaftungen zu nennen die Potenzbehaftungen und die neuen die Wurzelbehaftungen.

Ehe ich einen Blick werfe auf das nun sich entrollende System aller Behaftungen, will ich noch das Beispiel der Parabel fortführen für unendliche Behaftung der Koordinaten und endlich für unendliche Parameter.

Ist $x = \infty$, so ist $y = \infty^2$, also haben wir eine Parabel bei gemischter Weitenbehaftung. Erstreckt sich die Parabel wirklich in das

Unendliche? Eine endlich vorgestellte gewifs nicht, denn endlich vorgestellt heifst mit der Weitenbehaftung des Endlichen versehen. Aber man kann die endliche Parabel in der Anschauung haben und doch noch die Weitenbehaftung des Unendlichen hinzufügen, dann aber nicht ohne weiteres sagen, die Parabel gehe in das Unendliche, sondern die Parabel mit endlichem Parameter sei so beschaffen, dafs Punkte derselben mit der Weitenbehaftung des Unendlichen versehen werden könnten. Man könnte aber fragen, wie man es ausdrücken solle, dafs die Parabel doch nicht im Endlichen eine geschlossene Kurve sei. Die Antwort ist, dafs trotz der Annahme eines bestimmten Parameters $2p$ jeder der beiden Koordinaten beliebig grofse Werte beigelegt werden können (wir haben früher behandelt, dafs beliebiggrofs nicht unendlichgrofs ist). Das Gesetz der Parabel zwingt aber, wenn man es sich für die folgenden Schlüsse selbst vorschreibt, bei Behaftung von x mit dem Unendlichen, die y-Gröfsen mit dem Unendlichen vom zweiten Grade zu behaften.

Nimmt man bei derselben Vorschrift $y = \infty$, so ist $x = \sqrt{2p\infty}$, also nicht unendlich, aber auch nicht endlich, gehört vielmehr einer übersinnlichvorstellbaren Zwischenbehaftung an.

Darf man sich überhaupt den Parameter der Parabel unendlichklein (oder unendlichgrofs) vorstellen, also bilden $x^2 = 2\delta y$? Der Brennpunkt F läge dann (Figur 32) unendlichnahe an O, ebenso die Leitlinie. Behaftet man nun y mit dem Endlichen, legt also eine Parallele zur x-Axe in endlichem Abstande, so müfste nach der Gleichung auch x unendlichklein werden, die Parabel also in unendlicher Nähe an der y-Axe entlang laufen. Für endliches x wäre y gleich dem Quadrate einer endlichen Gröfse, dividiert durch 2δ, also unendlich. In beiden Fällen liegt gemischte Weitenbehaftung vor.

Ist aber $y = \delta$, so ist $x^2 = 2\delta^2$, also x unendlichklein; mithin haben wir hier die Parabel mit gleicher Weitenbehaftung in der Vorstellung. Ist $x = \delta$, so wäre natürlich wieder y unendlichklein, wie auch die Gleichung ergiebt. Ist ferner $y = \infty$, so ist $x^2 = 2\delta \cdot \infty$, also x endlich; und ist $x = \infty$, so wäre $\infty^2 = 2\delta y$, also y unendlichgrofs vom dritten Grade, wir haben uns deshalb gemischte Weiten behaftung vorzustellen.

Schliefslich ist noch von Interesse die Vorstellung einer Parabel mit unendlichgrofsem Parameter; man wäre geneigt dieselbe kurzweg eine unendliche im Gegensatz zur endlichen (sich — wie man gewöhnlich sagt — ins Unendliche erstreckenden) zu nennen. Ist das richtig? Dann müfste F ein von O in irgend einer unendlichen Entfernung liegender Punkt der y-Axe sein, und die Leitlinie eine auf

der anderen Seite der x-Axe unendlichentfernt liegende Parallele. Ist dann y endlich, so ist $x^2 = \infty$. Also eine im Endlichen liegende Parallele zur x-Axe schneidet die Kurve in einem Punkte, der auf dieser Parallelen in einer Entfernung liegt, die gröfser als endlich, aber kleiner als unendlich ist, mithin einer Zwischenbehaftung angehört. Ist x endlich, so folgt y als unendlichklein. Es liegt demnach die Parabel an der x-Axe entlang, hat im Endlichen nach rechts und links stets eine unendlichkleine Entfernung von ihr. Ist $x = \delta$, so ist $\delta^2 = \infty \cdot y$, also y unendlichklein vom dritten Grade; ist x unendlich, so $y = \infty^2/\infty$, also unendlich. Man kann also sagen, dafs der Parabelzug von o sich zunächst unendlichnahe von höherem Grade an die x-Axe anschmiegt, dann in endlicher Entfernung vom Nullpunkte unendlichnahe an der x-Axe bleibt, für Entfernungen der Zwischenbehaftung $\sqrt{\infty}$ endliche Entfernung von der x-Axe hat und für unendliche Entfernungen vom Nullpunkte auch unendliche Entfernung von der x-Axe hat, also alsdann gleiche Weitenbehaftung in beiden Dimensionen.

Die teilweise imaginäre Parabel.

Eine kleine Abschweifung in das Imaginäre sei hier gestattet. Lautet die Gleichung der Parabel $x^2 = 2py$ und ist y negativ z. B. $= -p/2$, so ist $x = \sqrt{-p^2} = p\sqrt{-1} = p \cdot i$ mit negativem oder positivem Wurzelvorzeichen. Auch dann kann man das Gesetz der Parabel bestehen lassen, indem man in der y-Dimension mit reellen Werten behaftet, in der x-Dimension aber mit imaginären. Diese Parabel (in Figur 34 punktiert gezeichnet) verträgt sich freilich nicht mit der oberhalb der x-Axe gezeichneten in derselben Figur. Denn die obere Parabel ist unter der Voraussetzung gezeichnet, dafs x reell ist z. B. $x = \pm p$; dann ist $x^2 = p^2 = 2py$, also $y = p/2$. Ist aber x reell, so liegt bei Festhaltung der Parabelgleichung $x^2 = 2py$ die Öffnung der Parabel nur in der Richtung der $+y$-Axe.

Behaftet man indessen in der x-Dimension alle Gröfsen mit der imaginären Einheit, so erhält man die punktierte Parabel. Dies ist an sich nichts Unmögliches, wie es ja auch möglich ist die x-Gröfsen stets mit der Zeit behaftet zu denken. Ob der Raum, in dem wir uns die sinnliche Welt vorstellen, derartiges zeigen kann, ist eine andere Frage und wird nur durch solche Erfahrungen entschieden, die aus der sinnlichen Welt genommen sind.

Man kann schon die Frage aufwerfen, ob sich negative Strecken in der sinnlichen Welt zeigen oder ob nicht vielmehr auch dabei

schon eine Behaftung eigentümlicher Art stattfindet, ein Unterschied zwischen + und —, der nicht sinnlich gezeigt wird oder selbständig da ist, sondern eine gewisse Anwendung einer Vorstellungsart ist (mit einer gewissen Willkür der Festsetzung des Nullpunktes).

Trotzdem würde man zu dem Resultate kommen, daſs die negative Strecke auf die sinnliche Welt paſst, die imaginäre nicht. Geometrisch ist aber solche Behaftung wohl möglich, also auch die punktierte Parabel, dargestellt durch die Gleichung $x^2 = 2py$, wenn x imaginär ist. Ist x stets imaginär, so kommt man auf die obere Parabel überhaupt nicht. Gestattet man sich aber den Spielraum, daſs x entweder imaginär oder reell sein soll, falls y reell positiv und negativ ist und $x^2 = 2py$, so giebt es beide Parabeln zugleich. Freilich dürfen wir die gemeinsame Figur 34 dann nur so betrachten, daſs bei jedem Punkte der punktierten Kurve x imaginär, bei der anderen x reell sei, y aber stets reell. Warum sollte man sich nicht eine Ebene vorstellen unter gleichzeitiger Erlaubnis die x-Dimension entweder reell oder imaginär zu denken, je nachdem es eine als Norm angesehene Gleichung erfordert? Oder warum sollte man nicht, wenn diese Norm es fordert, nun statt dieser Norm die folgende Vorstellung einführen: alle x-Linien oberhalb der x-Axe seien reell, unterhalb imaginär? Dann ist es erlaubt beide in einer Figur anzuschauen.

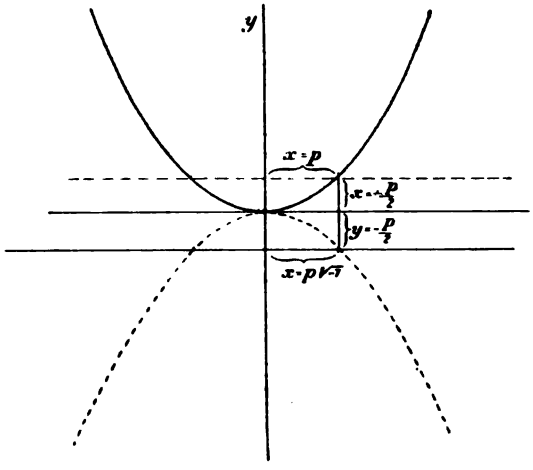


Fig. 34.

Übrigens beachte man bei der Ableitung der Gleichung solcher teilweise imaginären Parabel, daſs, da im Pythagoreischen Lehrsatze stets die Summe zweier geometrischen Quadrate vorkommt, das Quadrat einer imaginären Koordinate für diesen Satz ein positives Quadrat ist, dessen Seite mit $\sqrt{-1}$ behaftet ist.

Das System der Haupt- und Zwischenbehaftungen. 1^{∞}, ∞^{∞}.

Wie wir einsahen, verstehen wir das Sinnlichvorstellbare nicht ordentlich, ohne das Unendliche heranzuziehen; und zwar war zum mindesten das Unendlichkleine ersten und zweiten und das Unendliche der ersten Grade nötig. Doch kann die Mathematik auch die höheren Grade nicht entbehren. Es drängt sich die Frage auf, wieviele Grade es denn eigentlich gebe.

Es steht nichts der Vorstellung im Wege von beliebig vielen, ja sogar unendlichvielen Graden. Doch müssen wir überlegen, was das eigentlich heiſst, ohne jetzt schon metaphysisch das Wesen dieser Grade deuten zu wollen. Das Unendliche eines Grades umfaſst beliebig viele Gröſsen, die alle irgend einer endlichen gegenüber nicht mehr ausdrückbar sind, d. h. bei denen nicht angebbar ist, um welche bestimmte Gröſse sie durch Hinzufügung einer endlichen innerhalb ihres Gebietes, also innerhalb der Verhältnisse des Unendlichen verändert würden. Das will nichts weiter ausdrücken als die Thatsache, daſs es Verhältnisse mit bestimmten Werten nur innerhalb derselben Weitenbehaftung giebt. Ferner liegt die geistige Thatsache vor, daſs wir nicht gehindert sind uns das Verhältnis zwischen zwei unendlichen Gröſsen, dem ja irgend ein endlicher Wert zukommt, beliebig groſs zu denken. Dies heiſst zwar noch nicht, daſs wir uns dieses Verhältnis auch unendlichgroſs denken könnten, also bilden $\infty_1 : \infty_2 = \infty$. Vielmehr ist dies falsch. Denn wir müssen alsdann den Wert von ∞_1 als $\infty \cdot \infty$ denken, wenn durch jene Division mit einer unendlichen Gröſse eine andere unendliche vom ersten Grade herauskommen soll. Dies bedeutet nichts weiter, als daſs es im Unendlichen des ersten Grades nicht unendlichviele Gröſsen, sondern nur beliebigviele giebt, ebenso wie es im Endlichen beliebigviele, nicht unendlichviele giebt. Mit einem Worte, wenn wir die Vorstellung Unendlich wieder auf die Anzahl einer Weitenbehaftung anwenden wollen, so zwingt uns eine geistige Thatsache sofort aus dieser Weitenbehaftung herauszuspringen: es ist eine Thatsache, daſs wir zu einer neuen Weitenbehaftung übergehen, sobald wir uns in der einen eine Gröſse vorstellen wollen, die kein beliebiggroſses Verhältnis von endlichem Werte zu einer anderen Gröſse dieser Weitenbehaftung hat.

Ganz dasselbe läſst sich über die Weitenbehaftung zweiten Grades sagen usw. Und ebenso ist es mit den untersinnlichvorstellbaren Gröſsen. Stets verschwinden die Schwierigkeiten, wenn wir das Unendliche einfach als eine Art von Grundfähigkeit des Geistes ansehen,

oder besser gesagt die Behaftung mit dem Unendlichen, und die Thatsache anerkennen, dafs diese Behaftung in bestimmtem Sinne immer wieder anwendbar ist als irgend ein Vorstellungsgebiet. Genauer bedeutet das: bei dem Versuche diese Behaftung wieder anzuwenden auf ein Gebiet, in dem bereits eine Behaftung bestimmter Art z. B. die des Endlichen, herrscht, stofsen wir auf die geistige Thatsache, dafs wir imstande sind nun diese Behaftung fallen zu lassen und an ihre Stelle eine andere zu setzen, deren Gröfsen nicht in ein bestimmtes Verhältnis mit den Gröfsen der bisherigen gesetzt werden können.

Warum wir diesen geistigen Sprung oder besser diesen geistigen Vorgang beliebig oft anwenden können — wer vermag es zu sagen? Auch hierbei müssen wir vorläufig vor der Thatsache halt machen, dafs der Begriff des „Beliebigen" oder das, was im Geiste als Fähigkeit oder Grundelement diesen Begriff veranlafst, da ist und hier angewendet werden kann. Aber nicht blofs das „Beliebige" kann auf die Anzahl der Weitenbehaftungen angewendet werden — sondern auch wieder die Behaftung mit dem Unendlichen. Dürfen wir nicht sagen, es wäre vorstellbar etwas Unendliches unendlichen Grades?

Wenn dies bedeuten soll, dafs damit die Reihe der Behaftungen vorbei wäre und es z. B. nicht eine Behaftung gebe, die um eins höher sei als eine unendlichste, so ist es falsch. Wer will uns verbieten noch um einige Schritte weiter zu gehen? Nach unseren Grundsätzen könnte man zwar sagen: wenn ich den Exponenten ∞ der Potenz ∞^{∞} noch um 1 vermehre, so hat dieser Summand neben dem Summand ∞ gar nichts mehr zu bedeuten. Allerdings. Aber es könnte ja vielleicht dieser Exponent auf $\infty + \infty = 2\infty$ gebracht werden und $2 \cdot \infty$ hat doch einen Wert im Verhältnis zu ∞. Oder es könnte gar gebildet werden der Exponent: „Unendlich hoch unendlich". In solcher Vorstellung liegt kein Widerspruch, sobald man nur die Grundsätze des Unendlichen nicht verletzt. Es bedeutet also eine Weitenbehaftung mit dem Unendlichgrofsen vom unendlichsten Grade oder das Übersinnlichvorstellbare vom unendlichsten Grade *nicht etwa eine letzte Behaftung, die es gäbe*, sondern es bedeutet nur, dafs man thatsächlich imstande ist auf die Fortführung der unendlichen Weitenbehaftungen von einem zum anderen Grade usw. wieder die Behaftung mit dem Unendlichen anzuwenden, unter Vorbehalt aller Gesetze, die solche Behaftung überhaupt verlangt.

Ich kann mich darum im Sinne dieser Untersuchungen nicht dazu verstehen etwa das Unendlichgrofse vom unendlichsten Grade als das „Absolutunendliche" anzusehen. Vielmehr kann ich dabei das Absolut-

Unendliche überhaupt nicht zulassen. Unendlich ist nichts Absolutes, die einzelnen unendlichen Gröſsen stehen zwar bei derselben Weitenbehaftung zu einander in Verhältnissen mit bestimmten endlichen Werten, aber auch das Unendliche steht mit dem Unendlichen niederen Grades, dem Endlichen und Unendlichkleinen in einem gewissen durch unsere Gesetze ausgedrückten Zusammenhange, der freilich ein anderer ist als jene Zusammengehörigkeit innerhalb derselben Behaftung. Auch ∞ zeigt solchen Zusammenhang, und es ist derselbe ein derartiger, daſs hier nicht etwa plötzlich alles vorbei sei.

Wählen wir als Beispiel die Geraden der Ebene, deren Schnittpunkt fortrückt mit Verkleinerung des Winkels. Haben dieselben einen endlichen Winkel (ausdrückbar durch endliche Zahlen), so schneiden sie sich im Endlichen. Bilden sie einen unendlichkleinen Winkel ersten Grades miteinander (natürlich nicht mehr sinnlich-, aber wohl untersinnlich-vorstellbar), so schneiden sich die Geraden im Unendlichen ersten Grades und zwar giebt es ebensoviele unendlichweite Schnittpunkte, als es verschiedene unendlichkleine Winkel zwischen zwei Geraden geben kann, also beliebigviele. Bilden sie Winkel, die unendlichklein vom zweiten Grade sind, so schneiden sie sich in unendlicher Entfernung vom zweiten Grade, usw. Sagt man nun aber, sie bildeten einen Winkel, der unendlichklein vom unendlichsten Grade sei, so hat ein solcher Winkel, derartig ausgedrückt und vorgestellt, überhaupt keinen bestimmten Wert, sondern würde einen solchen nur bekommen, wenn man mehrere solche Winkel miteinander vergleichen wollte. Dann müſste man sagen, zu jedem solchen Winkel gehöre ein Schnittpunkt, der entfernt sei unendlichweit vom unendlichsten Grade. Dabei ist aber durchaus nötig zu sagen, was denn dieser unendlichste Grad bedeuten solle. Derselbe hat keinen Sinn ohne eine Vergleichung mit anderen Graden, also man meint damit, die Gröſsen dieses unendlichsten Grades sollen unvergleichbar sein mit den Gröſsen irgend eines anderen angenommenen Grades; aber wohlgemerkt: diese Erklärung paſste auch auf einen beliebigen Grad der unendlichen Weitenbehaftung. Also muſs man durchaus noch hinzusetzen, es seien aber dabei vorgestellt oder in der Vorstellung zusammengefaſst nicht bloſs beliebigviele Grade von unendlichen Weitenbehaftungen, sondern unendlichviele. Es bleibt also dabei, daſs hier der Exponent Unendlich nichts weiter bedeutet als eine Anwendung der unendlichen Behaftung auf die Anzahl derjenigen Weitenbehaftungen, die selbst bereits durch Anwendung solcher Weitenbehaftung zu den „unendlichen“ oder „übersinnlichvorstellbaren“ geworden sind.

Schneiden sich die Geraden überhaupt noch, so sind sie nicht parallel. Wer behaupten wollte, aus unseren Ausführungen folgte, daſs schlieſslich der Begriff des Unendlichen doch bloſs als eine Art Grenze, die man nicht verstehe und an die man höchstens heranreichte, gefaſst werden müsse, der hat auch die erste Behandlung des Unendlichen beim Unendlichgroſsen ersten Grades oder einfach beim Unendlichen gegenüber dem Endlichen nicht verstanden. Entscheiden wir uns dafür das Unendliche als eine Behaftung anzusehen und ebenso das Endliche und Unendlichkleine, so dürfen wir auch nicht die Behaftung ∞^{∞} als ein Ende betrachten.

Alle bisher besprochenen Behaftungen, deren es beliebig viele giebt und auf deren Anzahl man auch wieder die Behaftung des „Unendlichen" gesetzmäſsig anwenden kann, haben wir in den vorigen Abschnitten Hauptbehaftungen genannt. Wir kamen aber gelegentlich der Parabel auch auf Zwischenbehaftungen, und muſsten uns fragen: wohin gehört eine Gröſse, die mit sich selbst multipliziert, eine unendliche Gröſse ersten Grades ergiebt? Solche Frage lieſsen wir zu, ebenso die Fragen, welche Gröſsen dreimal und viermal usw. mit sich multipliziert, Unendliches ersten Grades oder auch zweiten Grades usw. oder auch Unendlichkleines irgend welchen Grades ergiebt. Bildet man $\sqrt{\infty}$, so hindert uns nichts das als eine Gröſse zu betrachten, freilich nur mit Verhältnis bestimmter Art zu Gröſsen $2 \cdot \sqrt{\infty}$, $3 \cdot \sqrt{\infty}$, usf. Diese Gröſsen gehören mithin einer bestimmten Behaftung an, und jede derselben bildet weder mit einer endlichen noch mit einer unendlichen ersten Grades ein bestimmtes Verhältnis. Wir nennen diese geistig sehr wohl vorstellbare und in ihrem Wesen genau ausführbare Weitenbehaftung die Zwischenbehaftung des Unendlichen vom Grade einhalb. Entsprechend giebt es Zwischenbehaftungen zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen ersten Grades vom Grade $1/3$ oder $1/4$ usw.

Wieviele Zwischenbehaftungen also können wir uns vorstellen zwischen den endlichen und unendlichen Gröſsen ersten Grades? Ohne Zweifel beliebig viele. Aber vielleicht auch unendlichviele? Bilden wir ganz äuſserlich die Form und fragen uns, ob sie Sinn hat! Sie bedeutet eine Gröſse $\sqrt[\infty]{\infty}$, die, mit sich selbst unendlichoft multipliziert, eine Gröſse ∞ ergiebt. Kann das eine Gröſse von der unendlichen Weitenbehaftung ersten Grades sein? Nein. Oder von einer Zwischenbehaftung z. B. die Gröſse $\sqrt[3]{\infty}$? Multipliziert man diese Gröſse unendlichmal mit sich selbst, so erhält man $\sqrt[3]{\infty} \cdot \sqrt[3]{\infty} \cdot \sqrt[3]{\infty} \ldots = \sqrt[3]{\infty^{\infty}}$ oder $= (\sqrt[3]{\infty})^{\infty}$; d. h. unendlich mit einem Exponenten, der dritte Teil von unendlich ist aber wieder unendlich, also ergebe sich ∞^{∞}, aber nicht

∞, wie herauskommen soll. Die Gröfse jeder Zwischenbehaftung ist demnach zu grofs, es könnte vielleicht eine endliche Gröfse sein. Wir fragen uns: was ergiebt sich, wenn man eine endliche Gröfse unendlichoft mit sich multipliziert?

Wählen wir die Zahl 2, welche doch gewifs endlich ist (wir dürfen sie hier nicht etwa mit δ oder ∞ behaftet denken, also nicht als Verhältniswert zweier Gröfsen irgend einer anderen Weitenbehaftung, sondern einfach als endliche Zahl)! 2^∞ ist gewiss unendlich, ebenso 3^∞ usw., nicht aber 1^∞?

Einmal eins giebt eins und dies wieder mit eins multipliziert giebt wieder genau eins usw., niemals aber im Geringsten mehr als eins. Ganz etwas anderes ist es, wenn wir von vornherein zu eins noch eine unendlichkleine Gröfse δ hinzufügen, also äufserlich bilden $1+\delta$ und uns die Aufgabe stellen dies unendlichoft mit sich selbst zu multiplizieren. Es ist alsdann nicht ohne weiteres zu sagen, was das giebt. Denn auch dies δ, als Summand hinzugefügt zur endlichen 1, hat nach unseren früheren Untersuchungen nur einen Sinn bei Vergleichung mit anderen unendlichkleinen Gröfsen. Es könnte aber wohl sein, dafs diese Beziehungen derart wären, dafs herauskäme schliefslich ein endlicher Wert. In der That ist nach den Lehren der höheren Mathematik $(1+\delta)^n$ für n gleich unendlich, oder wie wir sagen würden, wirklich $(1+\delta)^\infty$ dann gleich einer endlichen (irrationalen) Zahl $2{,}7182818 = e$ genannt, wenn $\delta = 1/n = \frac{1}{\infty}$ genommen wird.

Wir haben hier soviel gefunden, dafs 1, vermehrt um eine endlichganze Zahl, also 2 oder 3 usw., hoch ∞, etwas Unendliches ergiebt. Danach müssen wir sagen, dafs die versuchsweise aufgestellte Zwischenbehaftung $\sqrt[\infty]{\infty}$ gewisse endliche Gröfsen 2, 3 usw. (vielleicht auch noch andere — was hier noch nicht entschieden wird) enthalten würde, demnach keine Zwischenbehaftung ist, die aufserhalb des Endlichen noch eine Stellung hätte. Die Werte der Zwischenbehaftungen $\sqrt[3]{\infty}$, $\sqrt[4]{\infty}$ usw. sind also einzuordnen immer näher an das Endliche, vom Unendlichen aus gerechnet, es giebt auch beliebig viele solcher Zwischenbehaftungen, aber nicht unendlichviele!

Wie steht es mit den Behaftungen zwischen ∞ und ∞^2? $\sqrt[2]{\infty^2}$ wäre unendlich, also keine Zwischenbehaftung, aber $\sqrt[3]{\infty^2}$ kann nicht unendlich sein, denn ∞^3 ist gröfser als ∞^2. Also mufs $\sqrt[3]{\infty^2}$ kleiner als unendlich, aber gröfser als endlich sein, gehört mithin zu den zwischen Unendlich und Endlich liegenden Zwischenbehaftungen, deren Anzahl demnach hierdurch noch erweitert wird. Was ist aber $\sqrt[3]{\infty^3}$, $\sqrt[3]{\infty^4}$ usf. oder $\sqrt[3]{\infty^5}$? Es ist leicht auf diese Weise die übrigen Zwischenbehaftungen aufzustellen.

Ist der gebrochene Exponent von ∞ gröfser als n und kleiner als $n + 1$, so gehört die entsprechende Zwischenbehaftung zwischen die Hauptbehaftungen vom n ten und $(n + 1)$ ten Grade.

Der erste Differentialquotient konstant, stets Null, veränderlich, dann Null, positiv oder negativ.

In den folgenden Abschnitten werde ich einige bekannte Eigenschaften der Differentialquotienten von Kurven unter Beziehung auf das wesenswichtige Dreieck zusammenhängend, aber nur kurz besprechen. Stets werden wir zunächst ein wesenswichtiges Dreieck mit unendlichkleinen Seiten vom ersten Grade und Winkeln vom ersten Grade betrachten; sollte aber dieses Dreieck für manche Klarmachungen nicht ausreichen, so würden wir uns auch wesenswichtige Dreiecke mit Seiten oder Winkeln vom zweiten oder noch niedrigerem Grade vorstellen.

Ist das erste Differential einer Linie das Produkt aus einer konstanten Gröfse und dx, so erkennt man das in der Figur an der Ähnlichkeit zweier Dreiecke. Das wesenswichtige Dreieck ABC mit unendlichkleinen Seiten wird zu einer Geraden, oder die Winkel A und C desselben sind Null. Z. B. hat die Gleichung einer Geraden $y = a\,x + b$ das Differential $dy = a\,[x + dx] + b - (ax + b) = a \cdot dx$, und der erste Differentialquotient ist die Konstante a, bekanntlich die Richtungstangente der Geraden.

Ist das erste Differential einer Kurve stets Null z. B. diese Konstante a stets $= 0$, so lautet die Gleichung $y = b$; dies ist eine Paralle zur x-Axe im Abstande b. Dieselbe Gerade, die parallel zur x-Axe liegt, kann natürlich auch bei einem gedrehten Koordinatensystem der Gleichung $y = a\,x + b$ entsprechen. Dann bildet die Gerade mit der x-Axe wieder einen endlichen Winkel, deren tangens die Gröfse a hat.

Ist der Differentialquotient der Funktion $f(x)$, auch genannt kurz y' veränderlich, hat z. B. bei der Parabel $x^2 = 2\,p\,y$ den Wert $y' = 1/p \cdot x$ oder bei der verschobenen Parabel $(x - a)^2 = 2\,p\,(y - b)$ den Wert $y' = 1/p\,(x - a)$, so wird für die erste Lage $y' = 0$, wenn $x = 0$ ist, für die zweite Lage der Kurve $y' = 0$, wenn $x = a$, beide Male also für den untersten Punkt, den Scheitel. Der Differentialquotient wird negativ für negatives x, bez. x kleiner als a, also auf der linken Hälfte der Parabel, wo sich dieselbe beim Fortschreiten von x senkt. Es ist bekannt, dafs eine Kurve dann steigt, wenn das

erste Differential (oder der erste Differentalquotient) positiv ist, also zur bisherigen Ordinate hinzukommt, um die neue Ordinate zu ergeben, und dann fällt, wenn das Differential dy negativ ist, also von der Ordinate nach Fortschreiten um dx abzuziehen ist. Wenn aber die Kurve oder ihre Tangente daselbst für eine unendlichkleine Strecke parallel zur x-Axe liegt, so ist das erste Differential Null. Also diese Stellen hängen von der Lage des Koordinatensystems ab und sind andere, sobald man dasselbe dreht.

Zur arithmetischen und geometrischen Bestimmung des ersten Differentials genügt das charakteristische Dreieck, als Hypotenuse desselben dient irgend eine Seite irgend eines im Grenzgebiete des betreffenden endlichen Punktes liegenden wesenswichtigen Dreiecks. Liegt irgend eine Seite eines solchen Dreiecks parallel zur x-Axe oder weicht davon um einen unendlichkleinen Winkel ab, so ist für diesen endlichen Punkt (oder diese im Endlichen von anderen unterscheidbare Stelle) das Maximum oder Minimum der Funktion, einer der Kulminationspunkte, erreicht.

Wie wir früher sahen, kann man nicht von einem Maximum allein, sondern nur von einem Maximumpunkte in der endlichen Weitenbehaftung sprechen, der aber nur auffindbar ist unter Heranziehung der unendlichkleinen Behaftung und eines sonst noch recht unbestimmten wesenswichtigen Dreiecks. (Näheres wird folgen bei Besprechung der Inflexion).

Das zweite Differential konstant, stets Null, veränderlich, dann positiv, negativ oder Null.

In den Abschnitten über die Fallformel sahen wir, dafs durch die Fallstrecke $y = g/2\, t^2$ oder $= g/2\, x^2$ eine Parabel vorgestellt wird, oder besser, dafs sie als eine Parabel ausgedeutet werden kann. Das erste Differential war $dy = gt \cdot dt$ und in Figur 31 dargestellt durch $B_1 B'$. Das zweite Differential $g \cdot dt^2 = d^2y$ ist für diese Kurve konstant und durch $D_2 D'$ für die Ordinate $P_2 D$ dargestellt. Wir sahen daselbst, dafs diese unendlichkleine Gröfse derselben Weitenbehaftung angehört wie $C_0 G$ oder auch die Höhe in einem wesenswichtigen Dreieck $C C_0 B$, und wir sahen, dafs dieser Punkt C_0 zwischen C und B durchaus betrachtet werden mufste, um überhaupt auf das zweite Differential zu kommen, während er nicht nötig war für das erste. Verändert sich die Funktion $P_1 B = f(t)$ durch Anwachsen von t um dt, so mufs

man, um das zweite Differential zu bekommen, jedenfalls das der Ordinate P_1B vorausgehende wesenswichtige Dreieck mit unendlichkleinen Seiten und zwei unendlichkleinen Winkeln in irgend einer Weise berücksichtigen. In dem Falle der Parabel ist das zweite Differential konstant, in solchem Falle also mufs der Punkt C_0, B_0, D_0 usw. des vorhergehenden wesenswichtigen Dreiecks immer bei sonst entsprechenden Umständen so gewählt werden, dafs die Verbindung C_0B, B_0D usw. stets den Endpunkt des gleichen zweiten Differentials D_3D', E_3E' usw. giebt.

Ist aber das zweite Differential einer Kurve stets Null, wie es bei einer geraden Linie der Fall ist, z. B. bei der Formel für die Endgeschwindigkeit $g \cdot t$ oder $g \cdot x$ (Figur 30), so fällt das vorhergehende wesenswichtige Dreieck in eine Gerade zusammen oder hat die Winkel Null. Natürlich ist das erste Differential dann konstant (siehe vorigen Abschnitt). In diesem Falle ist übrigens das zweite Differential von $g \cdot t$ zugleich das dritte von $g/2 \cdot t^2$ (siehe nächster Abschnitt!).

Ist die Funktion so beschaffen, dafs das zweite Differential veränderlich ist wie z. B. bei dem Kreise oder der Ellipse, so kann es doch vorkommen, dafs für verschiedene endliche Punkte der Kurve dieses Differential positiv oder negativ wird. Bei der Parabel (Figur 31) war es positiv und hatte den positiven Wert $g \cdot dt^2$. In der Figur zeigt sich dies darin, dafs die Strecke D_3D' oder E_3E' zu den Strecken P_2D_3 bez. P_3E_3 hinzukam, nach oben hin. Andererseits aber sahen wir, dafs diese hinzukommenden Strecken im Verhältnisse standen zu C_0G usw. oder den Höhen der vorhergehenden wesenswichtigen Dreiecke. Geht die Strecke D_3D' oder D_2D' nach oben, so geht die Linie des vermittelnden Dreiecks C_0G von dem Punkte C_0 des wesenswichtigen Dreiecks aus ebenfalls nach oben. Man wird eine solche Linie im wesenswichtigen Dreieck beziehlich des Koordinatensystems ebenfalls positiv nennen. Dann aber zeigt das wesenswichtige Dreieck seinen stumpfen Winkel unten und es ist die Kurve in der Gegend dieses wesenswichtigen Dreiecks nach unten zu (oder von der x-Axe aus gesehen) konvex (von oben her gesehen hohl). Leicht läfst sich Entsprechendes für eine von unten gesehene hohle Kurve nachweisen.

Und die bekannte Regel der Diskussion ebener Kurven, nämlich: „Die Kurve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, kehrt die konvexe bez. die konkave Seite nach unten, je nachdem $f''(x)$ (der zweite Differentialquotient) für positive Ordinaten (oder allgemein das Produkt $y \cdot d^2y/dx^2$) positiv oder negativ ist", heifst nun für uns geometrisch: die Kurve

ist an der einer Ordinate (oder einem Funktionswerte) vorhergehenden endlichen Stelle (die aber zum Grenzgebiete dieser Ordinate gehört) konvex oder konkav, wenn das vom mittleren Punkte des vorhergehenden wesenswichtigen Dreiecks ausgehende Lot zur x-Axe im Gebiete oberhalb der x-Axe nach oben geht (positiv ist) oder nach unten geht.

Dieses Lot liegt im vermittelnden Dreiecke zusammen mit der Höhe des wesenswichtigen Dreiecks. Darum ist diese Betrachtung nicht so sehr vom Koordinatensystem abhängig wie die über das erste Differential. Allerdings mufs man sich auf irgend eine Seite der Kurve stellen, um überhaupt sagen zu können, ob sie konvex oder konkav erscheint.

Wird nun aber für irgend einen bestimmten Wert von x das zweite Differential Null, so mufs diese Stelle an der Kurve vorhanden sein, wie man auch das System legt, die Kurve mufs daselbst von irgend einer Seite betrachtet weder konkav noch konvex sein, also, wenn sie überhaupt krumm ist, von der einen Art der Krümmung zu der anderen übergehen. Bekanntlich nennt man das Inflexion oder Wendepunkt. Ein Inflexionspunkt (oder eine Stelle der Inflexion — wir würden genauer sagen ein im Endlichen von anderen, davon endlich entfernten Punkten unterscheidbarer Punkt der Kurve) wird nach der bekannten Regel der höheren Mathematik gefunden, indem man den Wert von x sucht, bei dem der zweite Differentialquotient Null wird, während er sonst nicht Null ist (und der dritte vorhanden ist — siehe später!).

Wir können durch Anschauung sagen: wenn das diesem Werte der Funktion unmittelbar vorangehende und zum Grenzgebiete dieses Punktes gehörige wesenswichtige Dreieck mit unendlichkleinen Winkeln ersten Grades die Höhe Null zeigt, also eine Strecke wird, dann liegt der Inflexionspunkt vor. In dieser Form ist die Entscheidung unabhängig von dem Koordinatensystem. Die bisher besprochenen Kurven haben überhaupt keine Inflexion. Es heifst nämlich der zweite Differentialquotient für die Parabel $y = g/2\, t^2$ bekanntlich g; für den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ ist $dy = -\frac{x \cdot dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$; die Ableitung dieser Formel will ich aus Raummangel hier fortlassen. Und es ist $d^2y = \frac{-r^2 dx^2}{\sqrt{(r^2 - x^2)^3}}$, was für keinen Wert von x der Null gleich wird. Für den verschobenen Kreis $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ wird $dy = \frac{-(x-a)\,dx}{\sqrt{r^2 - (x-a)^2}}$ und $d^2y = \frac{-r^2 dx^2}{\sqrt{(r^2 - [x-a]^2)^3}}$, was gleichfalls keinem Inflexionspunkte entspricht.

Der Krümmungskreis und das wesenswichtige sowie vermittelnde Dreieck.

Es seien in Figur 35 P, C und P_1 drei unendlichnahe Punkte des Kreises mit der Gleichung $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Diese drei Punkte mögen gehören zum Grenzgebiete eines endlichen (im Endlichen von anderen unterscheidbaren) Punktes C. Es seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte der Kreissehnen PC und P_1C. Daraus folgt nach bekannten elementaren Sätzen, daſs M_1M_2 parallel PP_1 ist und die in M_1 und M_2 auf den Sehnen errichteten Mittellote M_1M und M_2M durch den Mittelpunkt des Kreises gehen (der die Koordinaten a und b hat).

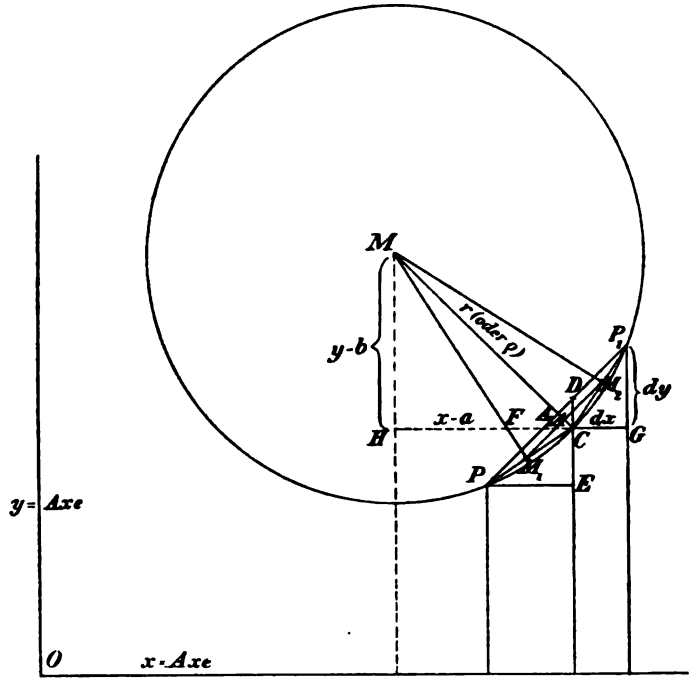


Fig. 35.

Man kann sich nun die Figur derart einfach denken, daſs die drei den Kreis bestimmenden Punkte P, C und P_1 gleiche Entfernungen PC und P_1C voneinander haben. Dann sind jene Mittellote als Entfernungen gleicher Sehnen vom Mittelpunkte gleich lang und der Kreisradius MC ist auch Mittellot von M_1M_2 und PP_1.

Unter diesen Umständen sei in dem charakteristischem Dreiecke CGP_1 die Strecke CG gleich dx und GP_1 gleich dy. Verlängert man nun die Ordinate des Punktes C, bis sie die Seite PP_1 des wesens-

wichtigen Dreiecks in D trifft, so läfst sich beweisen, dafs diese Seite CD des vermittelnden Dreiecks CA_1D die Hälfte des zweiten Differentials, also $\frac{1}{2}d^2y$ vorstellt. Es sind nämlich die Dreiecke CHM und das vermittelnde Dreieck ähnlich, weil sie rechtwinklig sind und die Winkel CDA_1 und MAH gleich sind. Folglich verhält sich (I) $r : y - b = CD : CA_1$. Wir werden versuchen CD zu entwickeln und das zweite Differential hineinzubringen. Ich setze dabei als bekannt voraus, dafs, abgesehen von dem Vorzeichen, der zweite Differentialquotient des vorliegenden Kreises den endlichen Wert habe $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r^2}{(\sqrt{r^2-[x-a]^2})^3}$, was man ja auch ohne Figur durch Differenzieren aus der Kreisgleichung ableiten kann. Da nun aus der Kreisgleichung folgt, dafs $y - b = \sqrt{r^2-(x-a)^2}$, so ist jener Differentialquotient auch gleich $r^2 : (y-b)^3$ oder es ist $(y-b)^3 = r^2 \cdot dx^2 : d^2y$. Diese Gleichung heifse (II). Ehe wir sie in die Proportion (I) einsetzen, welche man nun schreiben wird

$$\text{(I)} \qquad (y-b)^3 = \frac{r^2 \cdot CA_1^2}{CD^2},$$

werden wir zunächst benutzen, dafs CA die Hälfte von CA_1 ist und dafs MM_2 senkrecht auf CM_2 steht. Danach ist, mittels eines bekannten Satzes vom rechtwinkligen Dreiecke $\frac{1}{2}CA_1 \cdot r = CM_2^2 = \frac{1}{4}CP_1^2$, also

$$\text{(III)} \qquad CA_1 = \frac{CP_1^2}{2r}.$$

Aus Gleichung (I) und (III) folgt

$$\text{(I, III)} \qquad (y-b)^3 = \frac{r^2 \cdot CA_1^2 \cdot CP_1^2}{2\,CD^2}.$$

Nun ist noch die Beziehung der hier vorkommenden Gröfsen zu dx zu benutzen. Es ist Dreieck $CA_1D \sim FGP_1$. Also verhält sich $CA_1 : CD = FG : FP_1$. Es sind aber CA_1 und CD unendlichklein vom zweiten Grade (siehe unsere früheren Untersuchungen!), folglich ist FG nur um eine Gröfse gröfser als CG d. h. dx, welche unendlichklein vom zweiten Grade ist. Ebenso unterscheidet sich die unendlichkleine Gröfse (ersten Grades) FP_1 um ein derartig damit nnvergleichbares Stück von A_1P_1 oder CP_1. Es ist mithin $FG : P_1F = (dx + \delta^2) : (CP_1 + \delta^2)$. Neben dem unendlichkleinen Summanden dx hat aber die unendlichkleine Gröfse vom zweiten Grade keinen Sinn, ebenso ist δ^2 im Nenner neben CP_1 fortzulassen. Auch der Umstand, dafs die um so Geringes vermehrten Zähler und Nenner durcheinander zu dividieren sind, macht diese Weglassung nicht fehlerhaft. Es ist also richtig jene Proportion zu schreiben:

$$\text{(IV)} \qquad CA_1 : CD = dx : CP_1.$$

Hieraus folgt $CA_1^2 = dx^2 \cdot CD^2 : CP_1$. Bei Einsetzung hiervon entsteht aus Gleichung (I, III) die folgende

$$\text{(I, III, IV)} \qquad (y - b)^3 = \frac{r^2 \cdot dx^2}{2\,CD}.$$

Verbinden wir damit die Gleichung (II), nämlich

$$(y - b)^3 = \frac{r^2\,dx^2}{d^2y},$$

so folgt, daſs $d^2y = 2\,CD$ ist.

Es mögen nun die drei unendlichnahen Punkte P, C und P_1 einer beliebigen Kurve angehören. Dann kann man sich durch solche drei Punkte irgend einer Kurve einen Kreis gelegt denken, denn es läſst sich durch drei nicht in einer geraden liegende Punkte stets ein Kreis legen, der dadurch im allgemeinen bestimmt ist. Wenn nun auch die Kurve sich im übrigen anders krümmt als dieser Kreis, das in unserer Figur mit dx und dy Bezeichnete stimmt für beide Linien unter Vorausstetzung eines bestimmten endlichen Berührungspunktes x_1, y_1 überein, auch das wesenswichtige Dreieck sowie das vermittelnde Dreieck können als gemeinschaftlich betrachtet werden, soweit nur untersinnlichvorstellbare Gröſsen ersten und zweiten Grades in Betracht kommen; freilich für Gröſsen dritten und höheren Grades der Kleinheit ist dies nicht einzusehen und, was hier noch nicht entschieden werden soll, vielleicht falsch. Insbesondere stellt die Länge CD auch hier eine gewisse Linie des vermittelnden Dreiecks CDA_1 vor, welche durch die Seite PB_1 des wesenswichtigen Dreiecks in ihrer Länge bestimmt wird und für welche bis auf die Gröſsen vom zweiten Grade hin unsere Betrachtungen Giltigkeit behalten werden (stets, falls $CG = dx$ ist).

Es folgt dann aus Gleichung (III) $r = \frac{CP_1^2}{2\,CA_1}$ und aus Gleichung (IV) wird $2 \cdot CA_1 = \frac{2 \cdot CD \cdot dx}{CP_1}$ und unter Benutzung des Satzes über $CD = \frac{1}{2}\,d^2y$ wird $r = CP_1^3 : (d^2y \cdot dx)$.

Nun ist aber CP_1 nach der Figur $=$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Setzen wir dies in die eben erhaltene Formel für r ein, so ergiebt sich für die Gröſse des Radius eines sich an die beliebige Kurve in dem Grenzgebiete eines endlichen Punktes anschmiegenden Kreises die bekannte Formel

$$r = \frac{dx^3\sqrt{\left(1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right)^3}}{d^2y \cdot dx} = \frac{\sqrt{\left(1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right)^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Kurz geschrieben lautet also diese endliche Gröfse des sogenannten Krümmungsradius, gewöhnlich griechisch bezeichnet,

$$\varrho = \frac{(\sqrt{1 + y'^2})^3}{y''}.$$

Bei den bisher bekannten Ableitungen werden zwar die ersten Differentiale in der Figur benutzt, nicht aber das zweite Differential; jene Ableitungen stützen sich darum nur teilweise auf die Anschauung, während hier alle Gröfsen in der Figur nachgelesen werden können. Es erscheint das an sich von einigem Interesse, wird uns aber besonders in den weiteren Betrachtungen über die Berührung der Kurven nützlich sein. Hoffentlich trägt es dazu bei die Lücken, welche sich im Aufbau der Infinitesimalrechnung finden, auszufüllen.

Ein Beispiel sei die als Fallformel früher behandelte Gleichung der Parabel $y = g/2\, x^2$. Hierfür ist $y' = g \cdot x$ und $y'' = g$. Folglich ist $(\sqrt{1 + y'^2})^3 : y''$ für diese Parabel $(\sqrt{1 + g^2x^2})^3 : g$. Dies ist ein Ausdruck, welcher sich mit x ändert, also an verschiedenen Stellen der Parabel verschieden ist; für das Gebiet eines bestimmten endlichen Wertes von x bedeutet er die Länge des sich daselbst möglichst eng an die Kurve anschmiegenden Kreises, also eines Kreises, der denselben ersten und zweiten Differentialquotienten wie die Kurve hat (wieder nur für diesen Punkt), also in drei beliebigen unendlichnahen Punkten dieses Grenzgebietes mit der Kurve zusammenfällt. Für $x = 0$, also den Scheitelpunkt der Parabel wird jenes $\varrho = 1/g$, für $x = 1/g$ wird er $1/g \cdot \sqrt{8}$ usw., ist also leicht zu zeichnen.

Wählt man drei unendlichnahe Punkte wie CBD in unserer früheren Figur 31 und verlängert P_1B bis es CD schneiden würde, so erhielte man, falls $CB = BD$, jene Verlängerung gleich $\frac{1}{2}\, D_3D'$, da $BD_1 = dx$ oder dt ist. Wählt man aber die Punkte BB_0D und zeichnet $BB_0 = B_0D$, so ergäbe eine durch B_0 gelegte Ordinate eine bis BD reichende Verlängerung. Auch diese müfste nach unserem Satze vom Berührungskreise gleich der Hälfte von d^2y sein. Dies zweite Differential ist aber in der Figur die Strecke D_3D'. Es scheint also, als wenn die vermittelnde Höhe die von B_0 ausgeht (für das wesenswichtige Dreieck BB_0D) oder die vermittelnde Höhe C_0C im Dreiecke CC_0B gleich sein müfsten der Hälfte von D_3D', also gleich D_2D'. Das scheint im Widerspruche zu stehen dazu, dafs Dreieck C_0GB und $D_2D'B$ nicht kongruent sind.

Es ist aber wohl zu beachten, was damit gemeint ist, wenn man sagt, die vermittelnde Höhe im wesenswichtigen Dreiecke, welches der Kurve und dem Krümmungskreise gemeinsam ist, sei für den Wert

des entsprechenden endlichen Punktes der Kurve gleich der Hälfte des zweiten Differentials. Das zweite Differential ebenso wie jene vermittelnde Linie ist keine im Endlichen als bestimmte Länge vorzustellende Gröfse, hat kein bestimmtes Verhältnis zu einer endlichen Gröfse. Aber auch in der Behaftung des Unendlichkleinen erster oder zweiter Ordnung bedeutet eine einzeln angedeutete Gröfse wie d^2y überhaupt gar nicht eine bestimmte Länge; die Vorstellung einer bestimmten unendlichkleinen Länge zweiten Grades verbinden wir nur damit, wenn wir mehrere derartige unendlichkleine Gröfsen zweiten Grades mit einander verbinden: nur im Verhältnis zu anderen solchen Gröfsen hat es eine vorstellbare Länge. Es fragt sich nun, ob man sich überhaupt solches Verhältnis zwischen jenen Gröfsen (vermittelnden Höhen und D_2D^1) nach der Anschauung der Figur 31 vorstellen darf, ob diese Figur hierbei überhaupt die richtigen Mafsverhältnisse angeben kann und will, ob man überhaupt in eine Figur dieselben hineinbringen darf; vielleicht hat die Figur nur andere Zwecke (siehe früher) und ist nur so gezeichnet, um diese zu erfüllen unter Vorbehalt von Fehlern in anderer Beziehung.

In der That habe ich jenen Satz für CD (in Figur 35) erstlich nur unter der vereinfachenden Voraussetzung abgeleitet, dafs $PC = CP_1$ gemacht ist. Dann habe ich aber das Belieben in der Wahl der unendlichnahen Punkte P, C und P_1 ferner noch so eingeschränkt, dafs diese Punkte zum Grenzgebiete des endlichen Punktes C gehören sollen und dafs die Gröfse dx gleich CG und dy gleich GP_1 sei. Auch bei dem Beweise des Satzes wurde vorausgesetzt diese Beziehung von CP_1 zum ersten Differentiale und zu dx. Das zweite Differential ist also nur vorgestellt in solcher Beziehuug zu dx oder vielmehr, wenn es in einem Verhältnisse vorkommen soll, das endlichen Zahlenwert hat, zu dx^2. In Figur 31 aber passen diese Voraussetzungen wohl auf das Dreieck CBD, falls $BD_1 = dx$ oder dt ist; die vermittelnde Höhe (Verlängerung von P_1B) ist also $= \frac{1}{2} D_3D'$; für das Dreieck CC_0B aber würde C_0G nur dann gleich $\frac{1}{2} d^2y$ sein, wenn erstlich $CC_0 = C_0B$ wäre und aufserdem dt sich von C_0 aus parallel zur x-Axe bis zur Ordinate P_1B erstreckte. Es war aber in jener Figur die etwa doppelt so grofse Linie CB_1 als dt vorgestellt. Daher kommt es, dafs C_0G nicht als $\frac{1}{2} D_3D'$, sondern etwa 1/4 so grofs erscheint. Wollte man aber sagen, es müsse doch die konstante Gröfse d^2y oder $g \cdot dt^2$ überall in gleicher Gröfse erscheinen, könne also nicht etwa für die drei Punkte CC_0B auf der Ordinate P_1B halbsogrofs gezeichnet werden wie auf P_2D, so ist daran zu erinnern, dafs d^2y nur eine

vorstellbare Länge hat in Bezug auf dx^2, in diesem Falle aber dx nicht $= BD_1$ ist, sondern etwa halbsogrofs und von C_0 bis P_1B reicht.

Trotz alledem können viele unendlichnahe Punkte zum Grenzgebiete eines endlichen Kurvenpunktes gehören. Derjenige Krümmungskreis, welcher zum endlichen Kurvenpunkte C (Figur 35) gehört, hat nicht nur die drei Punkte P, P_1, C des gerade vorgestellten wesenswichtigen Dreieckes mit der Kurve gemeinsam, sondern beliebigviele Punkte dieses Grenzgebietes mit unendlichkleiner Behaftung, nur darf dabei niemals eine Behaftung mit seitlichen Entfernungen vom dritten oder höheren unendlichkleinen Grade vorgenommen werden. Wir wissen nach unseren anfänglichen Betrachtungen, dafs die Vorstellung von Punkten einzig und allein mittels Behaftung bestimmten Grades vorgenommen werden darf. Irgend ein wesenswichtiges Dreieck in diesem Grenzgebiete mufs erstens unendlichkleine Seiten und unendlichkleine Winkel haben, ferner aber, falls die Gröfse der vermittelnden Höhe eine bestimmte sein soll, zwei gleiche Seiten und dx in der Gröfse einer zu dieser Seite als Hypotenuse gehörigen Kathete.

Da das wesenswichtige Dreieck einer Geraden die Höhe Null hat, so hat eine Gerade mit einem Kreise zwei unendlichnahe Punkte im Grenzgebiete eines endlichen Punktes gemeinsam, falls man für den Kreis noch das Unendlichkleine zweiten (oder niedrigeren) Grades in Betracht zieht, also ein wesenswichtiges Dreieck mit der Höhe von solchem Grade. Zieht man aber für den Kreis diese Behaftung nicht mit heran, so hat dieser mit der berührenden Geraden eine unendlichkleine Strecke mit allen ihren beliebigvielen Punkten gemeinsam (die Länge dieser Strecke ist an sich unbestimmt).

Ein unendlichkleines Stück einer krummen Linie ist also als gerade zu betrachten, sobald man auf die Behaftung mit dem Unendlichkleinen zweiten und niedrigeren Grades verzichtet und solange man dies thut. Und es ist nicht etwa ein Widerspruch hierzu, wenn man sagt, dafs ein unendlichkleines Stück einer Kurve nicht gerade sei, sobald man sich seine Berührung daselbst mit dem Krümmungskreise vorstellt. Denn es existiert nach unseren Untersuchungen der Begriff eines unendlichkleinen Stückes an sich überhaupt

nicht in der Vorstellung, sondern nur logisch durch Abstraktion aus der Vorstellung, in der Vorstellung aber nur durch Verhältnisse zu anderen Stücken.

Wenn Leibniz darum den unendlichkleinen Bogen für gerade erklärt, so hat er nur in diesem Sinne recht, und auch meine Erklärung an anderer Stelle (in der Schrift: „Eine mögliche Wesenserklärung usw.", S. 29), welche daselbst nur nebensächlich in gröfster Kürze angeführt war, ist hiernach zu ergänzen.

Der sich an eine Stelle einer Kurve möglichst anschmiegende Kreis hat mit ihr die drei Punkte des wesenswichtigen Dreiecks gemeinsam (bei unendlichkleinen Seiten und Winkeln desselben), man kann aber auch sagen: beliebigviele Punkte des Grenzgebietes eines endlichen Kurvenpunktes, sobald man alle diese nur mit unendlichkleinen Entfernungen ersten Grades und mit unendlichkleinen Höhen zweiten Grades behaftet. Zwei Kreise aber, die denselben Radius haben und sich zusammenfallend berühren, haben alle Punkte bei jeder Weitenbehaftung gemeinsam.

Ist in der Formel für den Krümmungsradius $y'' = 0$, so würde dieser Radius eine Gröfse annehmen nach der Formel $a/0$. Solche Form haben wir früher für überhaupt unmöglich, nicht etwa für ∞ erklärt. Das stimmt mit unseren letzten Betrachtungen überein. Ist das zweite Differential 0, so wird die vermittelnde Höhe 0, dann aber hat das wesenswichtige Dreieck nicht mehr unendlichkleine Winkel ersten Grades, existiert derartig nicht mehr in der Anschauung, es kann darum auch gar nicht von einem Kreise, der sich anschmiegt, die Rede sein (falls man das Unendlichkleine δ^3 u. s. f. nicht berücksichtigt). An einer Stelle einer Kurve, wo $y'' = 0$ wird (Inflexion), ist der Krümmungskreis gar nicht mehr vorhanden, es ist ungenau zu sagen, der Krümmungsradius werde daselbst unendlich, solange jene Formel für ϱ als genau richtig gilt. Ist aber — wie gebräuchlich — als Krümmungsmafs der reciproke Wert, also $1/\varrho$ bezeichnet, so ist nicht das Krümmungsmafs dann gleich Null, wenn ϱ unendlich ist (dann ist das Mafs unendlichklein), sondern einfach, wenn y'' gleich Null ist.

Es kommt demnach bei der Krümmung immer auf die Höhe des wesenswichtigen Dreiecks an, die ja mit jener vermittelnden Höhe in nahem Zusammenhange steht. Wird eine Kurve ohne Koordinatensystem vorgestellt, so kann man nachträglich dieses so legen, dafs die Tangente parallel zur x-Axe wird. Dann ist $y' = 0$, aber das wesenswichtige Dreieck kann daselbst existieren und eine Höhe zeigen,

welche nun mit der vermittelnden Höhe zusammenfällt. Bekanntlich wird dies benutzt zur Unterscheidung des Maximums und Minimums. Auch für diese Stelle kann der Krümmungskreis gesucht werden und es wird $\varrho = \frac{1}{y''} = \frac{dx^2}{d^2y}$, und es ist hierbei — unter den mehrfach genannten Voraussetzungen, die Höhe des wesenswichtigen Dreiecks gleich $\frac{1}{2}d^2y$. Es ist also sehr leicht, das zweite Differential für die Stelle des Maximums oder Minimums sich geometrisch vorzustellen (natürlich immer nur in Beziehung auf die entsprechend vorgestellte Gröfse dx^2, deren erste Potenz man in der Figur sieht).

Die Krümmungskreise der Parabel. Die wesenswichtigen Dreiecke erster Ordnung.

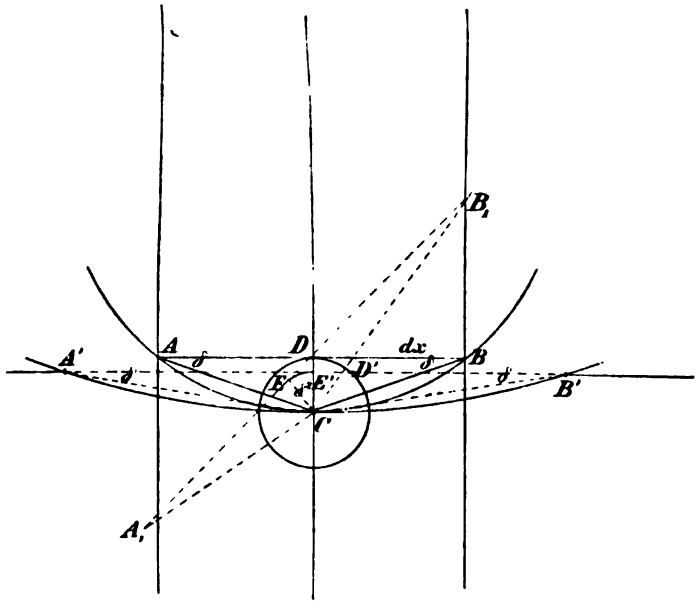


Fig. 36.

Es wird von Interesse sein die den Krümmungskreisen und der Kurve mit konstantem y'' gemeinsam wesenswichtigen Dreiecke mit zwei gleichen Seiten untereinander zu vergleichen. Es sei ABC (Figur 36) ein solches Dreieck am Scheitelpunkte der Parabel. Verlege ich dann ein zweites, irgendwoanders liegendes von seiner Stelle parallel zu sich selbst nach Punkt C, so erhalte ich z. B. Dreieck A_1B_1C. Es müfste nun sein $CB_1 = CA_1$, also, da $AD = BD$, Punkt A_1 etwas

über die in A gelegte Ordinate hinausfallen; aber da $DB = dx$ ist, also unendlichklein ersten Grades, so sind alle zwischen den drei Ordinaten der Figur schräg verlaufenden Geraden in Strecken von diesem Grade geteilt; DB_1 unterscheidet sich nur um ein Unendlichkleines zweiten Grades von EB_1, und das Doppelte von B_1E, also B_1A_1, ist für die Behaftung mit dem Unendlichkleinen ersten Grades $= 2\,DB_1$.

Weil y'' der Parabel konstant ist und die vermittelnde Höhe CD (in Figur 35) für die Krümmungskreise gleich $\frac{1}{2}d^2y$, also bei den der Parabel und ihren Krümmungskreisen gemeinsamen Dreiecken konstant ist, so mufs diese vermittelnde Höhe CD des Dreiecks A_1B_1C (Figur 36) gleich der Höhe CD von ABC sein, also die Endpunkte sämtlicher vermittelnder Höhen müssen auf einem Kreise (beschrieben mit CD um C) liegen, sobald man alle diese Dreiecke herumdreht, sodafs ihre gröfsten Seiten parallel zu AB liegen. So ist Dreieck A_1CB_1 in die Lage gebracht $A'CB'$. Seine Höhe CE hat nun die Lage angenommen CE', sein vermittelndes Dreieck CED die Lage $CE'D'$. Die Mittelpunkte der Krümmungskreise liegen alle auf der Verlängerung von CD, ihre Radien sind verschieden. Die Höhen wie CD und CE' sind verschieden trotz der Gleichheit der vermittelnden Höhen, aber alle unendlichklein vom zweiten Grade (δ^2); die zwei Winkel und drei Seiten aller dieser wesenswichtigen Dreiecke sind vom Grade δ.

Für Stellen der Parabel, die sich sehr weit vom Scheitelpunkte entfernen, werden zwei Seiten des charakteristischen Dreiecks DBB_1 immer gröfser. Man könnte fragen, ob sie nicht schliefslich endlich und der Winkel DB_1B statt endlich unendlichklein würde; dann wäre y' und ϱ unendlich. Es sei A_1CB_1 das entsprechende wesenswichtige Dreieck; die Parabel verlangt, dafs die vermittelnde Höhe $CD = \delta^2$ bleibt; also müfste Winkel $DB_1C = \delta^2$ sein (dem Grade nach). Nun läfst sich aber leicht der Satz erweisen:

In jedem wesenswichtigen Dreiecke eines endlichen Kreises (bei zwei gleichen Seiten) sind die zwei Winkel vom selben Grade unendlich wie die Seiten. Denn es ist immer $CB_1^2 = EC \cdot 2r$ (im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $2r$), also der Grad der Höhe das Quadrat vom Grade der Seite, also *tan* des Winkels $= EC : EB_1 =$ z. B. $\delta^2 : \delta$ oder beim Grade δ^2 der Seiten $\delta^4 : \delta^2$, also vom Grade der Seiten.

Ist demnach der Winkel $DB_1C = \delta^2$, so müfste auch DB_1 und CB_1 von diesem Grade, mithin nicht endlich sein. Auch die Annahme, die Seite des wesenswichtigen Dreiecks werde für entfernte Punkte der Parabel etwa vom Grade einer Zwischenbehaftung zwischen

endlich und δ z. B. $\sqrt{\delta}$, würde nach sich ziehen, daſs die Höhe δ und nicht δ^2 würde.

Die den Krümmungskreisen und der Parabel gemeinsamen wesenswichtigen Dreiecke mit der Höhe δ^2 haben also Seiten und Winkel vom Grade δ. Es möge ein wesenswichtiges Dreieck, dessen Seiten und Winkel vom ersten Grade unendlichklein sind, heiſsen ein solches von erster Ordnung. In der Figur 36 kommen nur solche vor, niemals aber wird die Höhe CE' so klein, daſs sie etwa in den dritten Grad hineingerät. Für irgend einen Kreis allerdings kann man sich auch wesenswichtige Dreiecke denken, deren Höhe δ^3 sind; dann ist die Seite eines solchen Dreieckes $= \sqrt{\delta^3}$ oder $\delta\sqrt{\delta}$ und der Winkel ebenfalls $\delta^3 : \sqrt{\delta^3} = \sqrt{\delta^3}$.

Wir lernen dadurch, daſs bei einer Kurve gewisser Art wie dem Kreise auſser dem wesenswichtigen Dreiecke erster Ordnung auch noch solche anderer Ordnung vorstellbar sind, z. B. ein solches von der Ordnung $\sqrt{\delta^3}$ mit der Höhe δ^3, oder ein solches von der Ordnung $\sqrt[4]{\delta^3}$, also auch mit dem Winkel $\sqrt[4]{\delta^3}$ und der Höhe $\sqrt[3]{\delta^3}$. Ist die Höhe δ^4, so ist die Ordnung vom Grade δ^2. Ziehen wir in einem Dreiecke wie ABC (Figur 36) eine Parallele zu AB in einem Abstande vom Grade δ^3 von C, so schneidet diese aus dem vorigen ein Dreieck heraus, das Winkel vom Grade δ hat wie ABC; dann ist $tan = \delta^3 : x$, d. h. die Seite desselben muſs vom Grade $x = \delta^2$ sein, die Punkte der Kurve liegen in einer Entfernung voneinander, die unendlichklein vom zweiten Grade ist. Für den Kreis ist dies unmöglich, falls man drei derart nahe Punkte desselben verbindet, so muſs auch der Winkel vom Grade δ^2 sein. Warum aber sollte es nicht bei Kurven anderer Art möglich sein? Warum sollte nicht wie beim Kreise die Möglichkeit verschiedenartige wesenswichtige Dreiecke zu bilden, durch die Art der Kurve bestimmt sein? Man muſs alsdann auch wesenswichtige Dreiecke gelten lassen, die von gemischter Ordnung sind, das soll heiſsen, deren Seite und Winkel dem Unendlichkleinen verschiedener Ordnung angehören. Alle wesenswichtigen Dreiecke nannten wir Dreiecke mit gemischter Weitenbehaftung, jetzt unterscheiden wir Ordnungen und gemischte Ordnungen verschiedener Art. Nichts hindert uns die Vorstellung der Seiten, die in einer Dimension liegen (siehe die früheren Untersuchungen!), mit einer anderen Weitenvorstellung zu behaften wie die Winkel und daraus dann die Weitenbehaftung zu schlieſsen, mit der die Höhe behaftet werden muſs. Auch das bekannte charakteristische Dreieck hat Winkel, die meist mit dem Endlichen behaftet sind,

während die Seiten im Unendlichkleinen vorgestellt werden. Es fragt sich nur, ob die durchaus widerspruchsfreie Anschauung von Nutzen für die geometrischen Probleme ist und uns erlaubt, gewisse Sätze, welche durch die Rechnung (Differentialrechnung) gefunden sind, in der Anschauung zu verfolgen. Zu diesem Zwecke werden wir Kurven betrachten, welche dritte und höhere Differentialquotienten besitzen, auch solche, bei denen diese konstant oder 0 werden, und die Berührungsstellen von Kurven solcher verschiedenen Art uns ähnlich anschaulich zu machen suchen wie bisher die möglichst enge Berührung einer Kurve (z. B. der Parabel) mit einem Kreise (dem Krümmungskreise).

Mängel der Formel für den Krümmungsradius. $\infty : \infty$.

Wir wissen, wie die Parabel (I) $y = g/2 \cdot x^2$ in der Figur liegt. Für sie ist $y' = gx$ und y'' konstant $= g$. Vertauscht man x mit y und schreibt $x = g/2 \cdot y^2$, so ist es leicht an derselben Figur auch diese Parabel (II) herzustellen, sie hat denselben Scheitelpunkt wie jene, ihre Hälften liegen aber auf beiden Seiten der x-Axe; sie liegt also zur x-Axe ebenso wie jene Parabel zur y-Axe. Den Schnittpunkt beider findet man leicht durch Substituieren von x aus der einen in die andere Gleichung, er hat die Koordinaten $2/g$ und $2/g$.

Als Krümmungsradius erhält man für die erste Parabel $\varrho_1 = \frac{(\sqrt{1+g^2x^2})^3}{g}$. Dies wird für den Scheitelpunkt $x = 0$ ohne Schwierigkeit zu $\varrho_1 = 1/g$ und für den Schnittpunkt beider Parabeln $x = 2/g$ wird $\varrho_1 = 1/g \cdot \sqrt{53}$. Für die Parabel (II) aber wird

$$y' = \frac{1}{g}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{g}x}} \quad \text{und} \quad y'' = -\frac{1}{g^2}\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{g}x}\right)^3},$$

ist also nicht konstant, obwohl diese Parabel ohne Rücksicht auf das Koordinatensystem ganz dieselbe ist. Die Differentialquotienten sind eben vom System abhängig und werden, da man bei ihrer Bildung auf der x-Axe gleiche Stücke dx abgetragen denkt, während die entsprechenden Stücke für y nicht gleich werden, auch sofort anders bei Vertauschung der Koordinaten. Der zweite Differentialquotient hängt zwar mit dem wesenswichtigen Dreiecke zusammen, das vom Koordinatensysteme unabhängig ist, hat aber trotzdem noch Abhängigkeit von der Wahl der Axen und der Entscheidung darüber, ob man sich auf der x-Axe die unabhängige Variabele vorstellen will. Nun muſs aber offenbar die Gröſse des Krümmungskreises für beide Parabeln

ganz dieselbe sein, denn derselbe soll sich ja an die Kurve möglichst nahe, in unendlichnahen Punkten anschmiegen, und diese Bestimmung ist vom Systeme unabhängig. Wählen wir also auch für die zweite Parabel den Punkt $x = 0$ (d. h. den Scheitel) und den Schnittpunkt beider Parabeln, so müfste ϱ_2 dieselben Gröfsen bekommen wie ϱ_1, nur mufs man die Vorzeichen mitberücksichtigen. In der That ergiebt sich für $x = 2/g$ der Wert $\varrho_2 = 1/g\sqrt{5^3}$.

Für $x = 0$ aber werden nach gewöhnlicher Auffassung die beiden Differentialquotienten von (II) unendlich und es wird $\varrho_2 = \infty : \infty$, aber nicht $1 : g$. In der höheren Mathematik pflegt man sich bei derartigen „unbestimmten" Ausdrücken zu helfen, indem man sagt, man erhalte den „wahren Wert", indem man Zähler und Nenner differenziert und beide Differentialquotienten durcheinander dividiert. Falls beim ersten Differenzieren wieder eine unbestimmte Form herauskomme, müsse man noch einmal differenzieren usw. Aber auch so kommt man manchmal niemals zum endlichen Werte. Auch habe ich früher den Ausdruck „wahrer Wert unbestimmter Werte" bemängelt. Ist $\infty : \infty$ oder $0 : 0$ wirklich unbestimmt also stets unbestimmt, so kann man niemals einen bestimmten Wert herausbekommen, kann man das aber, so ist auch das Zeichen $\infty : \infty$ falsch; es müfste dann jedem dieser beiden ∞ ein Index hinzugefügt werden und man müfste immer erkennen, dafs diese beiden unendlichen Werte in einem bestimmten Verhältnisse stehen. Hier also ist es ein Mangel, dafs der Zähler von ϱ einfach unendlich oder $1/0$ geben soll, ebenso der Nenner. Man darf auch beim Ausrechnen nicht etwa für $0 : 0$ einfach 1 setzen, denn dies ist nur erlaubt für $\delta_1 : \delta_1$ oder $\infty_1 : \infty_1$, falls Zähler und Nenner genau gleich sind. Die Formel für den Krümmungsradius ist in diesem Falle unbrauchbar, falls man von ihr verlangt, dafs sie für jeden Wert von x gilt. Sie gilt nicht für $x = 0$, oder ist für ihn unmöglich. Nimmt man aber für x den Wert δ, der ja zum Grenzgebiete des endlichen Scheitelpunktes 0 gehört, so ergiebt sich, indem man Zähler und Nenner des Ausdruckes für ϱ_2 mit $(\sqrt{2g \cdot \delta})^3$ multipliziert und annimmt, dafs $\delta : \delta = 1$ ist, die Endformel $\varrho_2 = 1/g \cdot (\sqrt{2g\delta + 1})^3$. Und dieses ist dann $= 1/g$, also gleich dem entsprechenden Krümmungsradius der Parabel (I), wenn man den Summanden δ neben dem endlichen Summanden 1 fortläfst. Dasselbe ergiebt sich, wenn man in der ϱ-Formel den Wert $x + \delta$ setzt, also um unendlichwenig vom Punkt x abweicht, ohne aus dem Grenzgebiete desselben hinauszugehen. Dann gilt diese mit δ unter $(\sqrt{\ })^3$ versehene, also veränderte Formel auch für den Wert $x = 0$. Schlimmer

erweist sich die Mangelhaftigkeit der Formel von ϱ, wenn man die Weitenbehaftung mit δ^3, δ^4 usw., mit berücksichtigt und entsprechende Kurven betrachtet. Wir fanden zwar, daſs bei der Inflexion $y'' = 0$, also das wesenswichtige Dreieck erster Ordnung gerade ist, aber es wird sich zeigen, daſs bei gewissen Kurven die Bedingung $y'' = 0$ nicht genügt, um die Inflexion nachzuweisen. Vielmehr kann ein Maximum oder ein Minimum vorliegen und keine Inflexion, nämlich dann, wenn für irgend einen Wert von x auch $y''' = 0$ und y^{IV} vorhanden ist ($\gtrless 0$). Die Entscheidung zwischen Inflexion und Maximum verlangt dann Hinzuziehung von höheren Differentialquotienten.

Für $y'' = 0$ war der Schluſs richtig, daſs das wesenswichtige Dreieck erster Ordnung mit der Höhe δ^2 gerade wird, aber es braucht darum die betreffende Stelle der Kurve nicht absolut gerade zu werden, sondern kann bei Berücksichtigung seitlicher Gröſsen von der Ordnung δ^3 etc. noch krumm bleiben, oder es können wesenswichtige Dreiecke anderer oder gemischter Ordnung bestehen z. B. mit der Seite δ und dem Winkel δ^2. Dann würden drei unendlichnahe Punkte nicht in genau gerader Linie liegen, es lieſse sich durch sie ein Kreis legen, dessen Radius unendlich werden müſste. Die Höhe solches Dreieckes wäre vom Grade δ^3, es wäre also nach der bekannten Kreisfigur das Quadrat der Seite (Kathete) gleich 2ϱ mal Höhe, also $\delta^2 = \delta^3 \cdot (2\varrho)$. Dies ist nur möglich, wenn ϱ unendlich ist. Allgemein ergiebt sich: Ist das wesenswichtige Dreieck von gemischter Ordnung und zwar bei der Seite δ und dem Winkel δ^{z+n}, so ist der Krümmungsradius vom Grade ∞^n.

Falls nun die bekannte Formel für den Krümmungsradius noch richtig ist, so kann diese Gröſse des Radius nur eintreten, wenn y' als 0 oder endlich vorausgesetzt — der Nenner $y'' = \delta^n$ wird. Es ist aber ein zweiter Differentialquotient nicht ein solcher Wert und auch das zweite Differential d^2y ist immer als eine Gröſse verstanden worden, bei der Summanden von dem Grade δ^2, δ^4 usf. wegblieben. Man müſste die Ordinaten auch noch mit Gröſsen dieser Art behaften und in der Formel für den Krümmungsradius im Nenner solche Gröſsen stehen haben, die daselbst bleiben, auch wenn (wie bei der Inflexion) das sogenannte zweite Differential oder der zweite Differentialquotient Null werden. Die gewöhnliche Formel für den Krümmungsradius, die im Nenner y'' hat, ist also nicht einwandsfrei und für viele Fälle unbrauchbar. Es wird sich eine bessere denken lassen, die auch für die Inflexion richtige Radien von unendlichen Gröſsen liefert. Zur bisher bekannten Formel ist hinzuzufügen, daſs sie nur für endliche Krümmungsradien

und auch nicht immer für alle Werte von x (siehe oben $x = 0$) richtig ist.

Wir können uns im Sinne einer ganz widerspruchslos zu entwickelnden Mathematik nicht dabei beruhigen, daſs wir sagen, ein aus der Formel unter Umständen entstehender sogenannter unbestimmter Ausdruck habe einen auf anderem Wege zu findenden wahren Wert, und noch weniger dabei, die unendlichen Kreise einfach auszuschlieſsen.

Inflexion oder Maximum bei Kurven $y = x^n$. Mängel der Differentiale und Differentialquotienten.

Bei der gewöhnlichen Parabel kann Inflexion nicht eintreten, wohl aber bei gewissen Fällen der parabelartigen Kurven von der Form $y = x_n$. Man mache sich erst der Reihe nach eine Vorstellung von den Kurven $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$, indem man bei irgend einer Maaſseinheit z. B. Centimetern die Punkte der Kurve konstruiert für $x = 0$, dann 1/2, dann 1, schlieſslich 3/2 und ebenso für dieselben negativen Werte; natürlich rechnet man aus der Gleichung jedesmal die betreffenden y-Werte aus und legt z. B. für $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{8}$ Parallelen im Abstande von 1/2 und 1/8 zur y- bez. x-Axe; beider Schnitt ist ein Kurvenpunkt. In der Figur 37 sind die Kurven $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ ausgezogen, dagegen die Kurven $y = x^2$ und $y = x^4$ punktiert gezeichnet. Wie man sieht, verlaufen die ersteren aus dem ersten Quadranten rechts oben in den dritten links unten, während die mit geraden Potenzen von x versehenen Kurven im ersten und zweiten Quadranten liegen. Die mit ungeraden Exponenten von x versehenen haben offenbar für $x = 0$ einen Wendepunkt, während die anderen daselbst das Minimum von y zeigen. Würde man das Koordinatensystem um a und b verlegen mit dem Anfangspunkte O_1, so würden, jene ausgezeichneten Stellen eintreten für die Werte $x = a$, $y = b$ und die allgemeine Gleichung würde heiſsen $y - b = (x - a)^n$. Bleiben wir bei der einfacheren Lage und Gestalt der Gleichungen!

Überschaute man nur den ersten Quadranten, würde man dann aus irgendwelchen Punktfiguren erkennen können, daſs die punktierten Kurven sich an der Stelle von 0 nicht wenden wollen, also wieder nach oben steigen, während die anderen ihre Krümmung im Grenzgebiete von 0 ändern wollen?

Dies Ziel will ich zu erreichen suchen. In der höheren Mathematik pflegt man bisher die Differentialquotienten oder Differentiale jener sämtlichen Funktionen zu bilden, soweit es geht. Für $y = x$ ist schon

das erste Differential von x unabhängig, nämlich $dy = 1 \cdot dx$; für $y = x^2$ wird $dy = 2x \cdot dx$ oder $y' = 2x$ und $y'' = 2$, also wieder von x unabhängig. Für $y = x^3$ wird das dritte Differential $d^3y = 6 \cdot dx^3$, also für $y = x^n$ ganz entsprechend der *n-te* Differentialquotient von x

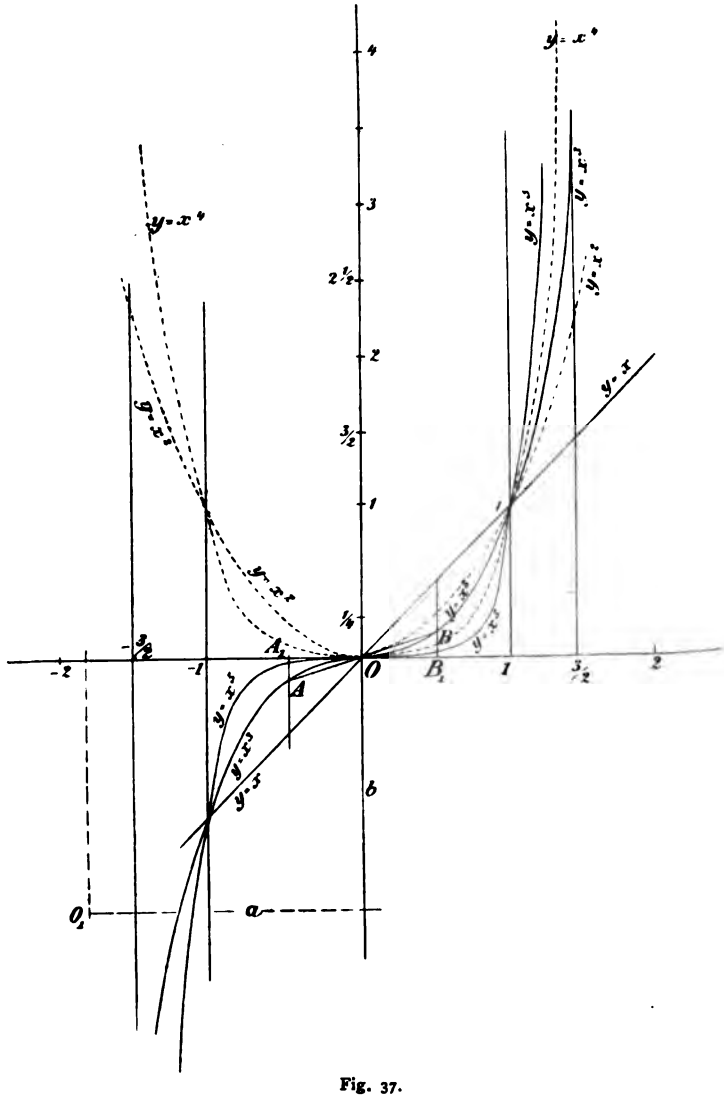


Fig. 37.

unabhängig. Der jedesmal auf diesen konstanten Differentialquotienten folgende nächsthöhere Differentialquotient wird für jede Kurve natürlich gleich Null, also gleich Null, welchen Wert man auch für x, welche Stelle einer einzelnen Kurve man auch wählt. Da für jede dieser

Kurven alle dem konstanten vorausgehenden Differentialquotienten den Faktor x noch enthalten, so werden sie allesamt für die Stellen der Kurve $x = 0$ (oder beim verschobenen System für $x = a$) zu Null. Der von x unabhängige Quotient wird aber natürlich durch den Wert $x = 0$ nicht zu Null gemacht. Nun zeigt es sich in der Figur, daſs die Kurven $y = x$ (gerade Linie), $y = x^3$ usw., also die mit ungeradem Exponenten einen Wendepunkt besitzen bei Null. Es ist z. B. für die Kurve $y = x^3$ der Quotient $y'' = 6x$ und dies wird für $x = 0$ zu Null; mithin besitzt diese Kurve hierfür einen Wendepunkt nach der bekannten Regel. Die Kurve $y = x^2$ hat aber $y'' = 2$ und dies ist für $x = 0$ nicht Null, während für diese Stelle $y' = 2x$ zu Null wird. Mithin ist die Regel für das Vorhandensein des Minimums erfüllt. Wie steht es aber mit $y = x^4$ und $y = x^5$?

Für erstere Kurve ist $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$, $y''' = 24x$, erst y^{IV} wird konstant $= 24$ und y^V usw. gleich Null. Bei der Parabel zweiten Grades, sagt man, ist das Maximum oder Minimum erreicht, wenn y', das im allgemeinen nicht Null ist, für einen bestimmten Punkt Null wird, also für den Punkt $x = 0$; y war dann konstant und wurde auch hier nicht gleich Null, die Höhe im wesenswichtigen Dreiecke ist unendlichklein vom zweiten Grade, aber vorhanden. Bei der Kurve $y = x^4$ werden für den Nullpunkt die drei ersten Differentialquotienten gleich Null; die Figur lehrt, daſs ein Minimum vorhanden ist; das erste Differential, das vorhanden ist, auch für das Grenzgebiet des Nullpunktes, ist unendlichklein vom vierten Grade, nämlich $d^4y = 24 \cdot dx^4$. Man sollte schlieſsen, daſs es ein wesenswichtiges Dreieck gebe mit einer Höhe vom vierten Grade, also falls die Seite vom Grade δ, mit einem Winkel vom Grade δ^3, also ein wesenswichtiges Dreieck von gemischter Ordnung. In der Figur würde dessen gröſste Seite oberhalb von Null parallel zur x-Axe aus dem ersten in den zweiten Quadranten laufen.

Die höhere Mathematik stellt die Regel auf, daſs beim Verschwinden der ersten Differentialquotienten bei einem bestimmten Werte von x, also einem bestimmten Punkte der Kurve, dann ein Maximum oder Minimum vorliegt, wenn der erste vorhandene Differentialquotient von gerader Ordnung ist; das wäre hier $y^{IV} = 24$. Dies stimmt bei unseren Kurven damit überein, daſs der Exponent von x in der Gleichung gerade ist.

Für die Gleichung $y = x^5$ ist $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$, $y^{IV} = 120x$, y^V ist der erste, welcher von x frei ist und hat den konstanten Wert 120, während die folgenden Null werden für alle

Stellen der Kurve. Für die Stelle $x = 0$ werden alle jene Quotienten Null bis zum fünften, also einem ungeraden. Die Kurve $y = x^3$ hatte, wie wir gesehen haben, für $x = 0$ einen Wendepunkt, weil erstlich nach der bekannten Regel beim Setzen von y'' gleich 0, sich der Wert $x = 0$ ergiebt. Das konnte also nicht die Stelle eines Maximums sein. Wir sahen aber, dafs auch für $y'' = 0$ ein Maximum dann vorhanden sein kann, wenn auch der nächsthöhere Differentialquotient $y''' = 0$ wird, aber es mufste dann der erste vorhandene Quotient von gerader Ordnung sein. Hier ist er von ungerader Ordnung, nämlich y^V und die Kurve hat nicht ein Maximum, sondern eine Inflexion. Das stimmt mit der bekannten Regel der höheren Mathematik, dafs beim Verschwinden der ersten Differentialquotienten dann ein Wendepunkt da ist, wenn der erste für diesen Punkt vorhandene Differentialquotient von ungerader Ordnung ist. Diese Regeln pflegt man aus dem Taylorschen Lehrsatze, nicht aus der Anschauung abzuleiten.

Aber es mufs uns erstlich sehr auffallen, dafs die ersten Differentialquotienten in solchen Fällen nicht vorhanden sind; sollte dann die Vorstellung von drei unendlichnahen Punkten und einem Dreiecke zwischen ihnen nicht mehr richtig sein? Sollte ein solches Dreieck für die Behaftung mit allen möglichen Weitenvorstellungen wirklich zur Geraden werden? Wie kommt es, dafs dann doch für das Gebiet dieses Punktes der Kurve die unendlichkleinen Gröfsen vom fünften Grade existieren? Wie kommt es, dafs dabei ein solcher Unterschied zwischen den Differentialen mit geraden und ungeraden Exponenten zu machen ist? Zweifellos richtet sich doch jede Stelle der Kurve nach der Eigentümlichkeit der Gleichung, die Krümmung der in der Figur ausgezogenen Kurven mufs auch in der Nähe des Nullpunktes eine andere sein als die der punktierten Kurven, sie wenden sich ja sofort bei Null in den dritten Quadranten hinein. Ist es hier nicht gestattet mit der Anschauung im Untersinnlichvorstellbaren der Eigentümlichkeit nachzuforschen und einzusehen, warum jene Differentialquotienten jene sonderbare Eigenschaft zeigen, bis zu gewissen geraden oder ungeraden Ordnungen hin Null zu werden?

Wenn wir dies ergründen wollen, so müssen wir uns natürlich an die Gleichung der Kurve halten, denn diese bestimmt ja ihre Eigentümlichkeit hinreichend, wir brauchen nicht zu versuchen besondere von der analytischen Darstellung unabhängige Eigenschaften zu suchen, wie es beim Kreise die euklidische Geometrie und allgemeiner die synthetische thut. Aber wir werden uns davor hüten müssen auf die unendlichkleinen Gröfsen der niedrigeren Grade

darum ganz zu verzichten, weil dies bei den Differentialquotienten geschieht. Vielleicht haben wir Mittel, schon beim ersten Differential auf unendlichkleine Gröfsen vom höheren Grade zu schliefsen, wenn wir das erste Differential nicht in dem Sinne der bisherigen höheren Mathematik als Grenzbegriff nehmen, bei dem die unendlichkleinen Gröfsen z. B. zweiten Grades neben denen ersten Grades fortgelassen werden. Auch wir sind ja damit einverstanden, dafs δ^2 als Summand neben δ fortbleiben soll, soweit das Unendlichkleine ersten Grades in betracht kommt, dessen Gröfse durch δ^2 nicht vermehrt werden kann. Da wir aber die Behaftung desselben Dreiecks, ja derselben Geraden mit verschiedenen Weitenvorstellungen gleichzeitig oder hintereinander zulassen, so dürfen wir auch bei der Bildung des ersten Differentials die Gröfsen der niederen Weitenbehaftungen im Sinne behalten und sie für die Anschauung zu verwerten suchen. Wir lassen also die Vorstellung von gewissermafsen Differentialen mit gemischter Weitenbehaftung zu, ohne den Wert der bekannten Differentiale und Differentialquotienten als Gröfsen einer bestimmten Weitenbehaftung irgendwie zu bestreiten. Umsomehr werden wir uns mit jenen erweiterten Vorstellungen beschäftigen, als sie uns als Brücken für den Zusammenhang der einzelnen, gewissermafsen auseinandergerissenen Differentiale erscheinen und das sogar für den schwierigeren Fall, dafs die Differentialquotienten zuerst Null werden.

Die gerade Linie $x = y$ zeigt zwar keine Wendung ihrer Krümmung, weil sie überhaupt keine Krümmung hat, gehört aber nach obigen Regeln über Wendepunkt oder Maximum zu den Kurven, die einen Wendepunkt besitzen, nur liegt derselbe überall, da für jeden x-Wert der erste Differentialquotient als der erste ungerade vorhanden ist. Auch zeigt die Figur wie die Gleichung die Verwandtschaft mit den ausgezogenen Kurven mit ungeradem Exponenten von x. Das charakteristische Dreieck hat immer denselben, bei unserer Lage der Geraden endlichen Winkel, und das wesenswichtige Dreieck fällt thatsächlich überall und für jede Weitenbehaftung mit einer Geraden zusammen und hat zwei Winkel von der Gröfse Null (nicht von unendlichkleiner Gröfse irgendwelchen Grades).

Bilden wir nun das Differential von $y = x^3$, ohne dabei sofort den sogenannten Grenzübergang zu machen. Letzteres brauchen wir nicht, weil für uns das Unendlichkleine verschiedener Grade wohl unterscheidbar in der Anschauung besteht.

Es ist $dy = (x + dx)^3 - x^3 = 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3$. Wenn sich in der Figur 37 also an irgend einen Punkt x z. B. B ein charakteristisches Dreieck ansetzt, so ist die Kathete dy derselben in Wahrheit behaftet mit Stücken aus drei Weitenvorstellungen. Mögen diese nun auch ganz einzeln keinen Sinn haben, wir können sie doch unter dem Vorbehalt logisch festhalten, dafs jede von ihnen durch Verhältnisse zu irgendwoanders vorhandenen Gröfsen derselben Behaftung (z. B. in anderen solchen Dreiecken) Bedeutung und Wesen hat. Man vergleiche auch die früheren Ausführungen über die Parabel und Figur 31! Wird hier nun x gleich 0, also statt des Punktes B (Figur 37) der Nullpunkt gewählt und an ihn das charakteristische Dreieck angefügt, welches OB_1B sein möge, so bleibt allerdings in dem Ausdrucke für dy nur noch das Glied vom Grade δ^3 stehen. Es wird für diese Stelle der Kurve dy d. h. $B_1B = dx^3$. Für diese Stelle der Kurve dürfen wir uns also wohl ein charakteristisches Dreieck vorstellen mit den Katheten dx und dx^3, also mit einem Winkel BOB_1, der vom Grade δ^2 ist, wir müfsten gemäfs unserer Terminologie sagen: ein charakteristisches Dreieck von gemischter Ordnung. Das Wesen der Kurve geht aus einem solchen Dreiecke nicht genügend hervor, wir müssen ein wesenswichtiges Dreieck mit drei unendlichnahen Punkten bilden.

Ist wieder B irgend ein Punkt der Kurve mit der Abscisse x und setzt sich daran zunächst ein charakteristisches Dreieck durch die Vermehrung um dx, dessen andere Kathete also dy ist und nun wieder ein solches Dreieck durch nochmalige Vermehrung um dasselbe dx, so würde die zweite Kathete des letzteren werden $(x + dx + dx)^3 - (x + dx)^3 = 3x^2dx + 9x \cdot dx^2 + 7dx^3$. In Figur 29, S. 226, wäre (falls die daselbst gezeichnete Kurve unsere vorliegende wäre) dies die Strecke B_1B. Ziehen wir davon dy ab, also die Strecke B_1B', so erhalten wir in jener Figur $B'B$ und hier den arithmetischen Wert $6x \cdot dx^2 + 6dx^3$. Ganz dasselbe aber erhalten wir, wenn wir aus dem Werte für dy, nämlich dem Differential mit gemischter Weitenbehaftung d^2y bilden, indem wir statt x setzen $x + dx$ und dy abziehen. Sind die vorgestellten beiden dx-Gröfsen dieselben, so sind AC und CB' gleich und es ist im Dreiecke $AB'B$ unser gemischtes zweites Differential $B'B$ genau doppelt so grofs wie die vermittelnde Höhe CC' des durch dx und dx entstehenden wesenswichtigen Dreiecks.

Verlegt man nun den beliebigen Punkt B (Figur 37) nach O, so ist für das sich hier anschliefsende wesenswichtige Dreieck $d^2y = 6dx^3$, also ebensowenig Null wie dy Null ist. Wenn wir die Differentialquotienten mit gemischter Weitenvorstellung behaften, so

ist für diese Stelle $y' = dx^2$ und $y'' = 6dx$. Die Höhe dieses wesenswichtigen Dreiecks ist $3dx^3$. Es gehören diese Dreiecke zum Grenzgebiete dieses endlichen Nullpunktes. Schliefst man die Gröfsen vom Grade δ^3 aus, so ist allerdings für den endlichen Punkt Null die Kathete B_1B (Figur 37) $= dx^3$ (falls $OB_1 = dx$) und die Höhe des wesenswichtigen Dreiecks nicht vorhanden, oder es werden die Winkel des zugehörigen charakteristischen und des wesenswichtigen Dreiecks, weil von dem Grade δ^2, als Null angesehen; die Kurve fiele danach also dort mit der x-Axe zusammen; dies stimmt damit überein, dafs y' und y'', definiert nach bisheriger Art in nur einer Weitenbehaftung, hier Null werden. Es wird aber auch für die Kurve $y = x^4$ sowohl y' wie y'' für $x = 0$ zu 0 und doch hat diese keine Inflexion, sondern daselbst ein Minimum. Während also die bisherige Regel mit den üblichen Differentialquotienten aus diesen beiden Quotienten keine Entscheidung erlaubt, können wir nach unserer Auffassung entscheiden, dafs unsere Kurve $y = x^3$ deshalb einen Wendepunkt hat, weil das gemischte erste und zweite Differential vom ungeraden Grade δ^3 ist oder anschaulich, weil der Winkel im ersten sich anschliefsenden charakteristischen und wesenswichtigen Dreiecke vom Grade δ^2 ist.

Es fällt also die Kurve nach dieser Behaftung nicht bei Null mit der x-Axe zusammen. Es liegen also auch drei unendlichnahe Punkte (bei der Entfernung vom Grade δ^1), deren erster der Nullpunkt selbst ist, für die seitliche Behaftung bis zum zweiten Grade inklusive nicht auf einer Geraden. Wählt man freilich den Punkt Null als den mittleren und bildet $(x - dx)^3 - (x - dx + dx)^3$ und dann durch nochmaligen Zusatz von dx das gemischte zweite Differential, so erhält man genau: das gemischte $d^2y = -6xdx^2$ ohne ein Glied $6dx^3$. Dieses vom vorigen abweichende Resultat weist darauf hin, dafs das gemischte zweite Differential verschieden ist, je nachdem wir den endlichen x-Punkt am Anfang oder in der Mitte der dx-Zusätze oder des wesenswichtigen Dreiecks wählen. Auch hier ist übrigens die vermittelnde Höhe halb so grofs wie dieses d^2y; warum das Vorzeichen anders wird als im vorigen Falle, ist leicht zu erkennen. Ist nun der mittlere, endliche Punkt gerade der Nullpunkt, so wird dieses d^2y genau gleich Null; das sich nach beiden Seiten vom endlichen Punkte aus erstreckende — ich will kurz sagen: „beiderseitige“ wesenswichtige Dreieck AOB ist wirklich gerade und hat die Winkel Null, seine Richtung fällt aber nicht etwa mit der x-Axe zusammen, sondern bildet damit den Winkel δ^2, fällt also nur für

Behaftung mit dem Endlichen oder den Winkeln vom Grade δ damit zusammen. Es ist mit dieser Geradlinigkeit dieses beiderseitigen Dreiecks nicht gesagt, dafs alle vorstellbaren Punkte der Kurve zwischen A und B etwa bei jeder Weitenbehaftung auf einer Geraden liegen, es könnte ja sein, dafs noch zwischen A und O Punkte der Kurve mit Abständen vom Grade δ^2 oder δ^3 etc. und entsprechende wesenswichtige Dreiecke höherer Ordnung vorstellbar wären (unsere Figur 37 zeigt die Kurve abweichend von der Geraden AB, doch erlaubt dies keinen Schlufs, weil sie ja nur im Endlichen andeutungsweise gezeichnet ist).

Man könnte hieraus auch die Inflexionsregel aufstellen mit der Bedingung, dafs das beiderseitige wesenswichtige Dreieck mit δ-Seiten für diesen Punkt flach würde, doch müssen wir erst sehen, wie sich alles bei der Kurve $y = x^4$ gestaltet.

Es wird hierfür das gemischte Differential $dy = (x \pm dx)^4 - x^4 = \pm 4x^3dx + 6x^2dx^2 \pm 6xdx^3 + dx^4$. Dies wird für $x = 0$ zur positiven Gröfse vom Grad δ^4; das erste charakteristische Dreieck hat den Winkel vom Grade δ^3; das beiderseitige wesenswichtige Dreieck ist als flach anzusehen, wenn man davon verlangt, dafs es die Höhe δ^2 habe. Man kann sich aber wohl ein solches vorstellen, dessen gröfste Seite parallel zur x-Axe im Abstande dx^4 oberhalb des Nullpunktes liegt. Die allgemeine Bedingung für Maximum oder Minimum, dafs das bisherige Differential d^2y Null wird, reicht hier nicht aus, weil auch d^3y für $x = 0$ zu Null wird. Die Regel aber, dafs ein Maximum und nicht Inflexion eintritt, wenn der erste vorhandene Differentialquotient, hier $y^{IV} = 24$, vom geraden Grade ist, findet für uns in der Anschauung seinen Ausdruck darin, dafs der Winkel des zum Nullpunkte gehörigen wesenswichtigen Dreiecks vom ungeraden Grade oder die Höhe desselben vom graden Grade, hier vom vierten ist. Das bisherige dritte Differential $d^3y = 6\,dx^3$ ist konstant, was für die bisherige Regel der Inflexion entscheidend war. Sehen wir zu, wie es mit den gemischten dritten Differentialen steht!

Die Anschauung der gemischten Differentiale am Beispiele $y = x^3$.

Durch Rechnung wird das erste Differential einer Funktion $f(x)$ gebildet, indem man in dieser Form x um dx vermehrt und von der so gebildeten Form die ursprüngliche Funktion abzieht, also für die

Funktion $y = f(x) = x^3$ bildet $(x + dx)^3 - x^3$. Man nennt zwar in der höheren Mathematik nicht diesen Ausdruck, in dem dx eine unendlichkleine Gröfse ersten Grades, also dx^2 eine solche zweiten Grades vorstellt, das erste Differential von x^3, sondern diesen Namen bekommt es erst dann, wenn man die Glieder mit dx^2 und dx^3 als Null behandelt oder wie man sagt, zur Grenze übergeht, das Verhältnis der Gröfsen dy und dx in dem Augenblick — wie Newtom sagt — betrachtet, wo sie verschwinden. Wiewohl dies zu den richtigen Resultaten führt, haben wir die Vorstellung von unendlichkleinen Gröfsen verschiedener Grade vorgezogen und auch eine Summe aus Gliedern verschiedener Weitenbehaftungen gelten lassen. Auch den Raum, ja sogar dieselbe Gerade haben wir mit Strecken verschiedener Weitengebiete behaftet. Für jene Form wie $(x + dx)^3 - x^3$ wählten wir dann den Ausdruck Differential mit gemischter Weitenbehaftung oder gemischtes erstes Differential und wollen nun zum Unterschiede hierfür schreiben Dy, während dy das (bisherige) Differential mit einer (erster) Weitenbehaftung ist. Um D^2y zu bilden müssen wir die Form Dy schreiben, aber darin stets statt x setzen $x + dx$, und davon dann die bisherige Form Dy mit x abziehen. Endlich bilden wir D^3y, indem wir in diesem D^2y stets für x setzen $x + dx$ und davon dann wieder das D^2y abziehen. Es ist also $D^2y = (x + dx + dx)^3 - (x + dx)^3 - ([x + dx]^3 - x^3)$ und $D^3y = (x + 3\,dx)^3 - (x + 2\,dx)^3 - (x + 2\,dx)^3 + (x + dx)^3 - [(x + 2dx)^3 - (x + dx)^3 - (x + dx)^3 + x^3]$. Dies giebt bei unserer Kurve nur das Glied $6dx^3$, stimmt also in diesem Falle mit d^3y überein.

Übersicht.

$$y = x^3.$$

$Dy = 3\,x^2\,dx + 3x \cdot dx^2 + dx^3$	$dy = 3\,x^2 \cdot dx$
$D^2y = 6\,x \cdot dx^2 + 6 \cdot dx^3$	$d^2y = 6\,x \cdot dx^2$
$D^3y = 6 \cdot dx^3$	$d^3y = 6 \cdot dx^3$.

Verfolgt man dieselbe Bildung in der Figur, so hat man für die Abscisse eines endlichen Wertes x den Kurvenpunkt A (Figur 38) und von da aus zu legen parallel zur x-Axe die Strecke $dx = AB_1 = B_1C_1 = C_1D_1$. Die zugehörigen Ordinaten sind $f(x)$, $f(x + dx)$, $f(x + 2dx)$, $f(x + 3dx)$ und reichen bis zu den Kurvenpunkten A,B,C,D. Dann ist $B_1B = Dy, CC_3 = (x + 2dx)^3 - (x + dx)^3$, also da $C_3C_4 = Dy = (x + dx)^3 - dx^3$, so $C_4C = D^2y$; endlich $DD_3 = (x + 3\,dx)^3 - (x + 2\,dx)^3$. Nun ist, wenn D_4 durch Verlängerung von BC entstanden ist, $D_4D_3 = D^2y + Dy$. Zieht man dies von DD_3 ab, so mufs gemäfs des Ausdruckes für D^3y (siehe oben) D^3y sein $= -(x + 2\,dx)^3$

$+ (x + dx)^3 + Dy + DD_4$. Also unter Benutzung von $- (x + 2\,dx)^3 + (x + dx)^3 = - D^2y - Dy$ wird $DD_4 = D^3y + D^2y$. Es ist also leicht Dy, D^2y und D^3y in der Figur an verschiedenen Stellen zu finden.

Betrachten wir nun die aus drei unendlichnahen Punkten gebildeten wesenswichtigen Dreiecke! Weil CC_4 nach Konstruktion $= 2\,BB_2$, so ist die vermittelnde Höhe des Dreiecks ABC gleich $\frac{1}{2}\,D^2y$ und diejenige des nächsten Dreiecks BCD gleich $\frac{1}{2}\,(D^2y + D^3y)$.

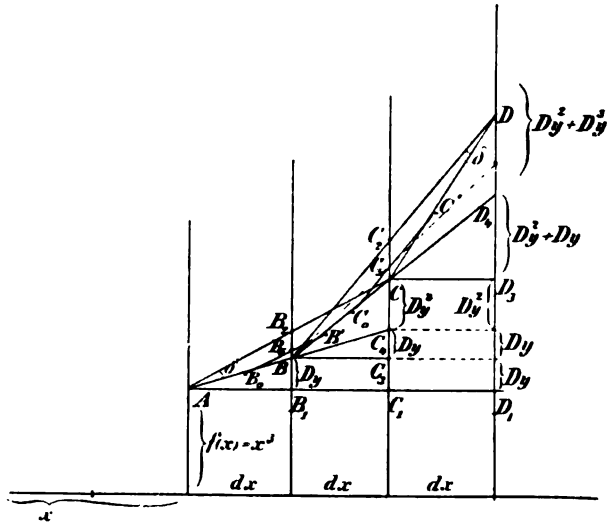


Fig. 38.

Diese beiden Dreiecke haben Winkel vom Grade δ und sind erster Ordnung. Trägt man aber von $BB_2 = 3\,x \cdot dx^2 + 3\,dx^3$ die Gröfse $3\,dx^3$ ab und legt eine Parallele zu AC, welche die Kurve in B_0 und B′ schneiden möge, so ist in diesem Dreiecke die Höhe vom Grade δ^3. Ebenso hat das Dreieck $C_0\,CC'$ die Höhe $6\,dx^3$, während $C_5C_2 = 3\,x\,dx^2$, also ebensogrofs wie B_5B_2 wird. Verlängert man nun noch Linien wie AB_5 und BC_5, so werden dadurch auf den folgenden Ordinaten CC_4 und DD_4 in d^2y und D^3y bez. d^2y und $2\,D^3y$ zerschnitten.

Betrachten wir nun (Figur 39) die gemischten Differentiale für die sich an den Nullpunkt anschliefsenden Dreiecke und dx-Strecken, so erkennen wir leicht, dafs $B_1B = dx^3$, ebenso C_1C_3, C_3C_4; C_4C aber wird, da $x = 0$, zu $D^2y = 6\,dx^3$ und D_4D zu $12\,dx^3 = 2\,D^2y = 2\,D^3y$. Die Höhen der wesenswichtigen Dreiecke $BB_2 = 3\,dx^3$ und $CC_2 = 6\,dx^3$ sind vom Grade δ^3, also sind die Winkel dieser Dreiecke vom Grade δ^2, während an den übrigen Stellen, wo x nicht gleich Null, diese Winkel vom ersten Grade sind. Während die beiden ersten

nur je einer Weitenbehaftung angehörigen Differentiale dy, d^2y oder besser, da dies hier kein Gegensatz, nur derjenigen Weitenbehaftung angehörigen, deren Höhe die Höhe des Differentiales angiebt (beim zweiten der zweiten Behaftung), hier $= 0$ sind, sind die gemischten Differentiale Dy und D^2y hier zwar nicht mehr von gemischter Weitenbehaftung, aber vom Grade δ^3. Die Höhe des ersten wesenswichtigen Dreiecks ist hier gleich $\frac{1}{2} d^3y$ und die Höhe des zweiten für das Grenzgebiet des Punktes Null $= D^2y = D^3y = d^3y$ usw.

Es liefse sich der Versuch machen mit Hilfe der Anschauungen dieses Abschnittes auch den sogenannten Taylorschen Satz aus der Figur abzulesen, der arithmetisch abgeleitet zu werden pflegt, aber als gemischtes Differential betrachtet werden kann. Doch führte mich das über die Absichten dieser Schrift hinaus. Wir wollen noch die

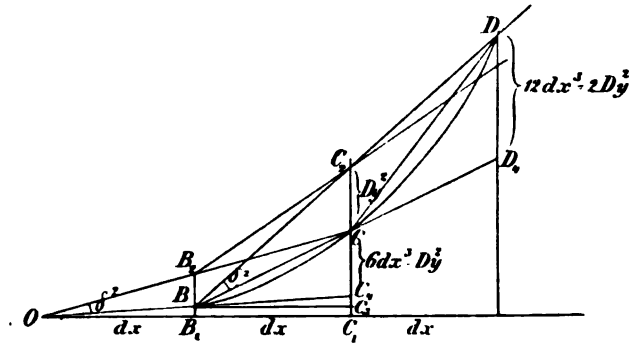


Fig 39.

bei unseren Betrachtungen mehrfach aufgetauchten Fragen der innigen Berührung durch Anschauung des Unendlichen verschiedenen Grades und das wesenswichtige Dreieck kurz zu beantworten suchen.

Berührung und Anschmiegung.

Man kann nicht davon sprechen, dafs eine Gerade, welche eine andere schneidet, dieselbe berühre oder sich an sie anschmiege. Auch wenn der von beiden gebildete Winkel sehr klein wird, kann man nicht sagen, die eine schmiege sich mehr als vorher an die andere an. Stellt man $y = \delta \cdot x$ die Geichung einer Geraden vor, so bedeutet δ oder $tan\ \alpha$ die unendlichkleine Tangente des von ihr mit der x-Axe gebildeten Winkels, der also auch unendlichklein ist. Irgend ein Lot auf x, welches diese Gerade schneidet, ist unendlichklein vom zweiten Grade, wenn es vom Null- oder Schnittpunkte den

Abstand δ hat, unendlichklein, wenn es einen endlichen Abstand hat und erst endlich, wenn es in unendlicher Entfernung liegt. Behaftet man die Dimension der y-Axe nur mit dem endlichen und die der x-Axe nicht über das Endliche hinaus, so fällt diese Gerade mit der x-Axe zusammen. Für entsprechende oder beliebige Behaftungen aber hat sie nur den Schnittpunkt gemeinsam; von Anschmiegen zu reden hätte keinen Zweck, sie entfernt sich immer mehr von der x-Axe, je weiter man vom Nullpunkt fortrückt.

Die Gerade $y = \delta^2 \cdot x$ hat für endliche x-Werte natürlich y-Werte vom Grade δ^2, für unendlichkleine Entfernungen vom Nullpunkte in der Richtung der x-Axe aber die Ordinate vom Grade δ^3; also hat das charakteristische Dreieck den Winkel δ^2, den diese Gerade mit der x-Axe bildet. So kann eine Gerade zwar Winkel von immer niedrigerer Behaftung mit einer anderen bilden, doch werden wir nie von Berührung sprechen, und selbst, wenn sie den Winkel Null bildet, berührt sie nicht etwa, schmiegt sich auch nicht eng an, sondern fällt einfach mit der anderen zusammen für jede Behaftung.

Wie steht es nun mit der Berührung einer Geraden und einer Kurve? Wir sahen, daſs z. B. eine Kurve wie $y = x^3$ (Figur 37) im Nullpunkt einen Wendepunkt besitzt. Das im Nullpunkte beginnende charakteristische Dreieck dieser Kurve mit der Abscisse vom Grade δ hat die Ordinate (oder andere Kathete) vom Grade $y = \delta^3$, also den Winkel δ^2. Mit dem charakteristischen Dreiecke der Geraden $y = \delta \cdot x$ fällt es nicht zusammen, wohl aber mit dem der Geraden $y = \delta^2 x$. Man kann behaupten, daſs hier die Gerade die Kurve berührte. Der Mathematiker nennt (nach Lagrange) die Berührung zweier Kurven eine solche ersten Grades, wenn sowohl die Funktionen wie auch die ersten (bisherigen) Differentialquotienten für die betreffende Stelle gleich sind. In unserem Falle wären die Funktionen $y = \delta^2 \cdot x$ und $y = x^3$ gleich für $x = \delta$ oder $x = 0$, die Gröſsen $y' = \delta^2$ und $y' = 3x^2$ wären gleich, wenn man x gleich 0 setzt und gleichzeitig auch $\delta^2 = 0$, also nicht bis zur Behaftung mit dem Unendlichkleinen zweiten Grades hinabgeht. Das von mir im Früheren lieber verwendete gemischte Differential hätte für $y = \delta^2 x$ die Gröſse $Dy = \delta^2 (x + \delta) - \delta^2 x = \delta^3$ und für $y = x^3$ die Gröſse $Dy = 3 x^2 \delta + 3 x \delta^2 + \delta^3$; und diese Differentiale stimmten völlig überein, wenn man $x = 0$ setzt, also das charakteristische Dreieck im Nullpunkte anfangen läſst. Das gemischte Differential zeigt also diesen ersten Grad der Berührung genauer an als das bisherige.

Kann man behaupten, daſs die Kurve $y = x^3$ und die Grade $y = \delta^2 \cdot x$ noch mehr Punkte als irgend zwei unendlichnahe in dem Grenz-

gebiete des Nullpunktes gemeinsam hätten, also vielleicht die unendlichkleine Strecke (Hypotenuse vom Grade δ des charakteristischen Dreieckes)?

Für $x = \delta^2$ ergäbe sich bei dieser Geraden $x = \delta^4$, bei der Kurve $y = \delta^6$, also nicht ein Zusammenfallen dieser um δ^2 von einander entfernten Punkte beider Kurven, falls man noch mit dem Unendlichkleinen vom fünften oder sechsten Grade behaftet; bei Behaftungen bis zum vierten Grade in der y-Dimension allerdings würden beide Werte zusammenfallen. Also wieder sehen wir, daſs ein Zusammenfallen der kleinen Stücke beider Linien nur ausgesprochen werden kann für gewisse Behaftungen, nicht allgemein für beliebige Behaftungen. Man darf nur sagen: bei gewissen Behaftungen hat die Kurve mit dieser berührenden Geraden eine Strecke von einem gewissen Grade gemeinsam, im allgemeinen nur zwei gewisse Punkte.

Kann man behaupten, es schmiege sich die Gerade $y = \delta^3 x$ enger an die Kurve $y = x^3$ als die Gerade $y = \delta^2 x$, weil sie einen kleineren Winkel mit der x-Axe bildet als diese? Die Betrachtungen hierfür sind ganz ähnlich. Nach bisherigem Gebrauche würde man sagen, die ersten Differentialquotienten y' seinen δ^3 und $3x^2$; sie würden genau genommen nicht gleich sein für $x = \delta$, sondern die gemischten Differentiale wären gleich im Grenzgebiete des endlichen Nullpunktes für $x = \sqrt{\delta^3}$, nicht für eine andere Behaftung. So kann man fortfahren für die Gerade $y = \delta^4 x$ usw. Immer fallen gewisse Punkte der Kurve und der Geraden im Grenzgebiete des endlichen Nullpunktes zusammen, deren Entfernung eine sich nach dem Winkel der Geraden richtende Behaftung hat, und das zwischen ihnen liegende Stückchen der beiden Linien fällt nur zusammen bei Anwendung gewisser Behaftungen, niemals aber bei Anwendung beliebiger Grade von Behaftungen auf beide Linien. Man kann auch bei der Kurve vom wesenswichtigen Dreiecke sprechen und sagen, daſs dasselbe für gewisse Behaftungen platt wird und mit einem Stücke der Geraden zummenfällt, also die Kurve mit der Tangente eine Berührungsstrecke für gewisse Behaftungen gemeinsam habe. Die Innigkeit dieser Berührung erstreckt sich aber stets nur auf die Vorstellung dieses flachen wesenswichtigen Dreiecks, niemals aber auf ein Zusammenfallen eines wesenswichtigen Dreieckes mit vorgestellter Höhe und einer Strecke der Berührenden. Auch wenn zwei Kurven für einen endlichen Punkt eine Tangente gemeinsam haben, decken sich nicht die beiden wesenswichtigen Dreiecke der Kurven an dieser Stelle, falls man deren Höhe mit berücksichtigt, von deren Behaftung nicht absieht.

Ich habe bisher eine eigentümliche Art von Kurve gewählt; das gemischte Differential zeigte dann für den Nullpunkt jene völlige Übereinstimmung mit dem ersten Differential der Geraden; bei anderen Kurven oder an anderer Stelle jener Kurve wird nicht das gemischte Differential vollständig mit dem Differential einer daselbst berührenden Geraden übereinstimmen, sondern nur für bestimmte Behaftung, für bestimmte Glieder dieses gemischten Differentials, nämlich dann, wenn aus dem gemischten das bisher immer so genannte erste Differential entsteht. Die bisherige Ausdrucksweise ist also für diesen Fall ganz praktisch, doch ist auch das gemischte brauchbar, sobald wir es nur in jener bestimmten Art behaften und die anderen Behaftungen weglassen; und dies zeigt uns wieder mit besonderer Klarheit, daſs von einer Berührung mit einer Geraden nur bei bestimmter Behaftung die Rede ist, und daſs zwei Punkte gewisser Entfernung der Geraden und der Kurve gemeinsam sind.

Von einer Anschmiegung werden wir nur sprechen, wenn es sich um drei Punkte beider Linien handelt, die man Grund hat als drei von einander zu unterscheiden; und dieser Grund liegt darin, daſs sie nicht in eine flache Strecke fallen, sondern bei hinreichend genauer Behaftung ein wesenswichtiges Dreieck mit gewisser Seiten- und Winkel- und also auch Höhenbehaftung bilden.

Berühren sich zwei verschiedene Kurven, so werden sie für beliebige Behaftungen oder Weitengebiete in einem Stücke ihres Verlaufes überhaupt nicht völlig zusammenfallen, mag man sich dieses Stückchen auch so klein vorstellen, wie man wolle. Selbst zwei Kreise (die nicht geradezu denselben Radius haben, also identisch sind) können an einer Berührungsstelle keinen krummen Kurventeil gemeinsam haben, auch keinen unendlichkleinen, falls man jede Weitenbehaftung zuläſst. Kurven verschiedener Art können die drei Punkte eines wesenswichtigen Dreiecks gemeinsam haben, z. B. kann der Krümmungskreis durch drei unendlichnahe Punkte einer andersartigen Kurve gehen, aber damit ist keineswegs gesagt, daſs das zwischen den drei Punkten liegende Stück jeder Kurve für seine Unterscheidungen niedriger Weitenbehaftungen zusammenfiele!

Wendet man auf die Betrachtung von Kurven irgend welche und alle Weitenbehaftungen an, und fällt dann ein einziges Stückchen irgendwelchen Grades völlig zusammen z. B. von unendlichkleiner Länge zweiten Grades, so müſsten daselbst auch die angrenzenden Stückchen zusammenfallen und schlieſslich die ganze Kurve; freilich ist dabei vorausgesetzt, daſs jenes Stückchen auch im Untersinnlich-

vorstellbaren noch krumm sein soll und zwar nach denselben Gesetzen wie die Kurven im Endlichen. Dann können solche untersinnlich-vorstellbare Stückchen verschiedener Kurven nicht zusammenfallen (wohl aber thun sie dies unter einer Betrachtung, bei der man gewisse Weitenbehaftungen ausschliefst).

Bei der Anschmiegung zweier Kurven aneinander kommt es sowohl auf die Art der Kurven als auch auf die Stelle an, an der sie sich aneinander anschmiegen sollen. Der Kreis z. B. schmiegt sich, wie wir sahen, an verschiedene Stellen einer Kurve $y = x^2$ nur an, wenn er je nach der Stelle einen verschiedenen Radius hat. Bei Kurven mit Inflexion ist das besonders auffällig, es fragt sich, ob z. B. bei der Kurve $y = x^3$ für die Stelle des endlichen Nullpunktes sich irgend eine Kurve anschmiegen kann (also ein wesenswichtiges Dreieck gemeinsam haben kann) oder nur eine Gerade daselbst berührt (charakteristisches Dreieck). Dabei kommt es offenbar auf die Anwendung verschiedener Weitenbehaftungen an. Läfst man Behaftungen des Unendlichkleinen höheren Grades zu, so wird die Anschmiegung eine engere sein können, falls es bei beiden Kurven möglich ist d. h. solche wesenswichtigen Dreiecke höherer Ordnung bei beiden an der betreffenden Stelle vorstellbar sind und zusammenfallen können.

Es steht jederzeit frei bei einer kontinuierlichen (mit allen Weitenbehaftungen vorgestellten) Kurve sich drei Punkte vorzustellen, die unendlichkleine Entfernungen ersten oder zweiten usw. Grades haben, also auch entsprechende wesenswichtige Dreiecke. Es ist aber nicht dem Belieben anheimgestellt, ob solche Dreiecke Winkel von dem Grade δ oder δ^2 etc. und dementsprechende Höhen haben (vergleiche die Untersuchung der Nullstelle bei den Kurven mit Inflexion $y = x^3$, $y = x^5$ und den Kurven $y = x^2$, $y = x^4$ usw.!). Giebt es nun bei der betreffenden Kurve das zweite Differential oder kommen beim gemischten ersten Differentiale für die betreffende Stelle der Kurve (einen bestimmten x-Wert) unendlichkleine Gröfsen zweiten Grades vor, so können in dem Dreiecke Winkel vom Grade δ vorgestellt werden, sonst aber auch Winkel vom Grade δ^2 und Höhen vom Grade δ^3 oder auch Seiten vom Grade δ^2, bei Höhen vom Grade δ^3 und Winkeln vom Grade δ u. s. f. Auch Zwischenbehaftungen können (z. B. beim Kreise) vorkommen.

In der höheren Mathematik sagt man, zwei Kurven hätten eine Berührung zweiten Grades, wenn aufser dem Werte für x und y die ersten und die zweiten Differentialquotienten übereinstimmen; entsprechend geht die Anschmiegung bis zum dritten Grade, wenn auch noch die dritten Differentialquotienten für den speziellen Punkt der

Berührung übereinstimmen usw. Überlegt man hiernach, mit welcher Innigkeit sich die Kurven (Figur 37) $y = x^2$ und $Y = x^4$ im Nullpunkte aneinander schmiegen, so hat man auszurechnen $y' = 2x$ und $Y' = 4x^3$, $y'' = 2$ und $Y'' = 12x^2$. Für $x = 0$ sind also nur die ersten Differentialquotienten gleich, die zweiten nicht mehr, von Anschmiegen kann keine Rede sein, sondern nur von einer Berührung ersten Grades wie durch eine Tangente. Nach unserer Anschauung giebt es dort ein wesenswichtiges Dreieck mit der Höhe δ^2 bei den Seiten δ für die erstere, und es ist das erste sich an den Nullpunkt anschliefsende wesenswichtige Dreieck von $Y = x^4$ behaftet mit der Höhe vom Grade δ^4 und dem Winkel vom Grade δ^3. Diese beiden Dreiecke mit ihren drei Punkten decken sich also nicht, falls man mit der Anwendung der Behaftungen weit genug geht (und wir wollten doch beliebig weit gehen dürfen).

Für die Kurven $y = x^2$ und $Y = x^3$ geht die Übereinstimmung der Differentialquotienten ebenfalls nicht weiter, und es sind nach unserer Anschauung die Winkel des Dreiecks δ und δ^2; darum keine Anschmiegung. Bei $y = x^3$ und $Y = x^4$ ergiebt sich $y' = 3x^2$ und $Y' = 4x^3$, $y'' = 6x$ und $Y'' = 12x^2$, $y''' = 6$ und $Y''' = 24x$, $y^{IV} = 0$ $Y^{IV} = 24$. Also stimmen für $x = 0$ noch die zweiten Differentialquotienten überein, die Berührung sollte eigentlich gehen bis zum zweiten Grade oder eine Anschmiegung da sein (und doch ein Schnitt genau im Nullpunkte!). Aber das erste sich an den Nullpunkt anschliefsende wesenswichtige Dreieck mit der Seite δ hat den Winkel δ^2 bez. δ^3. Die drei Punkte können also nicht zusammenfallen, wenn man beliebigweit geht in der Anwendung der Behaftungen. So kann man fortfahren mit den Kurven $y = x^3$ und Y oder $y = x^5$ usw.

Wenden wir Differentiale mit gemischter Weitenbehaftung an, so finden wir z. B. das gemischte erste und zweite Differential von $y = x^3$ und $Y = x^4$ nach dem Abschnitte über die Inflexion und das Maximum bei solchen Kurven und sehen durch den Grad der unendlichkleinen Gröfsen dasselbe über das Nichtvorhandensein einer Anschmiegung ein wie durch die Anschauung der Winkelbehaftung.

Wählen wir nun ein Beispiel, bei dem die ersten Differentialquotienten für einen gemeinsamen endlichen Punkt nicht Null werden!

Es haben die beiden Kurven $y = \sqrt{9x}$ und $Y_1 = \frac{2}{5} + \frac{15}{16}x - \frac{x^8}{256}$ den Punkt $x = 4$, $y = 6$ gemeinsam; denn beide Gleichungen ergeben für $x = 4$ den Wert $y = 6$. Sucht man nach den gewöhnlichen Methoden des Differenzierens die Differentialquotienten (die

nicht gemischten), so erhält man $y' = \frac{3}{2\sqrt{x}}$ und $Y_1' = \frac{15}{16} - \frac{3}{256}x^2$; beide geben für $x = 4$ den Wert $\frac{3}{4}$. Und man erhält $y'' = -\frac{3}{4\sqrt{x^3}}$ und $Y_1'' = -\frac{3}{128}x$, in beiden Fällen $= -\frac{3}{32}$. Es wird Y_1''' konstant $= -\frac{3}{128}$ und nicht gleich dem positiv werdenden y'''. Man hat es hier also mit einer Berührung zweiten Grades oder einer Anschmiegung zu thun.

Die genannte parabolische Kurve hat die Form $Y_1 = a + bx + cx^3$, wobei a, b und c die genannten Zahlenwerte haben müssen, damit diese Kurve die innigste Berührung, deren sie überhaupt ihr gegenüber fähig ist, mit der Parabel gerade im Punkte $x = 4$, $y = 6$ eingeht. Es ist nicht schwer diese Zahlenwerte $a = \frac{5}{2}$, $b = 1\frac{5}{16}$, $c = -\frac{1}{256}$ zu finden, wenn man sie nicht weifs und nur die Form $Y_1 = a + bx + cx^3$, die Parabel $y^2 = 9x$ und den Punkt derselben $x = 4$ im Auge hat.

Wir wollen eine ähnliche parabolische Kurve, welche einer innigeren Berührung fähig ist, nämlich $Y_2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ ins Auge fassen und uns vornehmen, dafs sie die Parabel $y = \sqrt{9x}$, die einer solchen innigeren Berührung ihrer Form nach jedenfalls fähig ist (man bilde die Differentialquotienten!), im Punkte $x = 4$, $y = 6$ mit möglichster Innigkeit berührt. Die Differentialquotienten sind $y' = \frac{3}{2\sqrt{x}}$ und $Y_2' = b + 2cx + 3dx^2$, $y'' = -\frac{3}{4\sqrt{x^3}}$ und $Y_2'' = 2c + 6d \cdot x$, $y_2''' = \frac{27}{8}\frac{1}{\sqrt{x}}$ und $Y_2''' = 6d$. Endlich würden $y^{IV} = \frac{27}{16}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ und $Y_2^{IV} = 0$. Wenn die möglichst innige Berührung stattfinden soll, so müssen stets die gleichhohen Differentialquotienten beider Funktionen gleichgesetzt werden, soweit es überhaupt geht und da man die Berührung speziell für den Punkt $x = 4$ wünscht, so ist zu setzen erstens $y = 6 = a + bx + cx^2 + dx^3 = a + 4b + 16c + 64d$, zweitens $\frac{3}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{4} = b + 2cx + 3dx^2 = b + 8c + 48d$, drittens $-\frac{3}{32} = -\frac{3}{4\sqrt{x^3}} = 2c + 24d$, viertens $\frac{27}{8}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{27}{16} = 6d$. Endlich $y^{IV} = Y_2^{IV} = \frac{27}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} = 0$ ist für $x = 4$ unmöglich. Aus der vierten Gleichung folgt $d = \frac{9}{32}$, dann aus der dritten $c = -\frac{219}{64}$, endlich $b = \frac{117}{8}$ und $a = -\frac{63}{4}$, sodafs die parabolische Kurve lauten würde $Y_2 = -\frac{63}{4} + \frac{117}{8}x - \frac{219}{64}x^2 + \frac{9}{32}x^3$.

Da die Funktion und die drei ersten Differentialpuotienten für jenen Punkt $x = 4$ bei diesen beiden Kurven übereinstimmen, so gehen dieselben nach der bekannten Regel der höheren Mathematik eine Berührung dritten Grades ein, während die Kurve $Y_1 = \frac{5}{2} + \frac{15}{16}x - \frac{x^2}{256}$ mit derselben Parabel $y = \sqrt{9x}$ im selben Punkte nur eine Berührung zweiten Grades bildet. Wie können wir dies durch die Anschauung verstehen, verfolgen und erkennen und was für Aufschluſs geben uns die gemischten Differentiale hierüber?

Bildet man die letzteren, indem man für x setzt $x + dx$ und von der so gebildeten Funktion die Funktion mit x abzieht, so erhält man $DY_1 = \frac{3}{4}dx - \frac{3}{64}dx^2 - \frac{1}{256}dx^3$, für den Wert $x = 4$. Entsprechend ist $DY_2 = \frac{3}{4}dx - \frac{3}{64}dx^2 + \frac{9}{32}dx^3$.

Der Taylor'sche Lehrsatz lautet bekanntlich

$$dy = y' \cdot dx + y'' \frac{dx^2}{1.2} + y''' \cdot \frac{dx^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Vergleichen wir die Faktoren der obigen gemischten Differentiale mit den früher angegebenen Differentialquotienten, so sehen wir in der That, daſs der Faktor $-\frac{3}{64}$ die Hälfte des zweiten Differentials und der Faktor $-\frac{1}{256}$ beziehlich $+\frac{9}{32}$ der sechste Teil der Differentiale d^3Y_1 beziehlich d^3Y_2 ist.

Bildet man endlich mittels des Taylorschen Lehrsatzes, der auch für diese Funktion als erwiesen vorausgesetzt werde, dy für $y = 3\sqrt{x}$, so hat man $dy = \frac{3}{4}dx - \frac{3}{64}dx^2 + \frac{9}{32}dx^3 - \ldots\ldots$, nach unseren Betrachtungen besser zu schreiben als Dy. Wir werden diese Reihe auch für die Funktion $y = \sqrt{9x}$ als erstes gemischtes Differential bezeichnen dürfen und annehmen, daſs in der Anschauung in der That die Gröſse dy oder $f(x + dx) - f(x)$ bei dieser Parabel vorstellbar ist als behaftet mit diesen verschiedenen Weitengebieten, welche für diese Kurve und bei der Wahl eines unendlichkleinen Zuwachses von x beliebigweit fortgesetzt werden können.

Dy stimmt nun bis zum Gliede mit dx^3 überein mit Dy_2, aber nur bis zum Gliede mit dx^2 überein mit Dy_1. Wir werden also die engere Anschmiegung zwischen den Kurven y und Y_2 weniger in der Übereinstimmung der ersten drei Differentialquotienten als in der Übereinstimmung dieser Glieder der Taylorschen Reihe oder des gemischten Differentials sehen und in der Figur suchen (obwohl natürlich jenes Kriterium der höheren Mathematik richtig bleibt).

Wir haben mehrfach erste, zweite und auch dritte Differentiale in der Veranschaulichung der wesenswichtigen Dreiecke als Streckchen mit entsprechender Weitenbehaftung herausgelesen, auch bei den Betrachtungen über Inflexion gesehen, daſs zur Anschmiegung eine gewisse Übereinstimmung von Winkeln und Seiten der wesenswichtigen Dreiecke gehört. Die Übereinstimmung oder das Zusammenfallen der entsprechenden Streckchen geht bei der Anschmiegung verschiedener Kurven verschieden weit, indem man gewisse Linien und Winkel bei Anwendung von Behaftung bis zu bestimmten Graden sich als völlig zusammenfallend vorstellen kann. Wendet man freilich noch niedrigere Weitenbehaftungen an, z. B. bei y und Y_1 noch die dritten Grades, so hat man sich kein vollständiges Zusammenfallen der entsprechenden Figuren vorzustellen, indem diese Übereinstimmung dann nur bis zur Behaftung mit δ^2 geht. Wir sehen wieder, wie immer, daſs es bei allen räumlichen Vorstellungen immer nur Sinn hat das Bestehen dieser Vorstellungen für die Anwendung bestimmter Weitenbehaftungen anzuerkennen. Auch die Anschmiegungen haben keinen absoluten, sondern nur diesen relativen Sinn. Deshalb aber darf man nicht etwa daran verzweifeln sich solche Anschmiegungen verschiedener Ordnung völlig klar vorzustellen (durch Anschauung im Untersinnlichvorstellbaren), man ist nicht gezwungen sich bei den sogenannten Grenzbegriffen zu beruhigen und das Dunkel der Differentiale bestehen zu lassen.

Viel, sehr viel ist hier noch zu fragen und zu untersuchen. Da z. B. bei der Wahl von x als unabhängiger Variabelen, also bei Bildung des Fortschrittes dx in der Behaftung δ und bei wesenswichtigen Dreiecken, die auf solche Weise entstehen, die Ordinaten für die Parabel $y = \sqrt{9x}$ immer weiterlaufende Weitenbehaftungen zeigen, bei den Ordinaten für die Kurven Y_1 und Y_2 diese Behaftungen aber nur bis δ^3 gehen, so könnte man fragen: wie steht es denn bei Vertauschung der Koordinatenaxen? Ist y die unabhängige, so heiſst die Parabel $x = 1/9y^2$; und wenn man hier um dy wachsen läſst, also entsprechende wesenswichtige Dreiecke bildet, so gehen die Behaftungen auf den Höhen dieser Dreiecke nur bis δ^2. Und doch ist es an sich dieselbe Parabel. Ist sie im selben Punkte $x = 4$, $y = 6$ etwa nicht fähig eine Anschmiegung bis δ^3 mit der Kurve Y_2 einzugehen? Die Gleichung für Y_2 ist zur Bildung der Differentiale oder des Taylorschen Satzes natürlich nun auch zu bringen auf die Form $x = f(y)$; diese Funktion enthält dann Wurzeln. Und während jetzt für die Parabel y nur die ersten Differentialquotienten existieren, hat Y_2 viele.

Zeichnet man die drei Kurven, indem man z. B. die Zahlenwerte von y für $x = 0, 1, 2, 3, 4$ und 5 ausrechnet, so müssen diese Punkte und der Zug der Kurven zwischen ihnen ganz ebenso bleiben, ob man nun die x-Axe oder die y-Axe mit der Vorstellung der unabhängigen Veränderung behaftet. Das Kriterium der Anschmiegung besteht auch nicht in der Gröfse der Differentialquotienten, sondern in deren Übereinstimmung. Sollten aber dann die wesenswichtigen Dreiecke, in denen wir uns doch die Anschmiegung veranschaulichen wollten, so ganz andere sein dürfen?

So ganz andere sind sie nicht. Zwar sehen sie recht anders aus, wenn man sie bildet, indem man auf der x-Axe Stücke von der Gröfse dx (also der Behaftung δ^1) hinter einander abträgt und die betreffenden Ordinaten bis zu den Schnitten mit der Kurve zeichnet, als wenn man auf der y-Axe Stücke dy vom Grade δ^1 abträgt und nun durch deren Endpunkte die Parallelen zur x-Axe bis zu den Kurven zieht. Aber man könnte auch im zweiten Falle zu ganz denselben Figuren gelangen, wenn man nämlich nicht auf der y-Axe Stücke von genau der Behaftung δ^1 abträgt, sondern von solchen Behaftungen, wie sie sich in der Form des gemischten Differentials zeigen z. B. in $DY_3 = \frac{3}{1} dx - \frac{3}{6^1} dx^2 + \frac{3^2}{3^2} dx^3$. Wir sind ja keineswegs gezwungen uns wesenswichtige Dreiecke nur mit Seiten vom Grade δ^1 vorzustellen, dieselben können auch den Grad δ^2 oder δ^3 oder auch einen gemischten Grad von δ, δ^2 und δ^3 haben. Es ist in der Vorstellung stets ein gewisses Belieben gelassen, auf diesem Belieben beruht die Vorstellung ihrem Wesen nach. Man kann also, wenn man die Mühe nicht scheut, durch entsprechende gemischte Behaftung bei Abtragung auf der y-Axe genau auf dieselben untersinnlichvorstellbaren Figuren gelangen, als wenn man auf der x-Axe Stücke vom Grade δ abträgt.

Damit erweitert sich allerdings der Gesichtskreis, in dem die höhere Mathematik liegt, beträchtlich. Es ist nicht ausgeschlossen Differentiale auf ganz andere Art zu bilden als es bisher geschah, nämlich so, dafs man sich von vornherein nicht Zuwachse von der Gröfse δ z. B. dx vorstellt, sondern gleich solche von der Gröfse dx^2 oder dy^2 oder auch solche von mehreren Weitenbehaftungen vermischt. Wird dadurch die Auffassung der Mathematik eine weitere, so ist dies kein Fehler. Ob es aufser dem Vorteile für widerspruchslose Erklärung der Schwierigkeit des Unendlichen noch praktische Vorteile gewähren könnte, das läfst sich nicht sofort im allgemeinen sagen.

Mancherlei einzelne Betrachtungen wären von Interesse z. B. warum der Kreis mit irgend einer ganz beliebigen Kurve nur höchstens eine Berührung zweiten Grades eingehen soll. Es wäre dann die Form des Kreises $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ zu betrachten, zu fragen, was daraus wird bei Vertauschung der Axen, welche Konstanten anders aufzufassen sind, dafs r dasselbe bleibt, wie es kommt, dafs die Aufsuchung eines passenden Kreises, der sich an irgend einer bestimmten Stelle an irgend eine Kurve anschmiegt nur bis y'' beziehlich x'' führt, wie dies mit den drei zu bestimmenden Konstanten zusammenhängt, ob es auch für unendliche Kreise gilt usw. Ich mufs des eigentlichen Zweckes dieses Buches wegen hier darauf verzichten, glaube auch die Integralrechnung nicht hereinziehen zu müssen, und will annehmen, dafs aus den herausgegriffenen Beispielen der Charakter des Unendlichen hinreichend gezeigt ist, soweit ich ihn im Folgenden benutzen mufs.

Geschichtliches über die Auffassung des Unendlichen.

Es ist nicht meine Absicht einen ausführlichen Bericht darüber zu geben, wie die Völker und die Philosophen das Unendliche bisher aufgefafst haben, ebenso wenig sollen die bisherigen Ansichten ausführlich kritisiert werden. Der Zweck des Buches war ja, eine Wesenserklärung zu geben, welche womöglich keine Widersprüche aufweist, also möglich ist. Dabei will ich nicht behaupten, dafs es nicht andere Auffassungen geben könne, die etwa ebenfalls widerspruchsfrei durchzuführen wären; nur scheinen mir die bisher bekannt gewordenen nicht derartige zu sein.

Ich werde nur ganz kurz die Meinungen andeuten, welche mir aus der Geschichte der Philosophie bekannt geworden sind und welche mir beziehlich meiner Ausführungen von Interesse zu sein scheinen. Es wird daraus die grofse Verschiedenheit hervorgehen, und sich übersehen lassen, welche Stellung die Untersuchungen dieser Schrift zu den bisherigen einnehmen, ferner auch, inwiefern die im Folgenden auszuführenden Erklärungen von den bisherigen abweichen.

Bei den alten indischen Völkern nannte man eine Göttin Aditi (die Unbeschränktheit oder Unendlichkeit); sie soll die Morgenröte, das Thor einer unbekannten Welt vorstellen (siehe Max Müller, Vorlesungen über den Ursprung und die Entwicklung der Religionen. Strafsburg 1880). „Aus Aditi Daksha entstand, jedoch aus Daksha Aditi" (Deussen, Allgem. Gesch. der Philosophie, Bd. I. 1). Unter

ἄπειρον, dem Unbegrenzten ist bei Anaximander wahrscheinlich ein unendlich ausgedehnter Stoff gemeint. Andere alte griechische Philosophen (wie Heraklit) glauben an eine unendliche Reihe von Welten, die auf einander folgen. Bei den Atomisten wir der Stoff nicht in das Unendliche teilbar gedacht, aber es giebt unendlichviele und unendlichvielfach gestaltete Atome (vergl. auch Jonas Cohn, Geschichte des Unendlichkeitsproblems, Leipzig 1896). In der Schule der Pythagoreer kannte man die Thatsache der Vorstellung von irrationalen Zahlen (das Fehlen eines gemeinsamen, durch ganze Zahlen oder in Bruchteilen benutzbaren Maſses für z. B. die Hypotenuse und die Katheten 1 und 1). Parmenides erklärte (nach Aristoteles) das Sein für begrenzt. Nach Zeno ist die Bewegung unwirklich wegen der Widersprüche in den Bewegungsproblemen (der fliegende Pfeil, Achilleus; vergl. M. Cantor, Vorles. über die Geschichte der Mathematik; Dühring, kritische Gesch. der Philos.), jedenfalls treffen seine Probleme die Schwierigkeiten der Stetigkeit und beliebigen Teilung sehr gut, wenn er auch kaum ein klares Bewuſstsein von dem Zusammenhange seiner verschiedenen Argumente gehabt hat. Nach ihm muſs auch der Raum, wenn es ihn giebt, wieder in einem Raume sein und so fort bis ins Unendliche. Letzteres hält er für unmöglich, also auch die Existenz des Raumes. In einem Fragment des Demokrit kommt bereits die Schwierigkeit der parallelen Durchschneidungen eines Kegels vor; wären diese Schnitte ungleich, so müsse der Kegel ungleichmäſsig, etwa staffelförmig ansteigen (vergl. Mullach, Fragmenta!) Bei den Versuchen zur Berechnung des Kreises bediente man sich der einbeschriebenen und umschriebenen Vielecke schon im fünften Jahrhundert vor Chr. Geb., und Archimedes wandte zur Kreisberechnung schon eine Annäherungsmethode an. Während bei den Pythagoreern die Ausdrücke begrenzt und unbegrenzt den ungeraden und geraden Zahlen entsprechen, faſst Plato das Unbegrenzte schon als das, was unbegrenzt vermehrt oder vermindert werden kann. Das Weltgebäude ist ihm begrenzt, die Zahl der Ideen unbegrenzt.

Nach Aristoteles kann das Unendliche nicht ein Element der Dinge sein, denn es ist nicht Substanz, sondern nur ein Zustand. Das Unendliche kann man nicht leugnen, denn die Gröſsen sind immer wieder teilbar (Gegensatz zu Demokrit), das Vermögen zu zählen ist unbegrenzt und die Zeit hat keinen Anfang und kein Ende. Aber doch liegen auch in der Annahme des Unendlichen Schwierigkeiten Er macht den bis zum heutigen Tage vielfach wiederholten Unterschied zwischen dem Potentiell- und Aktuell-Unendlichen. Wirklich ist immer nur ein Begrenztes, aber die Reihe dieser Begrenzten, die

verwirklicht werden können, ist unbegrenzt. Das Potentiell-Unendliche ist das, aufserhalb dessen immer noch etwas ist, nicht das, aufserhalb dessen nichts mehr ist. Das Potentiell-Unendliche existiert, das wirklich bis ins Unendliche vollendete Unendliche, aufserhalb dessen nichts mehr existiert, das Aktuell-Unendliche wird geleugnet. (Es fehlt bei dieser Unterscheidung die Annahme, das ein Unendliches gröfser sein könnte als ein Anderes in bestimmtem Verhältnisse, dafs ein Unendliches vorstellbar sei, das gegenüber dem bisherigen Unendlichen wieder unendlich ist usf. das Unendliche höheren Grades. Stellt man sich das vor, so kann das Unendliche ersten Grades z. B. etwas sein, aufserhalb dessen noch etwas ist, also in diesem Sinne etwas Potentiell-Unendliches, und doch ist es nicht das Potentiell-Unendliche des Aristoteles, denn dieses bezeichnet nur die Möglichkeit des unendlichen Fortschreitens, nicht aber eine bestimmte Gröfse, die bestimmte Verhältnisse zu anderen Gröfsen haben kann.) Zu dieser Auffassung des ἄπειρον kommt die des συνεχές, des Stetigen. Der fliegende Pfeil des Zeno sei nicht in jedem Augenblicke ein ruhender; eine Linie könne nicht aus Punkten bestehen, denn wenn Punkte aneinander stiessen, so müfsten sie immer wieder in einen Punkt zusammenfallen; die Ruhe eines Körpers bedeute, dafs er sich eine Zeit lang am selben Orte befinde, was der fliegende Pfeil nie thut; auch die Zeit, die also hierbei in Betracht käme, setze sich nicht aus einzelnen Zeitpunkten (Augenblicken der Gegenwart) zusammen. Wenn aber auch die Zeit aus unendlichvielen Teilchen in Wirklichkeit bestehe, so wäre allerdings jeder Endpunkt eines Teilchens, der zugleich ja Anfangspunkt eines neuen sei, ein Ruhepunkt. (Über diese Schwierigkeit, dafs der fliegende Pfeil auch solche Anfangspunkte oder Endpunkte einnehmen mufs und, da diese Punkte nicht Teile der Bewegung sind, also bald in Ruhe, bald wieder in Bewegung sein müsse, kann man kaum hinwegkommen, wenn man der Ansicht bleibt, dafs Punkte auf einer Linie liegen, auch nur äufserlich, wenn man solchen Punkten eine „Bewegungstendenz“ oder »Intensität“ zuschreibt, wohl aber, wenn man nach den Untersuchungen dieses Buches nur von einer Behaftung mit Punkten spricht, und das Wesen des Punktes dementsprechend erklärt). Aristoteles meint, wenn die unbegrenzte Teilung nur der Möglichkeit nach vorhanden sei, so seien jene Teilpunkte keine Ruhepunkte für den Pfeil, da er über die unendlichvielen möglichen Punkte hinweggleite.

(Wenn aber die Möglichkeit da ist sich bei einem wirklichen, stetigen Gleiten beliebige Teilpunkte zu denken, so wäre gewissermafsen die Bewegung etwas Wirklichstetiges; diese wirkliche Stetig-

keit ist aber ohne irgendwelche Einteilungen nichts Stetiges mehr, man muſs immer die Möglichkeit der Einteilungen bis ins Unendliche hinzuziehen, kann also nicht diese Möglichkeit, die von der Bewegung doch ganz notwendig gebraucht wird, als etwas ganz von der wirklichen Bewegung Verschiedenes auffassen. Vielmehr muſs der Begriff der Bewegung je nach der Art der Behaftung gefasst werden und wird nur dann als die stetige Bewegung gefaſst, wenn Behaftungen aller denkbaren Grade zugelassen werden; dadurch ist das „Mögliche" kein eigentlich Mögliches mehr, wenn die Bewegung selbst mehr als möglich sein soll.)

Nach Lucretius (de rerem natura) besteht die Materie aus Atomen, dies seien letzte, nicht mehr teilbare Körper; denn es gäbe keinen Unterschied zwischen dem Kleinsten und Gröſsten, wenn jedes endliche Stück aus unendlichvielen Teilen bestehe. Der Raum sei unbegrenzt, denn über jede Grenze hinaus müſse die Ausdehnung weiter gehen (wenn dies im Begriffe der Grenze liegt, so kann es im Raume keine letzte Grenze geben: das Aktuell-Unendliche des Aristoteles wäre danach also in der That unmöglich. Dieses Aktuell-Unendliche würde man heute gewissermaſsen das Absolut-Unendliche nennen.) Aristarch von Samos behauptete bekanntlich die Bewegung der Erde um die Sonne und meinte; die Erdbahn sei so klein, im Verhältnis zur Welt der Fixsterne wie der Mittelpunkt der Kugel im Vergleich zur Oberfläche; dies tadelte Archimedes, weil der Punkt keine Gröſse habe, also auch kein Verhältnis zur Oberfläche haben könne.

Den Skeptikern des zweiten Jahrhunderts v. Chr. G. schien ein unendlicher Regressus zu keiner Gewissheit zu führen, da jeder einzelne von den unendlichen Beweisen, die sich immer wieder aufeinander stützen, nur bedingte Gewiſsheit habe (Wahrscheinlichkeitslehre des Karneades).

Wenn man sich unfähig fühlt etwas wie das Unendliche zu begreifen, so ist es natürlich, dasselbe als eine Eigenschaft des Höchsten, über alles Erhabenen aufzufassen. Daher legte man, abweichend vom griechischen Altertume, Gott die Eigenschaft des Unendlichen bei, z. B. bei den Neuplatonikern. Im alten Testamente finden sich einige Stellen, in denen von Gottes Ewigkeit gesprochen wird. Die betreffenden Stellen des Psalmen gehören möglicherweise dem vierten bis zweiten Jahrhundert v. Chr. G. an (z. B. Psalm 90: Du bist von Ewigkeit zu Ewigkeit). Die Unendlichkeit der Materie und die Unendlichkeit Gottes wurden dann unterschieden z. B. vom Neuplatoniker Plotinos (der 244 n. Chr. G. auch in Rom lehrte), indem die der Materie rein negativ, ein Nichts sei, die Gottes aber im höchsten Grade positiv

und erhaben. Origenes lehrt, man könne eine unendliche Anzahl nicht begreifen, auch Gott würde eine unbegrenzte Menge des Geschaffenen nicht begreifen, darum gebe es nur eine begrenzte Welt. Aber vor der Schöpfung der Welt sei er dadurch thätig gewesen, daſs er vorher andere geschaffen habe; er findet den Gedanken, daſs endliche Welten immer wieder aufeinander folgen, begreiflicher als die Ewigkeit einer Welt. Augustin dagegen legt Gott die Fähigkeit zu das Unendliche zu fassen, was die Menschen nicht könnten; die Zahl sei unendlich und müsse doch jedenfalls von Gott gefaſst werden können. Auch die Zeit sei von Gott geschaffen, und vor der Schöpfung habe es keine Zeit gegeben. Auch die Eigenschaften Gottes werden als unendlich angesehen. Albertus Magnus sagt, Gott als das unendliche Prinzip aller Dinge könne wohl berührt, aber nicht erfaſst werden (Stöckl, Gesch. d. Philos. des Mittelalters).

Nach Thomas v. Aquino paſst für Gott die Bezeichnung „negativ unendlich", weil seine Wesenheit durch nichts begrenzt wird, die Unendlichkeit der Materie dagegen ist eine schlechte und unerkennbare. Die Materie ist unbegrenzt (infinitus), entbehrt der Form und ist also unvollkommen; Gott als unbegrenzte Form ist vollkommen. Das Attribut der Unendlichkeit für Gott scheint sich bei ihm und anderen Scholastikern in ein verstandesmäſsig zu erfassendes Prädikat zu verwandeln (I. Cohn, S. 71). Roger Bacon (im 13. Jahrhundert) wollte beweisen, daſs die Welt endlich sei; denn wenn auf einer geraden Linie irgend zwei Punkte lägen, so könnte man von beiden aus bis in das Unendliche verlängern; diese beiden unendlichen Geraden aber würden sich um die Strecke zwischen den beiden Punkten unterscheiden. Das hält er für unmöglich; der Gedanke, daſs unendliche Linien einen endlichen Unterschied haben könnten, ist ihm offenbar widersinnig. Es ist ihm klar, daſs jeder Teil immer wieder geteilt werden kann bis in das Unendliche. Bradwardina erkannte, daſs Gröſsen einer jeden Dimension wieder in Gröſsen derselben Dimension geteilt werden können, nicht aber, daſs sich aus Unteilbarem etwas Zusammenhängendes zusammensetzen lasse.

Besonders beachtenswert ist für uns der Deutsche Nicolaus von Cues (genannt Cusanus, eig. Krebs, 1401 bis 1464; Schriften übersetzt und Biogr. von Scharpff, Freib. 1862 und 71, Falckenberg, Grundz. d. Philos. des N. C. Breslau 1880). Ein eigentliches Wissen sei uns nicht vergönnt, nur eine allmähliche Annäherung, da die Wahrheit ein Unendliches sei, das man voraussetzen müsse. Zugleich aber ist das Unendliche das einzige Mittel, wodurch und in dem alles erkannt werden kann. Das Absolut-Unendliche ist Gott, seine Eigen-

schaften sind negativ, alle Gegensätze und Unterschiede, die es in der Welt gebe, seien in ihm aufgehoben. Ähnlich fielen in den mathematischen Figuren diese alle fort, sobald man ins Unendliche wachsen läfst. Die Peripherie des unendlichen Kreises sei der Geraden gleich, ein Dreieck mit einer unendlichen Seite habe nur unendliche Seiten, könne nicht aus mehreren Geraden zusammengesetzt sein, sondern sei eine unendliche Gerade. In der Welt gebe es keine absolute Ruhe und gröfste Bewegung, nur in Gott. Die absolute Einheit ist Wahrheit und läfst sich nicht mitteilen; ihr Abbild, der Punkt, ist ebenfalls unteilbar und nicht mitteilbar; er teilt die Unteilbarkeit auch der Linie, Fläche und dem Körper derart mit, dafs diese nur in Linien bez. Flächen oder Körper teilbar sind. Ein von der Linie etc. losgelöster Punkt werde nicht gefunden, weil er das die Unteilbarkeit verleihende innere Prinzip sei. Könnte man ad minimam qualitatem gelangen, so wäre der Bogen nicht mehr gröfser als die Sehne. Den unendlichkleinen Bogen faſst er also schon als zusammenfallend mit der Sehne auf. Aber es könnten Sehne und Bogen als Quantitäten niemals die aktuell kleinsten sein, weil sie stetig teilbar sind (es fehlt ihm also die Vorstellung vom Unendlichen verschiedener Grade, natürlich erst recht von Behaftungen). Trotzdem könne man von ihrem Verhalten geistig wissen; denn in simpliciter minimo utriusque sehe man die Gleichheit von Sehne und Bogen (I. Cohn schliefst daraus, S. 92, er habe das Minimum als näherungsweise erreichbaren Grenzwert gefafst, freilich nicht klar, sondern durch Verweisung auf das geistige Gesicht).

Nach Kopernicus ist die Erde unendlichklein im Verhältnis zum Himmel, ebenso der Abstand der Erde von der Sonne, dem Mittelpunkte der Welt; die Fixsternsphäre umschliefst die kugelförmige Welt. Nach Bruno ist das Unendliche das Vollkommene im höchsen Grade, weil sich in ihm unzähliges Vollkommenes zusammenfindet. Die Welt hat keinen Mittelpunkt (nicht etwa die Sonne), keine Kugelgestalt, jeder Abschlufs ist nur scheinbar. Aber wenn die Welt auch als Ganzes unendlich sei, so seien doch ihre Teile endlich, also sie nicht ganz unendlich; Gott aber sei in jeder seiner Eigenschaften unendlich. Kleinere und gröfsere Teile könne es nicht geben, wenn keiner von ihnen der kleinste sein solle.

Kepler empfindet geradezu einen geheimen Schauder vor dem Unendlichen. Wäre die Welt unendlich, so wäre jeder Punkt zugleich Mitte, weil von anderen unendlich d. h gleichweit entfernt, und Nichtmitte. Für Kepler ist es ein Bedürfnis, den Schauder bei der Auffassung der Welt zu vermeiden und sie sich als begrenzt vorzustellen; er hat kein Verständnis etwa dafür, dafs es verschiedene unendlich-

lange Linien oder gar Unendlichkeiten verschiedener Grade geben könne.

Nach Hobbes ist der Raum wie die Zeit ein bloſses Gedankending, welches übrig bleibt, wenn man alle Dinge fortdenkt. Es giebt nach ihm kein Minimum der Teilung, also keine Teilung ins Wirklich-unendliche, sondern nur die Möglichkeit zu jeder Gröſse noch eine kleinere zu suchen. Ramus leugnet die potentielle unendliche Teilbarkeit sowohl in der Physik wie in der Geometrie, es gebe keinen einzigen Fall wirklicher unendlicher Teilbarkeit, demnach auch nicht den Allgemeinbegriff. Nach Benedetti hat ein bewegter Körper (der fliegende Pfeil des Zeno) in jedem Punkte eine Tendenz zur Fortsetzung der Bewegung oder das Merkmal der Geschwindigkeit; dies bleibt auch bestehen bei unendlichkleiner Zeit und Strecke. Galilei sucht die Widersprüche des Unendlichen dadurch zu erklären, daſs er meint, beim Unendlichen könne man von „gleich, gröſser oder kleiner" nicht mehr sprechen. In jeder endlichen Reihe der Zahlen giebt es weniger Quadratzahlen als solche Zahlen, die um eins fortschreiten, bei unendlichvielen Zahlen gebe es aber auch unendlichviele Quadratzahlen, ob mehr oder weniger könne man nicht mehr sagen, ebensowenig, ob in einer gröſseren Linie mehr Punkte enthalten seien als in einer kleineren (das erste Problem dieses Buches; die Galileische Erklärung ist ungenügend, der Widerspruch fällt durch die Vorstellung der Behaftung fort). Die Anzahl der Teile einer Linie erklärt Galilei weder für endlich, noch unendlich, sondern für beliebig und verwirft dabei die Unterscheidung der potentiellen und aktuellen Unendlichkeit des Aristoteles. Daſs bei einer gleichförmigen Beschleunigung unendlichviele Geschwindigkeitsgrade in endlicher Zeit vorkommen müſsten, erscheint ihm schwierig und er sucht eine Erklärung darin, daſs jeder Geschwindigkeitsgrad nur einen Augenblick, nicht eine endliche Zeit in Anspruch nehme. Descartes meint, ein in Bewegung kommender Körper brauche nicht alle Grade der Geschwindigkeit zu durchlaufen, es könne ein groſser, vollkommen harter Körper einen kleinen plötzlich mitnehmen; denn sonst müſste doch auch der gröſsere eine Zeit lang eine geringere Geschwindigkeit oder gar den Zustand der Ruhe erhalten. Er bereits glaubt das Achilleusproblem des Zeno durch den Hinweis auf die Summation der unendlichen geometrischen Reihe zu widerlegen, was bis zum heutigen Tage vielfach als genügende Widerlegung betrachtet wird. Das Unendliche (Gott) werde zwar nicht erfaſst, aber eingesehen, und zwar als positiv, wenn wir es auch in negativer Weise finden. Gott sei infinitus, habe nach keiner Seite hin Grenzen, die Welt indefinit, habe nach gewissen Richtungen keine

Grenzen. Unsere positive Kenntnis vom Unendlichen ist diesem nicht adaequat, da unser Geist dazu zu schwach sei. Der Mathematiker Fermat (1601—65) sagte, eine Gröfse, die sich von einer anderen nur um beliebigwenig (um weniger als jede beliebige Gröfse) unterscheide, komme ihr gleich oder beinahe gleich. Pascal fand, dafs eine Quantität höherer Gattung durch Hinzufügung einer solchen niedrigerer Gattung nicht vermehrt wird, Körper nicht durch Flächen usw. Wallis etwa zehn Jahre später (1655) bedient sich des noch jetzt für Grenzübergänge gebräuchlichen Ausdruckes, ein Unterschied werde kleiner als jeder angebbare (ein sehr bequemes Wort, wenn man beim Endlichen, wenn auch noch so klein Vorgestellten nicht stehen bleiben will und doch nicht fähig zu sein glaubt sich das Unendlichkleine vorzustellen, wenigstens nicht mathematisch). Newtons Lehrer Barrow, welcher bereits ähnlich wie Newton stets den Begriff der Bewegung bei der Geometrie anwendet und sogar davon ausgeht, hält einen Zeitaugenblick für gleichwertig mit einem unendlichkleinen Zeitteilchen und den Punkt für die Zusammensetzung einer Linie für ebenso richtig wie indefinitkleine Linien. Er scheut sich nicht unendliche Anzahlen von Punkten (zweier verschiedenen Strecken) als gleich anzusehen (weil unendlich), die Punkte aber alsdann als untereinander ungleich. Man könne auch unter Momenten indefinit kleine Zeitteilchen verstehen, doch sei das weniger klar und einfach.

Newton (1704: tractatus de quadratura curvarum) sagt, die mathematischen Gröfsen beständen nicht aus kleinsten Teilchen, sondern seien durch stetige Bewegung beschrieben. Die Quantitäten entstehen bei ihm einfach durch Wachstum und können je nach der Geschwindigkeit des Wachsens gröfser oder kleiner werden; es treten Zuwachse oder Fluxionen auf und bewirken so die entsprechenden Quantitäten oder Fluenten. Die Vorstellung von unendlichkleinen Gröfsen will er durch die von Verschwindenden ersetzen, es scheint ihm offenbar der Begriff der Bewegung ein leichterer, ursprünglicherer zu sein als der des Unendlichen. Auch Verhältnisse von eigentlich unendlichkleinen Gröfsen stellt er nicht auf, vielmehr nur solche von endlichen und von verschwindenden. Das Verschwinden ist ihm als eine Art Bewegungsvorstellung wieder leichter faſsbar als das Unendlichkleine. Betrachte man kleine Kurventeile als gerade, so könnten das nur verschwindend kleine sein. Wahrscheinlich kommt er darauf durch die schon bei Fermat, Pascal und Wallis vorkommende Erweiterung des Gleichheitsbegriffes. Es zeigt sich in der Mathematik als notwendig — um zu richtigen Resultaten zu gelangen — Gröfsen, die sich immer näher rücken, für gewisse Probleme (wir wissen ja,

welche), schliefslich für gewisse Zwecke als gleich zu betrachten, obgleich man doch auch andererseits durchaus nicht die Vorstellung eine Art von Verschiedenheit in jeder Beziehung fortwerfen kann (sonst würde man nicht zum Begriffe der Tangente gelangen). Bleibt man nun auf dem Standpunkte stehen zwar zu erkennen, dafs es in der Vorstellung Verhältnisse von so kleinen Gröfsen noch geben müsse (mit endlichem Verhältniswerte), dafs sie einzeln als Summanden zu endlichen hinzugefügt diese nicht verändern, und kann man sich andererseits nicht dazu entschliefsen das geistige Bestehen eines neuentdeckten Gebietes von Gröfsen anzuerkennen, die untereinander Verhältnisse haben wie die endlichen, aber doch jenen auffallenden Gröfsengegensatz (der Nichtvermehrung), dann ist es ein bequemer Ausweg vom Kleinerwerden im Endlichen zu reden und den Unterschied zweier Gröfsen immer kleiner werden zu lassen, die Gröfsen als gleich zu behandeln, sobald ihre Differenz kleiner als jede beliebige, noch so kleine Zahl wird. Dies ist allerdings selbstverständlich: soll (!) der Unterschied kleiner als jede vorgestellte Zahl sein, so sind sie auch gleich bis auf jenen beliebigklein vorgestellten Fehler. Stellt man sich nun im Geiste ein System von Gröfsen vor und zwar in der Art, dafs jene kleine Differenz bei ihren Unterscheidungen untereinander nichts ausmacht d. h. dafs man einfach nur (!) gröbere Unterschiede zuläfst, so sind jene nur so wenig unterschiedenen Gröfsen für dieses System gleich. Das ist so, als wollte man eine Mücke auf einem Turme zuerst sehen und betrachten, dann aber so weit fortgehen, dafs man diese Mücke nicht mehr sieht und nun nur noch alles das am Turme beschreiben, was man nun noch sehen kann.

Dann allerdings ist es für diesen Zweck einerlei, ob eine Mücke dasitzt oder nicht. Aber man fühlt wohl, dafs man für andere Zwecke doch genötigt ist wieder von der Mücke zu sprechen. Da kann man nun allerdings auch den Vorgang des Verschwindens der Mücke in den Vorgang der Entfernung vom Turme hineinschieben und hiervon noch sprechen. Man sagt nicht: die Mücke sei gar nicht da, sondern sie sei verschwunden. Man vergifst noch nicht, dafs man sie einmal gesehen hat und dafs sie noch dasitzt, aber man berücksichtigt das nur, soweit es einem pafst, nur für die gröberen Quantitäten an dem Turme. Wem es leichter erscheint sich den Wechsel zwischen dem Anerkennen des Vorhandenseins der Mücke und dem Nichtmehrsehen durch das „Verschwinden" klar zu machen, der wird die Newtonsche Art leicht verständlich finden. Aber man bedenke, dafs durch dieses Fortgehen vom Turme der Turm selbst mitsamt der Mücke nicht anders wird. Die Mücke soll ja wieder entdeckt werden können, wenn

man will. Die Quantitäten des Turmes und der Mücke werden durch das Fortgehen nicht anders. Das Bild paſst überhaupt nur so lange, wie man die Mücke durch Fortgehen zum Verschwinden bringen kann, in Wahrheit aber haben Turm und Mücke nichts mit dem Fortgehen zu thun. Das Verhältnis derselben ist nicht dasselhe wie das einer endlichen und unendlichkleinen Gröſse. Es ist sehr fraglich, ob durch Hinzuziehung eines neuen Begriffes wie die Bewegung die Sache selbst klarer wird; sie kann bequemer für die Anwendung sein — ja! Wäre freilich das Unendlichkleine überhaupt nicht ohne die Bewegung und das Verschwinden denkbar, so würde gewissermaſsen das Fortgehen mit zum Bilde vom Turm gehören, dann könnte man ohne die Bewegung nicht auskommen und hätte in der ganzen Sache noch den Begriff der Bewegung mehr, mit dem man sich nun vertragen muſs. Wenn man sich aber das Unendlichkleine ohne Bewegung vorstellen kann, so hat man mit weniger komplizierten Vorstellungen zu thun, und dann wäre das Hinzuziehen der Bewegung ein Akt, der zwar für gewisse Zwecke bequem sein kann, aber doch nur ein praktisches äuſseres Mittel sein würde. Solches Mittel erklärt (!) alsdann die Sache nicht etwa, sondern muſs selbst erklärt werden. Newton liegt es nicht so sehr an der philosophischen Erklärung, als an dem mathematisch richtigen Resultaten und einem bequemen Wege dahin ohne Fehler zu gelangen. Er sagt (principia ph. n. math. 1887), Gröſsen, welche in jeder beliebigen begrenzten Zeit konstant der Gleichheit zustrebten und einander vor dem Ende jener Zeit näher als eine beliebige Differenz rückten, würden schlieſslich einander gleich. In dieser Ausdrucksweise befinden sich verschiedene verschleiernde Wörter, nämlich „beliebige Differenz", „näher rücken" und „schlieſslich". Es ist nicht wahr, daſs „Beliebig" hier wirklich ein vollkommenes Belieben ausdrücke, vielmehr bedeutet hier dieses Wort, daſs man sehr weit rücken soll, daſs der Unterschied der Gröſsen so klein vorgestellt werden soll, daſs er neben jeder auch noch so kleinen endlichen Gröſse nichts ausmacht. Es steckt also trotz des bequemen Ausdruckes die Thatsache darin, daſs man sich derart kleine Gröſsen vorstellen kann, oder daſs man bei der Vorstellung der Gröſsen eine Veränderung vornehmen kann, die bis zu solchen Gröſsen hinführt. Was sollte wohl ein Verschwinden bedeuten, wenn dabei wirklich alles verschwunden wäre? Wie könnte dann noch von endlichen Werten der Verhältnisse solcher Gröſsen die Rede sein? Gröſsen, die wirklich verschwunden sind, sind nicht mehr da; sind sie aber im Geiste nicht mehr da, wie kann man noch von ihnen sprechen? Auch der Ausdruck, eine Geschwindigkeit sei im Moment des Aufhörens der Bewegung noch vor-

handen — letzte Geschwindigkeit, verschleiert grofse Schwierigkeiten, die nun einmal darin stecken; freilich verschleiert dieser Ausdruck die Sache in der Art, dafs die Erreichung der richtigen mathematischen Resultate bequem ist. Aus diesem Grunde hat die Newtonsche Art solchen Beifall bei den Mathematikern gefunden; würde auch für die Mathematik dabei etwas Falsches entstehen, so würden die Mathematiker sicher daran Anstofs nehmen und auch den Ausdruck unklar finden. Newton hat das Gewicht solcher Einwände wohl gefühlt; ein Verhältnis von verschwindenden Gröfsen wäre nicht das Verhältnis von etwaigen letzten Gröfsen, die es gar nicht gäbe; ein letztes Verhältnis, bei dem die Gröfsen verschwinden, sei nicht ein Verhältnis von etwaigen letzten, also verschwundenen Gröfsen, sondern es sei ein Grenzwert, dem sich das Verhältnis der immer abnehmenden Gröfsen nähere und zwar um mehr als irgend eine angebbare Differenz. Hier steckt wieder in dem Ausdrucke „angebbare Differenz" die Verschleierung. Soll es deutlich sein, so mufs gesagt werden, wie grofs man die Differenz angeben solle, in welcher Beziehung diese Angabe zu den anderen Gröfsen stehen solle, und dann ist sofort wieder die Eigentümlichkeit der unendlichkleinen Gröfsen gegenüber den endlichen da. Ein Grenzwert, der sich immer mehr annähert, kann niemals zu stande kommen, wenn man bei seiner Bildung etwa die beliebig kleine Differenz gar nicht mitdenkt, auch nicht, wenn man die verschwindenden Gröfsen ganz vergifst und thut, als seien sie gar nicht da. Psychologisch ist nur möglich, dafs man solche Differenz, deren Existenz erst benutzt wird, die also da ist, nachher vergifst oder absichtlich aus dem Gedächtnis ausstreicht, um sie, wann man Lust hat, wieder ins Gedächtnis zu rufen. Es ist schon sehr zweifelhaft, ob man bei Bildung des Grenzbegriffes diese Erinnerung wirklich auslöscht — der Mathematiker streicht einfach das Restglied aus der Endformel, behält aber diese Streichung ganz wohl im Gedächtnisse. Wenn er das Fortgelassene aber auch ganz vergifst, so mufs er doch sofort wieder daran denken, wenn er sagen soll, wie dieser Grenzwert zu stande kam. Der Grenzwert d. h. der Wert, bei dem jene kleine Differenz nicht mehr steht, wird allerdings nicht überschritten, er wird aber in Wahrheit auch niemals anders erreicht, als dadurch dafs man etwas fortläfst. Es ist nicht wahr, dafs man ohne dieses Fortlassen den Grenzwert im Geiste hat. Es ist und bleibt eine Art Sprung, ein plötzliches geistiges Vorgehen, ein plötzliches Weglassen, während bis dahin noch nicht fortgelassen worden ist, niemals aber ist es ein Erreichen eines Wertes ohne ein Fortlassen. Unter dem Ausdruck „letztes Verhältnis" ist also nur die

Thatsache verborgen, daſs es im Geiste doch Gröſsen giebt, die man plötzlich weglassen kann, die Thatsache, daſs die sogenannten unendlichen Gröſsen nicht fortgelassen werden können (bei den betreffenden Problemen wie dem der Tangente), daſs also doch im Geiste gewisse Gröſsen auftauchen, da sind, die unter die bisherigen (endlichen) nicht passen und von ihnen aus auch nicht glatt d. h. ohne Anwendung einer ganz anderen Vorstellungsart gefunden werden können. Die „verschwindenden Gröſsen" und das „letzte Verhältnis" umhüllt diese Thatsache so, das die von Newton beabsichtigten mathematischen Resultate richtig auftreten. Damit ist aber nicht bewiesen, daſs dies an sich hinreichend klar sei; selbst das ist nicht bewiesen, daſs durch andere Erklärung auch für die Mathematik keine gröſseren Vorteile erreicht werden könnten. Es ist sonderbar, daſs noch heute in manchen Büchern die Newtonsche Ausdrucksweise „wunderbar klar" und das Hereinziehen der Bewegung eine Vermehrung der Klarheit sogar in philosophischer Beziehung genannt wird!

Gewisse Grundsätze des Unendlichen sind auch von Newton richtig befolgt, darum stellen sich keine Fehler ein, aber das Wesen der Sache ist durchaus nicht aufgeklärt allein dadurch, daſs man gewisse Sätze befolgt, die mit dem Wesen zusammenhängen, ohne es völlig wiederzugeben!

Nach Spinoza kann die unendliche Substanz nicht geteilt werden. Denn ein Teil könne nur begrenzt sein, also wäre nicht mehr Substanz. Er unterscheidet Ewigkeit von Dauer (indefinite Fortsetzung des Seins). Wenn etwas von der Substanz abgelöst sei z. B. durch Anschauung der Sinne, so sei es teilbar; dahin gehören nach ihm Zeit, Maaſs und Zahl, die nur Modi des Verstandes seien. Diese Begriffe könne man nicht auf die Substanz oder die Ewigkeit anwenden, sonst entstehe Unsinn; z. B. könne man nicht durch die unendlichvielen Teile einsehen, daſs eine Stunde ablaufen kann.

Bei Locke besteht das Unendliche wieder nur in der Möglichkeit über jedes gegebene Endliche hinauszugehen. Die Eigenschaften Gottes folgere man, indem man sich bekannte, aus der Sinnenwelt geschöpfte Eigenschaften, wie die Kraft, oder die aus Selbstbeobachtung entnommenen, wie die Güte unendlich vermehrt denke.

Wie im ersten Teile mehrfach gesagt wurde, ist Leibniz in seiner Ausdrucksweise und auch in den zu verschiedener Zeit geäuſserten Ansichten nicht consequent. 1679 leugnet er die Vorstellung einer unendlichen Zahl oder einer gröſsten Geschwindigkeit, man könne nur Zahlen finden, die gröſser seien als jede beliebige gegebene. An

anderer Stelle unterscheidet er drei Grade des Unendlichen, den niedrigsten: das Unendliche wie bei den Asymptoten der Hyperbel, zweitens das in seiner Gattung Gröfste z. B. das Gröfste von allem auf einander Folgenden sei die Zeit, ähnlich der Raum; endlich Gott, der als einer alles sei. In späterer Zeit betrachtet er die Ruhe als unendlichkleine Bewegung, die Gleichheit als unendlichkleine Ungleichheit usw. Alles Unstetige leugnet er und schiebt es Mängeln unserer Erkenntnis zu. In uns selbst seien Vorstellungen von allen möglichen Graden der Klarheit; unendlichviele Bewufstseinsgrade sind in jeder Monade, sie spiegeln wieder (durch prästabilierte Harmonie) die unendliche Wirklichkeit. Also im metaphysisch Wirklichen ist immer Stetigkeit vorhanden, die Stetigkeit geht bei Leibniz über die von Raum und Zeit hinaus. Jeder Teil der Welt hat in sich eine aktuelle Unendlichkeit von Teilen (selbst in den Keimen lägen die Eigenschaften aller daraus entstehenden Nachkommen vorgebildet). In der Natur gebe es niemals eine völlige Gleichheit, wenn wir nach mathematischer Übertragung etwas gleich setzten, so wäre das nur eine Annäherung. Es ist weder ein unendliches Ganzes, noch ein letztes begrenztes Ganzes denkbar. Die Unendlichkeit Gottes steht weit über allem Erkennbaren. Die Unendlichkeit kann nicht aus Sinneserfahrungen entnommen werden, sondern stammt aus uns selbst. Im allgemeinen kann man sich ein Absolutunendliches nicht denken aufser bei Gott. Ein absolut unendlicher Raum kann nicht als aus Teilen zusammengesetzt gedacht werden, daraus entsprängen Widersprüche. Die vollendeten Unendlichen und die Unendlichkleinen seien nur in der Rechnung der Geometer brauchbar. Mehrfach erklärt er die Begriffe der Unendlichkeit in der Mathematik für unabhängig von denen in der Metaphysik. Er sagt ausdrücklich, die Differentiale, auch die höherer Ordnung seien nicht gleich Null, aber es seien die Unendlichkleinen höherer Ordnung in einer Differentialgleichung neben denen der nierigeren, oder dx neben dem Endlichen fortzulassen. Er sagt aber auch (1694 in einem Briefe an De l'Hôpital), seine Metaphysik sei ganz mathematisch oder könnte es doch werden. Er bezweifelt (Briefe an Johann Bernoulli) die Realität unendlichkleiner Linien; das wäre ähnlich wie eine begrenzte Ewigkeit. Wenn 10 Glieder einer Reihe (wie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots$.) vorhanden seien, so müsse auch ein zehntes notwendig vorhanden sein; wenn es unendlichviele Glieder gebe, so müsse darum noch nicht ein unendlichstes vorhanden sein. Ein totum infinitum sei undenkbar, nur eine unerschöpfbare Fortsetzung.

Berkeley meint, der 100000te Teil eines Zolles existiere nicht, wohl aber der 100000te Teil einer Meile, man könne den Zoll nur als

Vertretung so behandeln, als wenn er derart teilbar wäre. Bemerkenswert ist, daſs Berkeley dagegen protestiert, wenn der Mathematiker kleine Gröſsen zuerst als endlich behandelt und sie dann in den Gleichungen als verschwindend ansieht. Nur das existiert für ihn, was sinnlich wahrnehmbar ist, er will die Kurven nur durch Polygone mit endlichen Seiten messen lassen, nicht durch solche mit unendlichkleinen, welche weder wahr noch begreiflich wären. Auch Hume sagt, der Geist könne nicht einen der Unendlichkeit adäquaten Begriff der Unendlichkeit erreichen. Auch in der Geometrie, den Vorstellungen von Punkten usw. stützt er sich immer auf den Augenschein.

Kants Lehrer Knutzen erklärt eine unendliche Zahl für ein Unding, weil unendlich das sei, über das man nicht hinaus denken kann. Aber man kann die Zahlen bis ins Unendliche vermehren, und auch die Dauer der Änderungen in der Welt ist unbegrenzt; nur darf man die Welt nicht als unendliches Ganzes ansehen. Lambert (1771) glaubt zu erkennen, daſs der Begriff des Unendlichen nicht definiert werden könne, sondern gegeben sei. Voltaire sagt, je mehr man darüber nachdenke, daſs im Augenblicke der Gegenwart die eine Ewigkeit zu ende sei und die andere anfange, desto lächerlicher erscheine das; es sei eine Dummheit, denn im Augenblicke der Gegenwart dauere die Ewigkeit weiter.

Wolff ahmt einige der Leibnizschen Erklärungen recht äuſserlich-formal nach; besonders die von Leibniz zur populären Erklärung benutzten, das Unendliche recht schlecht treffenden Bilder (wie Berg und Sandkorn) scheinen ihm zu gefallen; das Unendliche in der Mathematik ist ihm nur ein Wort, wodurch gesagt wird, daſs es etwas Gröſseres sei, als man mathematisch fassen kann. Die unendliche Zahl oder das unendliche Glied einer Reihe ist für Buffon, der Newtons Fluxionslehre ins Französische überträgt, keine Zahl und also in Wahrheit nicht vorhanden. Fontenelle in seinen Elementen der Geometrie des Unendlichen entscheidet sich für die Existenz des Unendlichen; während das Metaphysisch-Unendliche ein in jedem Sinne Unendliches sei, auſserhalb deren es nichts gebe, sei das Geometrisch-Unendliche gröſser als jede endliche Gröſse, nicht aber gröſser als jede Gröſse überhaupt (Ordnungen des Unendlichen). I. Cohn (Geschichte des Unendlichkeitsproblems, 1896) hält wie viele die Annahme eines wirklich unendlichen Gliedes für etwas logisch Widersprechendes, wirft Fontenelles Begriffsverwirrung vor (S. 225, 6) und sagt: „Jedenfalls muſs doch der Aufnahme des Zeichens (∞) die Klarlegung des Widerspruches und infolgedessen der rein fiktiven Natur jener eingeführten Gröſsenart vorangehen. Fontenelle unterläſst dies. Sehr seltsam ist es auch,

dafs er eine Einsicht gewonnen zu haben glaubt, wenn er die Summe aller natürlichen Zahlen (also $1 + 2 + 3 + \ldots n = n/2 \cdot (1 + n)$ nach der Formel $\frac{n \cdot n + n}{2} = \frac{\infty^2 + \infty}{2} = \frac{\infty^2}{2}$ berechnet. Er sagt: „Obgleich uns diese unendliche Zahl unbekannt ist, gewinnt man doch so eine Vorstellung von dieser Summe, welche man sonst nicht gehabt hätte." Cohn sagt, es erfordere keine besondere Anstrengung F. zu widerlegen, F. Achard habe dies gethan und er führt seine Worte an: „damit die Zahl der Glieder unendlich geworden wäre, hätte man zu jenem Ende gekommen sein müssen, zu welchem man, nach dem eigenen Zugeständnis, nicht gelangen kann. Die Zahl im allgemeinen sei ebenso chimärisch wie „der Mensch" im allgemeinen, während es die bestimmten Zahlen wie 2, 4 gebe; Fontenelle aber beweise die Existenz einer unendlichen Zahl daraus, dafs man nie zu einem letzten Gliede der Zahlenreihe kommen könne". (Die Sache klärt sich auf, wenn man, wie in diesem Buche, allerdings dabei bleibt, dafs man beim einfachen Weiterzählen im Endlichen niemals zum Unendlichen gelangen kann, vielmehr eine neue Behaftung anwenden mufs, um sich Unendliches vorzustellen; wie oft gesagt, kann man weder mit einem Sprung innerhalb der endlichen Behaftung noch ohne einen solchen Sprung zum Unendlichen gelangen, wohl aber durch Hinzuziehen der Vorstellung von unendlichen Gröfsen; dadurch gelangt man sehr wohl zur unendlichen Zahl, sogar zu solchen mit bestimmten Verhältnissen untereinander und entsprechend durch andere Behaftungen auch zu solchen höherer Grade. Doch wird diese Erklärung allerdings von Fontenelle nicht gegeben sein — sein Buch ist mir unbekannt). Auch D'Alembert widerspricht dem Fontenelle, will wieder das Unendliche in der Mathematik nur als Grenze fassen, da die Existenz des Unendlichen der Geometrie ganz gleichgiltig sein könne. Es scheint ihm zu genügen, wenn man sagt, die Reihe vergröfsere sich mit wachsender Gliederzahl und komme jeder noch so grofsen Zahl gleich. Er glaubt also die Schwierigkeiten des Unendlichen durch das Wort „noch so grofs" vermeiden zu können. L. Cohn meint, er habe dadurch mehr Mifsverständnisse abwehren, als wirkliche Begründung der Rechnung geben wollen, auch die Einführung der Eulerschen Nullen sei begreiflich der sorglosen Behandlung bei Wolff und der „bodenlosen Leichtfertigkeit Fontenelles" gegenüber.

Auch L'Huilier und Mathematiker wie Carnot und Lagrange beschäftigen sich mit der Aufklärung des Wesens des Unendlichen in der Mathematik (vergl. auch Freyer, Studien zur Metaphysik der Differentialrechnung, Osterprogramm Ilfeld 1883, bei Weber Berlin W.).

Doch kommen sie über den gewöhnlichen Begriff der Grenze, über den Augenblick des Verschwindens, über die besonderen Bedeutungen von 0/0 oder über eine Namensbeilegung ($f'[x]$ als Koefficient eines Gliedes in der Reihe für $f[x+h]$) im Wesentlichen nicht hinweg.

Seit Kant findet sich die Auffassung des Unendlichen als eines Intensiven bei nicht wenigen. Die Empfindung einer Farbe, einer Helligkeit, eines Tones, eines Druckes, also auch das Gefühl einer Kraft kann verschiedene Stärke haben, die man dann Intensität nennt. Sie ist nichts an sich Ausgedehntes oder Extensives wie die zeitlichen oder räumlichen Gröfsen. Man meinte, das eigentlich Unendliche finde sich im Raume und in der Zeit nicht vor, wenn es auch bei räumlichen und zeitlichen Vorstellungen nicht ohne Bedeutung ist und nicht weggelassen werden kann, wenn man nicht auf eine Reihe der wichtigsten Probleme verzichten will. Zu dieser Auffassung hat gewifs schon Newtons Ausdruck vom Augenblick des Verschwindens, von dem Grenzwerte eines Verhältnisses zweier gerade verschwindender Gröfsen beigetragen. Man empfand, dafs die verschwindenden Gröfsen keine extensiven Gröfsen mehr sein könnten, und versuchte nun die unendlichkleinen Gröfsen sich doch irgendwie als etwas vorzustellen; da den Betreffenden dies extensiv nicht zu gehen schien, weil sie nicht imstande waren die Widersprüche bei solcher Auffassung zu lösen, so kamen sie auf den Versuch, den bei der Empfindung jedem verständlichen Begriff der Intensität versuchsweise auf das Unendliche zu übertragen. Es ist auch nicht undenkbar einen solchen Versuch zu wagen, selbst wenn man die extensive Ausdehnung des Unendlichen für möglich hält, also neben dieser noch zur Vergleichung die Möglichkeit der Erklärung durch Intensität hinstellen will. Freilich hat man dann zu überlegen, worin die Berechtigung solcher Namengebung beruhen soll, ferner auch, falls sich eine Berechtigung ergiebt, ob dieselbe für gröfser anzusehen ist als die extensive Vorstellung, etwa weniger oder keine Widersprüche ergiebt, während die letztere etwa nicht genügt, endlich, dafs auch die Intensität kontinuierlich sein könnte.

Der grofse Fortschritt, den die Philosophie Kant zu verdanken hat, besteht vor allem in der Durchführung des Verlangens, bei allen Problemen zuerst kritisch zu untersuchen, woher die Elemente des Problems stammen, ob sie Anschauungen oder Verstandeselemente oder gar Elemente einer von der Auffassung durch den menschlichen Geist unabhängigen Welt an sich sind. Solche Kritik führt zu einer Zerlegung der geistigen Grundeigenschaften. Auch die in diesem Buche versuchte Lösung der Schwierigkeiten durch Zurückführung

auf die Behaftung des Räumlichen oder Zeitlichen durch verschiedengradige Weitenvorstellungen sind Konsequenzen solcher kritischen Zerlegung. Für Kant sind die Schwierigkeiten des Unendlichen der Ausgangspunkt und die eigentliche treibende Kraft. Immer ist er voller Bewunderung für die Unendlichkeit und legt diesen Problemen für die ganze Philosophie die gröfste Bedeutung bei. In seiner vorkritischen Zeit spricht er noch von der Unendlichkeit wie von etwas Wirklichem (unendliche Welt). Wie aber eine Gesamtheit (Totalität) aus einer unendlichen Anzahl von Teilen entstehen soll, das bereitet Schwierigkeiten. Unendlichviele, aufeinanderfolgende Zustände können nicht eine abgeschlossene Totalität ergeben, denn einer abgeschlossenen Reihe könne nichts mehr folgen. Er gelangt dahin, Raum und Zeit für blofse Anschauungen zu erklären. (Aber wenn es metaphysisch auch keine unendliche Zeit gebe, man also diese Schwierigkeit aus der wirklichen Welt hinausbrächte, so liegt doch auch in der blofsen Anschauung schon die Schwierigkeit des Unendlichen, aufser wenn man auch aus ihr das Unendliche herausschafft, es etwa nicht für extensiv erklärt. Wenn man aber imstande ist in der blofsen Anschauung durch verschiedene Behaftungen die Schwierigkeiten des Unendlichen zu lösen, so ist noch nicht absolut ausgeschlossen selbst für das Wirkliche an sich solche Lösung zu finden, wenn man nämlich das Wirkliche ebenfalls als nur bestehend in Verhältnissen ansieht. Diese Möglichkeit ist besprochen worden in meiner Schrift: Eine mögliche Wesenserklärung für Raum, Zeit usw.).

Kant legt in der Inauguraldissertation das Unendliche in das Sinnliche oder die Anschauung, nicht in das Verstandesgemäfse; hier sieht er letzteres noch als Zeichen des wirklichen Seins an. Die Schwierigkeiten (oder Antinomieen) blieben bestehen, da das reine Denken sich nicht mit gewissen Anschauungsthatsachen vertragen kann. Die Antinomieen stellt er in der kritischen Periode folgendermafsen auf (Kritik der reinen Vernunft, herausgegeben von Dr. K. Kehrbach, S. 354 ff.): „Die Welt hat einen Anfang in der Zeit und ist dem Raume nach auch in Grenzen eingeschlossen" und „Die Welt hat keinen Anfang und keine Grenzen im Raume, sondern ist, sowohl in Ansehung der Zeit als des Raumes unendlich". Zweiter Widerstreit der transcendentalen Ideen: „Eine jede zusammengesetzte Substanz in der Welt besteht aus einfachen Teilen und es existiert überall nichts als das Einfache, oder das, was aus diesem zusammengesetzt ist". Antithesis: „Kein zusammengesetztes Ding in der Welt besteht aus einfachen Teilen und es existiert überall nichts Einfaches in derselben". Drittens: Thesis behauptet aufser Causalität nach

Gesetzen noch eine Causalität nach Freiheit in der Welt, während nach der Antithesis alles lediglich nach Gesetzen der Natur erfolgt. Vierte Antinomie, Thesis: „Zu der Welt gehört etwas, das, entweder als ihr Teil oder ihre Ursache, ein schlechthin notwendiges Wesen ist". Antithesis: „Es existiert überall kein schlechthin notwendiges Wesen, weder in der Welt noch aufser der Welt, als ihre Ursache". Scheinbar läfst sich jedesmal sowohl die Thesis wie die Antithesis beweisen. Kant will den Widerspruch so lösen, dafs er sagt, es bestehe kein kontradiktorischer Gegensatz zwischen den Sätzen: „Die Welt ist endlich" und „die Welt ist unendlich", sondern ein konträrer; man dürfe nicht behaupten „die Welt sei entweder endlich oder unendlich, ein drittes gebe es nicht"; sondern gerade das dritte sei das Richtige: „Die Welt an sich ist weder endlich noch unendlich, vielmehr können wir mittels unserer angeborenen oder apriorischen geistigen Eigenschaften (zu denen die Bezeichnung endlich und unendlich gehört) gar nichts über die Welt an sich aussagen. Richtig ist nur der Gegensatz zur Behauptung, die Welt sei endlich, wenn man sagt, die Welt sei nicht endlich (aber auch nicht unendlich). Solange wir uns unkritisch einbilden die Dinge an sich zu erkennen, werden wir behaupten, dafs mit dem Bedingten auch die Totalität aller Bedingungen gegeben sei. Wenn wir nun aber ferner schliefsen: es seien uns Gegenstände der Sinne als bedingt gegeben, also auch die gesamte Reihe ihrer Bedingungen, so sei hieran nur soviel richtig, dafs in der Sinnenwelt mit den Bedingungen auch der Regressus der Bedingungen gegeben sei, aber nicht die Totalität. (Der leere Raum aufser und die leere Zeit vor der Welt sind ihm Undinge, S. 359.) Von der Totalität würden wir sprechen bei einer Welt an sich. Nach der Kritik sei es aber falsch auf die Welt die Formen unserer Erkenntnis, die Begriffe des Bedingten und der Bedingungen anzuwenden. Durch die fälschliche Anwendung entstehe der (falsche) Beweis für die Unendlichkeit, und durch denselben Fehler der Übertragung der Anschaulichkeit auf die wirkliche Welt der falsche Beweis für die Endlichkeit.

(Hierbei spielt offenbar wieder der Gegensatz zwischen dem Verstandesgemäfsen und der Anschauung eine grofse Rolle. Es fragt sich aber sehr, ob nicht auch schon in der blofsen Anschauung der Widerspruch vorhanden ist, der hier nur durch Übertragung der Anschauung und der Gesetze oder Voraussetzungen des Denkens auf eine wirkliche Welt gefunden wird. Schon die reine Vorstellung einer geraden Linie kann diesen Gegensatz wohl enthalten, man kann sie als ohne Aufhören fortgesetzt d. h. beliebig fortgesetzt, als nicht endlich ansehen und trotzdem noch fragen, ob sie nur in sinnlich-

vorstellbarer Gröfse oder in übersinnlichvorstellbarer Gröfse vorgestellt werden könne. Man kann behaupten, die Anschauung selbst käme auf die Vorstellung einer unendlichlangen und unendlichkurzen Linie, freilich nicht durch einen Sprung aus dem Endlichen und auch nicht durch einen Nichtsprung d. h. allmählich, sondern durch vollkommenen Wechsel der Behaftung. Also auch in der reinen Anschauung kann man davon reden, dafs es kein kontradiktorischer Gegensatz sei, zu sagen, durch Verlängerung der Linie gelange man entweder durch Sprung oder durch Nichtsprung zum Unendlichen, sondern ein konträrer. Dann nützt die Unterscheidung, die Kant giebt, von der empirischen Realität und transcendentalen Idealität der Welt nicht, um diesen Widerspruch zu lösen.)

Kant selbst sagt, dafs die Kontinuität (worin doch die Schwierigkeiten des Unendlichkleinen stecken) als a priori (also ohne Erfahrungen, ohne das Hinzuthun einer Welt an sich) sowohl bei den extensiven wie auch bei den intensiven Gröfsen von uns erkannt wird (Kehrb. S. 170, erste Ausgabe der Kritik S. 176—177, Aufl. B, S. 217, 218): „Es ist merkwürdig, dafs wir an Gröfsen überhaupt a priori nur eine einzige Qualität, nämlich die Kontinuität, an aller Qualität aber (dem Realen der Erscheinungen) nichts weiter a priori, als die intensive Quantität derselben, nämlich, dafs sie einen Grad haben, erkennen können, alles Übrige bleibt der Erfahrung überlassen". (Kehrb. S. 166, A. 170, B. 212, 3) „Wenn nun alle Erscheinungen, sowohl extensiv als intensiv betrachtet, kontinuierliche Gröfsen sind usw." Seine Definitionen des Extensiven, Intensiven und der Kontinuität sind (Kehrb. S. 160, A. 162, B. 203): „Eine extensive Gröfse nenne ich diejenige, in welcher die Vorstellung der Teile die Vorstellung des Ganzen möglich macht (und also notwendig vor dieser vorhergeht). Ich kann mir keine Linie, so klein sie auch sei, vorstellen, ohne sie in Gedanken zu ziehen, d. i. von einem Punkte alle Teile nach und nach zu erzeugen und dadurch allererst die Anschauung zu verseichnen". Offenbar steckt also hierin schon die Kontinuität oder die Anwendung derselben ist nötig, um überhaupt den Begriff der extensiven Gröfse fertig zu bekommen. (Kehrb. S. 165, A. 169, 170, B. 211) „Die Eigenschaft der Gröfsen, nach welcher an ihnen kein Teil der kleinstmögliche (kein Teil einfach) ist, heifst die Kontinuität derselben".

Apprehendieren ist nach Kant „ins empirische Bewufstsein aufnehmen" (K. S. 159. In der zweiten Auflage von Kant zugesetzt S. 202, 3; in der ersten fehlt diese Stelle (!) K. 164. A. 168. B. 210.) Nun nenne ich diejenige Gröfse, die nur als Einheit apprehendiert

wird, und in welcher die Vielheit nur durch Annäherung zur Negation = 0 vorgestellt werden kann, die intensive Gröfse." Also ist wohl ein Unterschied zwischen der intensiven und extensiven Gröfse, aber auch bei der intensiven Gröfse kommt nach Kant die Kontinuität vor, nämlich dann, wenn man darin die Vielheit vorstellt, eine einzelne Empfindung hat nur einen, irgend einen Grad, während bei der extensiven Gröfse immer die Vorstellung der Teile die Vorstellung des Ganzen möglich macht, also immer die Vorstellung der Teile auch vorkommen soll. „(K. 165. A. 169, 70, B. 210, 11) So hat demnach jede Empfindung, mithin auch jede Realität in der Erscheinung, so klein sie auch sein mag, einen Grad, d. i. eine intensive Gröfse, die noch immer vermindert werden kann, und zwischen Realität und Negation ist ein kontinuierlicher Zusammenhang möglicher Realitäten und möglicher kleinerer Wahrnehmungen. Eine jede Farbe, z. B. die rote, hat einen Grad, der, so klein er auch sein mag, niemals der kleinste ist usw."

Es fragt sich hierbei, ob nicht die Widersprüche, die sich bei einer Abnahme bis in das Unendlichkleine im Gegensatze zu den endlichen Graden ergeben (denn solche kontinuierliche Abnahme soll es nach Kant ja geben) von selbst auch Widersprüche in der Erfahrung ergeben und zwar Widersprüche, die a priori sein würden, und welche durch die Unerkennbarkeit der Welt an sich nicht aufgehoben werden.

Wollte man nun das Unendliche, etwa die unendlichkleine Geschwindigkeit als eine intensive Gröfse fassen, die in ihren Wirkungen im Extensiven das Endliche erzeugte (was einige nach Kant wollen), so wäre zunächst die Frage, ob man denn nicht im Intensiven selbst wieder die Schwierigkeiten des Unendlichen hätte, also nur eine Verschiebung der Widersprüche stattfinde.

Von Interesse für uns ist noch eine Stelle, in der sich Kant über Punkte und Grenze äufsert: „(K. S. 165 A. 170, B. 211, 2) Punkte und Augenblicke sind nur Grenzen, d. i. bloíse Stellen ihrer Einschränkung, Stellen aber setzen jederzeit Anschauungen, die sie beschränken oder bestimmen sollen, voraus, und aus bloísen Stellen, als aus Bestandteilen, die noch vor dem Raume oder der Zeit gegeben werden könnten, kann weder Raum noch Zeit zusammengesetzt werden." Kant nennt Veränderung eines Zustandes nicht etwa gleichförmige Bewegung, sondern redet davon, wenn die Bewegung eines Körpers ab- oder zunimmt (Kritik d. r. V. Kehrb. S. 194 Anm.). „Alle Veränderung (ebenda, A. 208, B. 254) ist also nur durch eine kontinuierliche Handlung der Causalität möglich, welche, sofern sie gleichförmig ist,

ein Moment heifst. Aus diesen Momenten besteht nicht die Veränderung, sondern wird dadurch erzeugt als ihre Wirkung." Wenn (K. S. 164, 5. A. 168. B. 210) man diese Realität [in der Erscheinung, die einen Grad, also eine Intensität hat] als Ursache [es sei der Empfindung oder anderer Realität in der Erscheinung z. B. einer Veränderung] betrachtet, so nennt man den Grad der Realität als Ursache ein Moment, z. B. das Moment der Schwere, und zwar darum, weil der Grad nur die Gröfse bezeichnet, deren Apprehension nicht successiv, sondern augenblicklich ist."

(Es ist durchaus nicht selbstverständlich, dafs zur Beschreibung einer Veränderung (Beschleunigung) die Causalität genannt werden mufs. Zieht man aber auch die Causalität heran — so wie man gewohnt ist bei einer Beschleunigung als Grund eine sogenannte Kraft anzusehen —, so würden auch bei dieser „kontinuierlichen Handlung der Causalität" die Schwierigkeiten des Kontinuierlichen, also auch Unendlichen vorhanden sein und der Lösung bedürfen.)

Jakob Friedrich Fries, der sich in unserer Frage sehr eng an Kant anschliefst, sagt: (Die math. Naturphilosophie, 1822) „Soll ein zusammengesetztes Ding in der That aus seinen Teilen bestehen, so mufs es aus einfachen Teilen zusammengesetzt sein, soweit diese auch jenseits der Grenzen unserer Beobachtung liegen möchten. Aber das Stetige besteht gar nicht aus einfachen Teilen. Sollen die Gesetze des Daseins der Dinge in Raum und Zeit wirklich für das Bestehen der Dinge in sich selbst gelten, so müfste die Welt in Raum und Zeit ein vollendetes Ganzes sein. Das Unvollendbare aber kann nie ein Vollendetes werden (S. 256)". „(S. 276) Der wissenschaftlich bestimmte Begriff einer unendlichkleinen Gröfse heifst also ein Differential. Bei der richtigen Behandlung dieses Begriffes kommt wieder alles darauf an, dafs man auch das Unendlichkleine nicht als ein gegebenes Ganzes ansehe. Alle Schwierigkeiten in der Behandlung der Grundbegriffe der Differentialrechnung sind nur daher entstanden, dafs man dieser Regel nicht treu blieb. Wenn ich ein Differential als einen gegebenen unendlichkleinen Teil einer Gröfse ansehen wollte, so widerspreche ich mir selbst, denn ein gegebennr Teil kleiner als jeder zu gebende ist ein Widerspruch". „Das Differential (S. 277) ist keine Fiktion, sondern eine Abstraktion, ein mathematischer allgemeiner Begriff. Ich frage: in welche mathematische Wissenschaft gehört das dx des Leibniz, das $\dot{x}$ des Newton. Jedermann wird zugeben, in die allgemeine Arithmetik, in die Buchstabenrechnung. Differentiale und Fluxionen sind eben so etwas, wie der allgemeine Begriff, den man überhaupt in der Buchstabenrechnung

mit einem Buchstaben bezeichnet, d. h. eine beliebige Gröfse oder Zahl, nur unter der Bedingung, dafs sie kleiner als jede gegebene vorausgesetzt werde." Über $1 : dx$ äufsert sich Fries: „(S. 279) Wir müssen in der allgemeinen Rechnungsweise im Verhältnis zu 1 das dx gleich 0 setzen. Dieser Satz hat seine bestimmte analytisch-syntaktische Bedeutung. Aber anderweit ist die Realität von unendlichkleinen Zahlen durch die gegebenen incommensurabeln Gröfsen demonstriert. Die Null ist nämlich ein Zahlzeichen, wodurch ein Verhältnis einer zu messenden Gröfse bestimmt wird, wie dies Fischer vorzüglich klar entwickelt hat. Was in einer Rücksicht Null ist, kann in anderer etwas sein, wie 0 Grad Wärme am Thermometer und alles was bei bezeichneten Zahlen durch 0 gemessen wird. Die Fläche ist 0 gegen den Körper, die Linie gegen die Fläche, der Punkt gegen die Linie."

E. G. Fischer. (Untersuch. über den eig. Sinn der Analysis Berlin 1808; Lehrb. der El. der Mathem. 1835; Über das Unendlichkleine und die Atome, akadem. Abh. 1831) will die Lichtstärke und die Kraft auch die Geschwindigkeit intensiv fassen, denn es sei offenbar in jedem Punkte des Weges die Geschwindigkeit schon vorhanden; denn wäre sie es nicht, so könnte sie auch in keiner endlichen Zeit als vorhanden gedacht werden. Das Extensive sei nur das äufserliche Maafs, wenn das Intensive aus sich heraustritt; dx habe, extensiv gedacht, den Wert Null genau, aber nicht absolut, sondern nur im Verhältnis zu jedem anderen extensiven Werte von x, er unterscheidet — wozu auch bei Leibniz gelegentlich schon Entsprechendes vorkommt — die absolute und relative Null. $dy : dx$ sei der Exponent zweier intensiven Gröfsen; das Intensive sei das Wirkende, das Extensive die Folge; die Bewegung soll, wenn sie als das aus sich heraustretende Intensive das Extensive hervorbringt, den Raum schaffen. (Hier wird wieder einmal das Wort Null für das Unendlichkleine gewählt, weil dx in mancher Beziehung durch Null ersetzt werden kann, und zwar als intensive Gröfse im Verhältnis zur extensiven. Die Schwierigkeit haftet dann wieder im Intensiven und es kommt noch dazu, dafs man gar nicht weifs, wieso das Extensive aus dem Intensiven entstehen soll. Ist dadurch etwa etwas besser erklärt, dafs man das Unendlichkleine aus dem Extensiven herauswirft? Wie kann man behaupten, oder sich einbilden, nun die Ursache des Räumlichen verstanden zu haben? Es ist nur eine scheinbare Erleichterung, wenn man dann den Übergang zur Grenze einfach als das Aufheben alles Extensiven bezeichnet. Mit Wörtern allein ist nichts erklärt.)

Bei Hegel und seinen Schülern macht sich oft den Mangel an

hinreichenden mathematischen Kenntnissen in der Erklärung des Unendlichen geltend (C. Frantz, die Philosophie der Mathematik, 1842). Nach Hegel wird das wahre Unendliche (welches als das schlechte Unendliche das Endliche aufser sich hat, also dadurch selbst begrenzt ist) im Endlichen (das durch Fortsetzung hinausweist) erkannt als das Wesen oder Ansich des Endlichen.

H. Schwarz sagt (Versuch einer Philos. der Math. Halle 53), da die Differentiale nur etwas bedeuten können, wenn sie im Verhältnis auftreten, so würde eine Rückkehr zu dem Fundamente stets möglich sein, wenn die Gleichung in Beziehung auf die Differentialen homogen bleibt, d. h. wenn sie identisch ist mit der Bestimmung ihres direkten Verhältnisses. Dies sei die Ursache, dafs dx^2 gegen dx vernachlässigt werden mufs, oder es sei vielmehr nur eine andere Aussprache der Forderung der Homogenität. Die Grundlage oder das Fundament, dessen man sich immer zu versichern habe, ist die Grenzbetrachtung. Das Zufällige und Ungenügende, das dem bloſsen Nähern anhafte, müsse herauseliminiert werden. Bilde man z. B. den Differenzenquotienten von $y = x^2$, also $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ und denke sich Δx alle Zwischenstufen annehmend bis zum gänzlichen Verschwinden, so bildeten die entsprechenden $\Delta y : \Delta x$ eine convergierende Reihe, deren letztes real vorhandenes Glied, die Grenze, von der Willkür irgend eines Sprunges befreit sei. Es handele sich nicht um eine Abnahme schlechthin, sondern um das sich dabei herausstellende Verhältnis, um die Bestimmtheit der Geschwindigkeiten oder Intensitäten dieses der Null Entgegeneilens (S. 80, 90, 1). Die Inkremente selbst könnten ihre Selbständigkeit wahren, denn es sei kein Grund vorhanden, diese Selbständigkeit in dem Momente, wo der Prozefs zum Abschlufs komme, als aufhörend zu denken. Die Bewegung betrachtet S. als die Tendenz über die eigene Bestimmtheit hinauszugehen, aber diese Bestimmtheit nicht durchbrechend, dieselbe Tendenz, die in der Idee des Punktes liege, welcher obgleich für sich bestehend dennoch die Bewegung über sich hinaus fortsetze. (S. 62—71).

I. E. v. Berger (Allgemeine Grundzüge der Wissenschaft, 1817 und 21) meint, dafs nur die Bewegung uns das Werden, ja Zeit und Raum verstehen liefse. In der Bewegung soll die Zeit das innere, ideale Moment sein, der Raum ihre äufsere mittelbare Erscheinung, also, dafs das Verhältnis beider nie absolut, sondern wieder nur im Verhältnis mehrerer Bewegungen unter einander bestimmbar sei. Die Bestimmung der Zeit, die an sich ideal und darum als solche ewig

verborgen bleibe, setze eine gleichförmige Bewegung voraus (warum nicht umgekehrt?), worin der Raum, der beschrieben werde, der Zeit proportional sei. Diese mit sich identische Bewegung sei die erste und einfachste Idee der Bewegung überhaupt, ohne welche keine Bestimmung ungleichförmiger möglich sei. Dies aber sei eine intensive Gröfse usw.

So spielt Tendenz, Verschwinden, Steigen, Stillstand, Zunahme, schnelles und langsames Konvergieren auch in den heutigen Lehrbüchern der höheren Mathematik eine grofse Rolle. Daraus darf man aber durchaus nicht schliefsen, dafs die Mathematik als reine Wissenschaft diese Ausdrücke absolut nötig hätte. Man bedenke nur dafs die wünschenswerte Klarheit über das Wesen der Sache nicht vorhanden ist, und allerdings durch solche Ausdrücke kurz zu solchen Begriffen geleitet werden kann, welche die richtigen Resultate (Formeln) ergeben.

Trendelenburg (Logische Untersuchungen. Aufl. 3. 1870; I. S. 297—300) erklärt, die Bewegung sei im Ursprunge zunächst intensiv, das äufsere Produkt derselben sei die extensive Gröfse. Er überläfst es den Mathematikern, die Principien der konstruktiven Bewegung weiter auszuführen, meint aber, die Erfahrung biete allenthalben Begrenztes dar, das Unendlichkleine und Unendlichgrofse stellten beide keine Grenze dar, sondern drückten nur das gedachte Ergebnis eines ohne Hemmung fortgehenden, stetig zunehmenden und stetig abnehmenden Gröfsen erzeugenden Prozesses, einer fortgehenden stetig zunehmenden und stetig abnehmenden Bewegung aus. Die intensive Gröfse sei stets die wirkende Thätigkeit, die extensive aber das Produkt; die Ausdehnung weise auf die ergänzende Kraft hin. Beide ständen in Wechselwirkung, die intensive wäre ohne die extensive eine qualitas occulta, die extensive ohne die intensive eine ausgegossene Vielheit ohne Einheit des Ursprungs.

Nach Herbart (Hartensteins Ausgabe) verträgt das Unendliche keine absolute Position. Die Vielheit von realen Wesen, die er annimmt, soll also nicht unendlich sein. Wollten wir den einzelnen Realen Veränderungen beilegen, so gerieten wir in Widersprüche mannigfaltiger Art. Die Realen stehen insofern in Verhältnissen, als jedes den andern gegenüber bleibt, was es ist, sich erhält. Die Veränderungen sind nur Schein für uns. Was eine andere Qualität annimmt, ist nach ihm ein anderes Ding; falls es sich verändert hätte, wäre das Ding nicht mehr das Ding geblieben, hätte sich nicht selbst erhalten. Wolle man aber die Veränderung von äufseren Ursachen ableiten, so würde das Wirkende nur in einem anderen wirken d. h.

es würde das eine die Qualität, die es hat, zugleich nicht haben, sondern erst von einem anderen erhalten, und das ginge ins Unendliche, da jede Ursache wieder von einer anderen bestimmt werden müfste. Im Augenblick des Übergangs von einer Qualität zur anderen müfste die frühere Beschaffenheit entweder ganz aufhören, und also die Kontinuität zerstört sein, oder nicht ganz aufhören, während die entgegengesetzte eintrete; dann aber wäre Widersprechendes in demselben gleichzeitig beisammen.

Von Interesse für unseren Gegenstand würden auch manche Bemerkungen von Hermann Lotze sein, doch mufs ich mich auf weniges beschränken. Er sagt (Metaphysik 1879, S. 246): „Reden von einer Geraden, die als heimlicher Kreis von unendlichem Durchmesser in sich zurückkehre, ohne ihre Richtung verändert zu haben, sind nicht Teile einer esoterischen Wissenschaft, sondern Zeugnisse einer logischen Barbarei. Nichts anderes bezeugen auch die Phrasen von Parallelen, die sich in unendlicher Entfernung schneiden sollen; sie schneiden sich in keiner endlichen Entfernung, und da jede Entfernung, wenn man sie erreicht dächte, wieder eine endliche sein würde (?), so thun sie es überhaupt in keiner; ganz unzulässig aber ist die Verkehrung dieser Verneinung in die positive Behauptung, im Unendlichen gebe es einen Ort, wo ihr Durchschnitt stattfände. Ich bezweifle auch hier nicht, dafs im Zusammenhange der Rechnung Bezeichnungsweisen, welche auf ähnlicher Voraussetzung beruhen, ihre guten Dienste innerhalb gewisser Grenzen leisten können; um so verdienstlicher würde eine genaue Untersuchung darüber sein, in welchem Umfange man sich ihrer in jedem Falle bedienen darf, ohne durch pomphaften Calcül vollständigen Widersinn zu empfehlen". „Die Geschwindigkeit (im Abschnitte über das Werden und die Veränderung, Metaph. S. 101) ist eben der Grad der Intensität, mit welchem die Bewegung ihrem eigenen Beriffe entspricht und das Geschehen der schnelleren ist zugleich das intensivere Geschehen." „Indem etwas für sich ist (S. 190), sich auf sich selbst bezieht, sich von anderem unterscheidet, löst es sich eben hierdurch, durch dieses sein Thun, von dem Unendlichen ab, erwirbt nicht hierdurch, sondern besitzt hierin in der einzigen denkbaren Weise jene Selbständigkeit eines wahrhaften Seins, die wir mit einem sehr unpassenden räumlichen Bilde aus dem unmöglichen Akte einer Transcendenz entspringen lassen".

I. I. Baumann (Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik, 1869, II, im abschliefsenden Kapitel: Kurzer Lehrbegriff usw.): „Denke dir einen Punkt, stelle dir einen Punkt vor, setze einen Punkt, heifst alles nicht, mache einen überhaupt, sondern denke einen da, wo du

vorher an etwas anderes gedacht hast oder nicht genau dies gedacht hast, oder nicht von dir angenommen wurde, daſs du dies müſstest gedacht haben". „Der Punkt hat mit der Linie gar nichts zu thun: denn eine Reihe von Punkten, auch noch so dicht aneinander gesetzt, sind eben nicht dadurch, daſs sie Punkte sind, eine Linie, sondern dadurch, daſs sie eine Reihe sind; in die Vorstellung der Reihe geht aber die Linie bereits mit ein als vorhanden usw.". „Bei der Linie selbst ist es schon ganz anders als beim Punkte; diese ist ebensosehr gemacht wie gegeben". „Eine Linie ziehen oder beschreiben ist daher nicht das Schaffen oder Produzieren eines vorher bloſs Möglichen (Potentialen), sondern das deutlichere, lebhaftere Wirklichmachen eines vorher bereits in der Vorstellung schon Wirklichen (das Aktualisieren eines bereits Aktualen)". (S. 644) „Eins aber ergiebt sich aus dem Gesagten und ist von Trendelenburg in dieser Hinsicht unzweifelhaft festgestellt worden, daſs nämlich Bewegung als ununterbrochenes Durchlaufen eines Raumes eine ursprüngliche Vorstellung des Geistes ist, eben weil sie in den Grundbegriffen der Geometrie mit enthalten ist, aber die andere Folgerung, die man daraus gezogen hat, daſs aus der Bewegung als solcher die geometrischen Vorstellungen sich genetisch entwickeln lieſsen, haben wir bereits ablehnen müssen; ein Punkt wird nicht durch Bewegung, eine Linie wird nur durch Bewegung eines Punktes, wenn sich der Punkt auf der Linie bewegt usw.". „Weil das Bewuſstsein (S. 648) von der Unendlichkeit des Raumes ein ruhiges ist, ein mit dem Begriff dieses Raumes von selbst sich einfindendes, darum muſs die Vorstellung seiner Unendlichkeit als eine gegebene angesetzt werden, als eine, die wir von vornherein haben, und die wir uns bloſs durch das beständige Ansetzen gleichsam wie durch ein Experiment bewähren; wir erzeugen diese Unendlichkeit nicht durch immer neues Ansetzen, bei dem wir nie zu ende kommen und daher die Vorstellung eines indefinitum fassen, sondern wir überzeugen uns dadurch bloſs davon, daſs der geometrische Raum ein infinitum ist usw."

Eine ganze Reihe von neueren Arbeiten über die etwaige Möglichkeit anderer Axiome oder anderer Raumarten und den Versuch sich solche Räume irgendwie vorzustellen, liegt ein wenig abseits von meinem Gegenstande, wenn auch Berührungen vorhanden sind; sie mögen deshalb hier nicht herangezogen werden. Mehrere andere neueren Schriften behandeln direkt den vorliegenden Gegenstand, freilich in anderer Weise und mit anderen Konsequenzen. Es möge mir freistehen nur einige Zitate zu bringen, welche die Verschiedenheit vom Vorliegenden andeuten, und im Übrigen diejenigen Leser, denen

sie etwa unbekannt sind, auf das Studium der Werke selbst hinzuweisen.

Professor Hermann Cohen (Marburg, Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte, Berlin, Dümmler 1883) sagt im Vorworte: „Ich beabsichtige hier den Begriff der Realität in seinem Werte für die Begründung der Erkenntnis auszuzeichnen, und bin seiner systematischen Charakteristik in der Einleitung wie in den Ausführungen nachgegangen. Aber bei dem Reize, den das Spinnen der Gedanken hat, ist mir die unbefangenere Überzeugung von der Wahrheit der Sache vorzugsweise aus dem Einvernehmen mit dem geschichtlichen Gange des Problems gewachsen. Denn die Befürchtung lag allzunahe, dafs durch das Geltendmachen des Infinitesimalbegriffs als eines Grundbegriffs des wissenschaftlichen Bewufstseins ein Eingriff in das Detail der mathematischen Forschung, das ich nach dem Umfange meiner Studien nicht überschauen kann, verübt sein könnte. Hat doch Hegel gerade an der Kritik dieses Begriffes seinen Schiffbruch blofsgestellt". „Das Unendlichkleine (S. 15) entzieht sich der Bedingung der Anschauung — und in der Anschauung mufs alle Erkenntnis darstellbar sein. Der Widerspruch steigert sich, indem das Unendlichkleine, obschon es der Anschauung nicht teilhaft wird, nichtsdestoweniger der Anschauuung dient und vorzugsweise an den Interessen derselben, insbesondere dem Tangentenproblem entstanden ist. Dieser angebliche Widerspruch kann durch eine elementare erkenntniskritische Erinnerung gehoben werden, die von jedem Standpunkte aus zugegeben werden wird. Es ist ein Irrtum, weil alle Erkenntnis in der Anschauung darstellbar sein mufs, darum auch alle anderen Mittel, Bedingungen und Grundlagen der Erkenntnis ihrerseits der Anschauung zu unterwerfen". „Der Punkt der Tangente (S. 34), welcher die verschiedenen Bewegungen eines Punktes zu einer Richtung vereinigt, erzeugt in dieser Richtung die Kurve". „Um (S. 37) das Endliche zu bestimmen, aus den Voraussetzungen und Gesetzlichkeiten, denen es entstammt und zugehört, letztlich zu erzeugen, dazu wird es notwendig eine Art wissenschaftlichen Seins zu erdenken, welche zunächst nur durch ihren Unterschied vom Endlichen zu charakterisieren ist. Für die sinnliche Anschauung sind der Punkt der Tangente und der Punkt der Kurve zwei Punkte; im Begriffe der Kurve sind sie ein Punkt, ein unendlichkleiner. So hat das Infinitesimale der Richtung den endlichen Kurvenpunkt und damit das wissenschaftliche Sein der Kurve hervorgebracht. Diese Schöpfung vollbringt ein Grundgesetz des Bewufstseins, welches gilt vor Raum und Zeit, welches daher von den eingeschränkten Rechten auch der reinen Anschauung nicht abhängen

kann". „Solange man (S. 39) noch induktiv von dem Endlichen zu dem Unendlichen überzugehen sucht, solange bestehen jene „Wunder", die sich jedoch aufklären, sobald man umgekehrt mit dem Unendlichen am Endlichen deduktiv zu verfahren gelernt hat". „Die (S. 40) qualitative Einheit ist Realität. Man kann daher auch sagen: die Kontinuität ist diejenige Qualität, welche die Quantität der Zahleinheit zum Unendlichkleinen der Realität vertieft." „Die (S. 50) geradlinige Fortsetzung der Bewegung ist nichts anderes als die infinitesimale Voraussetzung, dafs ein jeder unteilbare Punkt der sich bewegenden Linie eine Gerade sei. So wird durch den Begriff der infinitesimalen Geradheit Zenos fliegender Pfeil beseitigt." „Die (S. 117) Bedeutung des Intensiven für das Extensive ist hier (in Freyers Schrift: Studien zur Metaphysik der Diff. R.) getroffen; es fehlt nur das Verständnis des Zusammenhanges des Intensiven mit der Realität."

Gustav Theodor Fechner (Über die phys. u. philos. Atomenlehre, 2. Aufl. 1864) sagt (S. 163): „Raum und Zeit sind das absolut Continuierliche, die Materie das absolut Discontinuierliche". „Der Punkt (S. 164) kann eben nur in den continuierlichen Raum gesetzt, aber der continuierliche Raum nicht aus Punkten zusammengesetzt werden." „Ein (S. 166) einfaches Atom ist trotzdem, dafs seine Ausdehnung nichts ist, nicht selber Nichts; es hypostasiert aber die letzte Grenze des Seienden in quantitativer Hinsicht, ist ein unendlich Kleines im strengsten Sinne. Wogegen Zeit und Raum ein unendlich Grofses, schlechthin Unbegrenztes sind, respectiv nach einer und unendlich vielen Richtungen. Die unendlichkleinen Linien-, respectiv Flächen-, Körperelemente, mit denen die höhere Geometrie zu thun hat, sind nichts absolut unendlich Kleines, sondern nur ein relativ unendlich Kleines, indem sie zwar unendlichklein gegen alle endlichen Raumgröfsen (Linien, Flächen, Körper), wie diese gegen den unendlichen Raum sind, aber ihrerseits im Verhältnis der Unendlichkeit zu Räumlichkeiten von einer Kleinheit höherer Ordnung, so fort bis ins Unbestimmte stehen und endliche Gröfsenrelationen unter sich haben. Der Punkt allein, der aber eben hiemit viel mehr die Grenze der Raumgröfsen als selbst eine Raumgröfse bildet, steht zu allen unendlichkleinen Räumlichkeiten beliebiger Ordnung selbst im Verhältnis des Unendlichkleinen, ist das einzige Kleine, das nichts Kleineres mehr unter sich, noch in sich hat, ein Unendlichkleines unendlichter Ordnung, und gestattet keinen endlichen Gröfsenvergleich mehr — — er bildet eine Grenze des Raumbegriffs, wo etwas anderes als Raum angeht, und dies Andere ist eben die Materie". „Das Geistige (S. 176) selber kann nicht als etwas rein Intensives gelten, weil es der

Zeit bedarf, seinem Wesen nach ein zeitlich Ausgedehntes ist. In einem Augenblicke läfst sich nichts fühlen und nichts denken. Als rein extensiv können Raum und Zeit keinen Inhalt darstellen, geben; man kann von Raum und Zeit nicht sagen, dafs sie in etwas wären, dagegen alles, was ist, in Zeit und Raum oder Beidem gedacht werden mufs. Umgekehrt können die einfachen Wesen nur Inhalt darstellen, geben, aber nicht selbst haben. Hiemit sind Zeit und Raum an sich zugleich das absolute Leere, die einfachen Wesen das, was die Fülle in diese Leere bringt". „Übrigens (S. 183) leuchtet (hieraus von neuem) ein, dafs von einer Geschwindigkeit in einem Raumpunkt und in einem Zeitpunkt nicht die Rede sein kann."

Professor Georg Cantor, Halle, giebt den folgenden Grund an, dafs niemand vor ihm die von ihm sogenannten transfiniten Zahlen entdeckt habe (Zur Lehre vom Transfiniten. Gesammelte Abh. aus der Zeitschr. für Philosophie und phil. Kritik, I. Abt., Halle 1890), er habe in den Grundlagen (Gr. einer allgem. Mannigfaltigskeitslehre, Leipzig 1883) gleich im Anfang zwei toto genere von einander verschiedene Begriffe unterschieden, welche er das Uneigentlichunendliche und das Eigentlichunendliche nenne, „sie müssen (S. 34) als in keiner Weise vereinbar oder verwandt angesehen werden. Die so oft zu allen Zeiten zugelassene Vereinigung oder Vermengung dieser beiden völlig disparaten Begriffe enthält meiner festen Überzeugung nach die Ursache unzähliger Irrtümer; im besondern sehe ich aber hier den Grund, warum man nicht schon früher die transfiniten Zahlen entdeckt hat." Das Uneigentlichunendliche ist bei ihm eine Bezeichnung für das Potentialunendliche und verdient nach ihm eigentlich gar nicht die Bezeichnung Unendlich (S. 44). Er definiert es folgendermafsen (S. 42): „Das P. U. d. h. das potenziale Unendliche (*ἄπειρον*) wird vorzugsweise dort ausgesagt, wo eine unbestimmte, veränderliche endliche Gröfse vorkommt, die entweder über alle endlichen Grenzen hinaus wächst (unter diesem Bilde denken wir uns z. B. die sogenannte Zeit, von einem bestimmten Anfangsmomente an gezählt) oder unter jede endliche Grenze der Kleinheit abnimmt (was z. B. die legitime Vorstellung eines sogenannten Differentials ist); allgemeiner spreche ich von einem P. U. überall da, wo eine unbestimmte Gröfse in Betracht kommt, die unzählig vieler Betimmungen fähig ist." Es habe nur als Beziehungsbegriff, als Hilfsvorstellung (S. 6) unseres Denkens Bedeutung und habe seinen grofsen Wert als Erkenntnismittel und Instrument in der Differential- und Integralrechnung, aber keine weitergehende Bedeutung." (S. 42) Unter einem A. U. (d. h. das actuale Unendliche, *ἀφωρισμένον*) ist dagegen ein Quantum zu verstehen, das

einerseits nicht veränderlich, sondern vielmehr in allen seinen Teilen fest und bestimmt, eine richtige Constante ist, zugleich aber andererseits jede endliche Gröfse derselben Art und Gröfse übertrifft." C. bleibt aber bei dem Namen des Aktualunendlichen nicht stehen, sondern unterscheidet zweierlei Arten, das Absolute (S. 8), welches unvermehrbar und daher mathematisch nicht determinierbar sei, und das Transfinite, welches zwar unendlich, aber doch noch vermehrbar sei. Ersteres sei in Gott realisiert (S. 11), letzteres sei beschränkt und noch weiterer Vermehrung fähig und insofern dem Endlichen verwandt und sei erstens vertreten in der abhängigen, creatürlichen Welt, und zweitens in abstracto als mathematische Gröfse, Zahl oder Ordnungstypus vom Denken auffassbar. Um der Verwechselung mit dem „Absolutunendlichen" vorzubeugen, nennt er dieses Aktualunendliche mit dem besonderen Namen das Transfinite und führt als Beispiel an (S. 42) „die Gesamtheit, den Inbegriff aller endlichen ganzen positiven Zahlen; diese Menge ist ein Ding für sich und bildet, ganz abgesehen von der natürlichen Folge der dazu gehörigen Zahlen, ein in allen Teilen festes, bestimmtes Quantum, ein ἀφωρισμένον, das offenbar gröfser zu nennen ist als jede endliche Zahl." Auch Augustin fasse diese ganze Zahlenreihe als aktual unendliches Quantum auf (S. 42). „Ein anderes Beispiel ist die Gesamtheit aller Punkte, die auf einem gegebenen Kreise (oder irgend einer anderen bestimmten Kurve) liegen. Ein drittes Beispiel endlich ist die Gesamtheit aller streng punktartig vorzustellenden Monaden, welche zum Phaenomen eines vorliegenden Naturkörpers als constitutive Bestandteile beitragen." C. sagt, seine transfiniten Zahlen hätten eine Eigenschaft, welche sie wesentlich von den endlichen unterscheide. „Als (S. 61) durchaus wesentliches Merkmal endlicher Mengen mufs es angesehen werden, dafs eine solche keinem ihrer Bestandteile äquivalent ist. Denn eine aktual unendliche Menge ist immer so beschaffen, dafs auf mehrfache Weise ein Bestandteil von ihr bezeichnet werden kann, der ihr äquivalent ist." „(S. 60) Für endliche Mengen läfst sich beweisen, dafs, wenn von drei endlichen Cardinalzahlen a, b und c die letztere gleich ist der Summe der beiden ersteren, $a + b = c$, alsdann niemals c gleich einem der Summanden a und b sein kann. Wenn aber von der Voraussetzung der Endlichkeit bei den drei Zahlen a, b, c abgesehen wird, so hört dieser Satz auf richtig zu sein und darin liegt der tiefste Grund der wesentlichen Verschiedenheit zwischen endlichen und aktual unendlichen Zahlen und Mengen, einer Verschiedenheit, welche so grofs ist, dafs man die Berechtigung hat, die unendlichen Zahlen ein ganz neues Zahlengeschlecht zu nennen.

Eine aktual unendliche Quantität wird nach C. z. B. auch der Gröfse nach vorgestellt durch eine von einem Punkte A in das Unendliche verlaufende Gerade. „(S. 31) Wenn wir eine von A anfangende unendliche Gerade AO haben und wir setzen an ihren Anfang A die endliche Strecke BA, so erhalten wir wieder eine von B ausgehende Gerade BO, in welcher das hinzukommende gerade Stück nicht die geringste Änderung in Bezug auf die ‚Gröfse' hervorgebracht hat, was daraus erkannt wird, dafs man die neue Gerade zur völligen Kongruenz mit der alten bringen kann; der Gewinn, den sie durch das hinzugekommene Stück BA erhalten hat, ist zwar real vorhanden und unbestreitbar, verschwindet aber völlig, wenn man blofs auf das den beiden Linien AO und BO anhaftende Accidens der Gröfse achtet. Wer hier wie überhaupt bei aktual unendlichen Quantitäten einen Verstofs gegen das Widerspruchsprinzip findet, irrt durchaus, indem er den abstrakten Charakter der ‚Gröfse' aus dem Auge verliert und sie fälschlich mit der substanziellen Entität des vorliegenden Quantums identifiziert." C. erklärt es für falsch (S. 32), wenn man voraussetzt, eine aktualunendliche Zahl müsse notwendig (weil man bei endlichen Zahlen daran gewöhnt ist) eine ihr zunächst vorhergehende ganze Zahl haben, aus welcher sie durch Hinzufügung einer Eins hervorginge. Diese Voraussetzung sei z. B. weder an der kleinsten (transfiniten) Kardinalzahl, die er ω nennt, noch an der kleinsten „Ordnungszahl" (was bei C. nicht dasselbe ist wie eine Ordinalzahl primus etc.) erfüllt; ihnen gingen die endlichen Kardinal- bez. Ordnungszahlen voran, von denen keine die gröfste sei. Verschiebe man eine unendliche Gerade AO um ein Stück AA', so „(S. 37, 38) verbleibt der unendlichferne Punkt O fest an seinem Platze". „Da die gedachte act. unendl. Gerade AO, ihrer Gröfse nach, der von mir mit ω bezeichneten kleinsten transfiniten Ordnungszahl entspricht, so läfst sich das soeben Behauptete auch in der bekannten, nicht den geringsten Widerspruch involvierenden Gleichung $1 + \omega = \omega$ wiederfinden, wo auf der linken Seite $1 = AA'$ die Bedeutung des Augendus, $\omega = AO$ die des Addendus hat. Dagegen ist allerdings $\omega + 1$, wo ω als Augendus, 1 als Addendus figurieren, wie aus den Prinzipien meiner ‚Grundlagen' geschlossen wird, eine von ω verschiedene transfinite Zahl, nämlich die auf die kleinste ω nächstfolgende ganze tansfinite Ordnungszahl." An anderer Stelle (ebenfalls in: Zur Lehre vom Transfiniten, S. 61) sagt C.: „unter einer endlichen Menge verstehen wir eine solche M, welche aus einem ursprünglichen Elemente durch successive Hinzufügung neuer Elemente derartig hervorgeht, dafs auch rückwärts aus M durch successive Entfernung der Ele-

mente in umgekehrter Ordnung das ursprüngliche Element gewonnen werden kann." Wenn man dies den unendlichen Zahlen aberkennt, dann allerdings paſst es nicht mehr für diese unendlichen, und es kann eine aktual unendliche Menge immer so beschaffen sein, daſs, wie C. auf S. 61 sagt, auf mehrfache Weise ein Bestandteil von ihr bezeichnet werden kann, der ihr äquivalent ist.

Ein aktual Unendlichkleines erklärt C. für falsch. „(S. 54) die erste (nämlich Verwechselung) tritt unter anderem dort auf, wo man, wie es z. B. Poisson (traité de Mécanique, 2. éd. t. I, p. 14) gethan hat, die sogenannte Differentiale als aktualunendlichkleine Gröſsen auffaſst, obgleich sie nur die Deutung veränderlicher, beliebigklein anzunehmender Hilfsgröſsen zulassen, wie schon von beiden Entdeckern der Infinitesimalrechnung, Newton und Leibniz (?) bestimmt ausgesprochen worden ist (auch konsequent von Leibniz an allen Stellen?). Dieser Irrtum kann, dank Ausbildung der sogenannten Grenzmethode, an welcher die französischen Mathematiker, unter Führung des groſsen Cauchy, so ruhmvoll beteiligt sind, wohl als überwunden angesehen werden". (?) „Erst in diesem Winter (S. 50) fand ich die Zeit dazu, meine diesen Gegenstand betreffenden Ideen in die Gestalt eines förmlichen Beweises zu bringen. Es handelt sich um den Satz: Von Null verschiedene lineare Zahlgröſsen ζ (d. h. kurz gesagt, solche Zahlgröſsen, welche sich unter dem Bilde geradliniger stetiger Strecken vorstellen lassen), welche kleiner wären, als jede noch so kleine endliche Zahlgröſse, giebt es nicht, d. h. sie widersprechen dem Begriffe der linearen Zahlgröſse". Der Beweis wird leider nicht vollständig mitgeteilt, sondern gesagt (S. 51) „ich beweise nun aus dem Begriff der linearen Gröſse und mit Hilfe gewisser Sätze der transfiniten Zahlenlehre, daſs $\zeta \cdot \nu$ kleiner ist als jede noch so kleine endliche Gröſse, wenn ν irgend eine noch so groſse transfinite Ordnungszahl (d. h. Anzahl oder Typus einer wohlgeordneten Menge) aus irgend einer noch so hohen Zahlenklasse bedeutet. Dies heiſst aber doch, daſs ζ auch durch keine noch so kräftige aktual unendliche Vervielfachung endlich gemacht werden kann". (Wie aber, wenn der Faktor des Unendlichkleinen für eine unendliche Gröſse erklärt wird, welche sich nicht den Vorschriften der sogenannten transfiniten Zahlen unterordnet?)

Über den Zusammenhang des „Transfiniten" mit dem Potential-U. sagt C. z. B., es müsse rühmend hervorgehoben werden (S. 33), „daſs Herr Prof. Gutberlet (in seinem Werke: das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet, Mainz 1878) auf die Abhängigkeit des potentialen Unendlichen von einem zu grunde liegenden A. U. hinweist. Dagegen finde ich aber an verschiedenen Stellen bei Gutberlet

die durchaus unhaltbare Thesis ausgesprochen, daſs „im Begriff der unendlich gedachten Gröſse der Ausschluſs aller Möglichkeit der Vermehrung“ liege. Dies kann nur in bezug auf das absolut Unendliche zugestanden werden usw“. „(S. 31, in der Polemik gegen Herbarts wandelbare Grenze, jenseits deren immer noch etwas zu finden ist) Die weite Reise, welche Herbart seiner „wandelbaren Grenze“ vorschreibt, ist eingestandenermaſsen nicht auf einen endlichen Weg beschränkt; so muſs denn ihr Weg ein unendlicher, und zwar, weil er seinerseits nichts Wandelndes, sondern überall fest ist, ein aktual unendlicher Weg sein. Es fordert also jedes Potential-Unendliche (die wandelnde Grenze) ein Transfinitum (den sicheren Weg zum Wandeln) und kann ohne letzteres nicht gedacht werden“. Was heiſst aber Erfordern? Liegt dabei ein Sprung oder Nichtsprung oder keines von beiden vor? „(S. 29) Unter Umständen und in gewissem Sinne kann das Transfinite auch als feste Grenze gedacht werden. Daher irrt Wundt auch darin, wenn er glaubt, das Transfinitum habe keine physikalische Bedeutung, wohl aber das Potential-Unendliche; streng genommen ist das Gegenteil hiervon richtig, weil das Potential-Unendliche nur Hilfs- und Beziehungsbegriff ist und stets auf ein zu grunde liegendes Transfinitum hinweist, ohne welches es weder sein noch gedacht werden kann“. „(S. 50) Es war das unglückliche Versehen Fontenelles, das Transfinite innerhalb der Zahlenreihe $1, 2, 3 .. \nu ..$, wenn auch gewissermaſsen am Schlusse derselben (der ihr ja fehlt) zu suchen; indem er auf diese Weise seinen unendlichen Zahlen von vornherein einen unlöslichen Widerspruch mitgab, war das Schicksal seiner unfruchtbaren Theorie entschieden; sie muſste vor einer durchaus berechtigten Kritik das Feld räumen (vergl. Maclaurin, traité de fluxions). Wenn aber letztere durch die Totgeburt der Fontenelleschen unendlichen Zahlen sich auſserdem verleiten lieſs, über die aktual unendlichen Zahlen ganz allgemein den Stab zu brechen, so weiſs ich, daſs sie ihrerseits durch die Thatsache meiner, von den Fontenelleschen total verschiedenen, vollständig widerspruchsfreien Theorie widerlegt ist“.

Ist eine Theorie vollständig widerspruchsfrei, so wäre das nicht ein Grund dafür, daſs die darin behaupteten Gröſsen wirklich vorhanden sind, sondern daſs sie möglich sind; freilich müſste beim Unendlichen sich die Freiheit von Widersprüchen so weit erstrecken, daſs auch alle anderen Schwierigkeiten, z. B. im Grenzbegriffe oder Potential-Unendlichen in einer Weise weggeräumt würden, die in jene Theorie nicht etwa wieder Schwierigkeiten hineinbringt. Cantor fügt Einiges zum Nachweis des Transfiniten hinzu, nämlich den Gottes-

begriff nnd die irrationalen Zahlen. Von theologischer Seite wird ihm geantwortet, was er S. 22 abdruckt: „In Ihrem werten Schreiben an mich sagen Sie nämlich erstens richtig —, ein Beweis geht vom Gottesbegriffe aus und schliefst zunächst aus der höchsten Vollkommenheit Gottes Wesens auf die Möglichkeit der Schöpfung eines transfinitum ordinatum. — Zu meinem Bedauern gehen Sie weiter und schliefsen ‚aus seiner Allgüte und Herrlichkeit auf die Notwendigkeit einer thatsächlich erfolgten Schöpfung des Transfinitum'". C. sagt (S. 23), diese Notwendigkeit sei von ihm nicht so verstanden gewesen, dafs dadurch etwa die absolute Freiheit Gottes in Frage käme; der von ihm angedeutete apriorische Beweis für die thatsächlich erfolgte Schöpfung scheine aber bei richtiger Deutung seiner Argumentation eine weitere Erwägung und Prüfung zu verdienen. „(S. 35) Man kann unbedingt sagen: die transfiniten Zahlen stehen oder fallen mit den Irrationalzahlen; sie gleichen einander ihrem innersten Wesen nach, denn jene wie diese, sind bestimmt abgegrenzte Gestaltungen oder Modifikationen des aktualen Unendlichen". Trotz des Widerspruchs gegen Fontenelle sagt er: (S. 34) „Allerdings kann ω gewissermafsen als die Grenze angesehen werden, welcher die veränderliche ganze Zahl ν zustrebt, doch nur in dem Sinne, dafs ω die kleinste transfinite Ordnungszahl d. h. die kleinste festbestimmte Zahl ist, welche gröfser ist als alle endlichen Zahlen ν, ganz ebenso wie $\sqrt{2}$ die Grenze von gewissen veränderlichen, wachsenden rationalen Zahlen ist, nur dafs hier noch dies hinzukommt, dafs die Differenz von $\sqrt{2}$ und diesen Näherungsbrüchen beliebig klein wird, wogegen $\omega - \nu$ immer gleich ω ist usw." ω habe ebensowenig Spuren der ihm zustrebenden Zahlen ν an sich, wie $\sqrt{2}$ irgend etwas von den rationalen Näherungsbrüchen. Mit dieser Parallelen ist freilich nicht etwa die Existenz des Transfiniten bewiesen, abgesehen von etwaigen Einwänden gegen diese Parallele bei anderer Auffassung des Irrationalen. Man fragt doch wieder: warum ist das Aktual-Unendliche „(S. 53) die durch ein Gesetz begrifflich durchaus bestimmte Menge aller ganzen endlichen Zahlen ν", während die Gröfse x, wenn sie die Zahlwerte $1, 2 \ldots \nu$ durchläuft, ein Potential-Unendliches vorstellen soll.

In seiner Kritik anderer bezüglicher Arbeiten z. B. solcher von H. v. Helmholtz und Kronecker (S. 16—19) sagt C., es trete in den Arbeiten dieser beiden Gelehrten „das gegnerische Prinzip gegen das aktuale Unendliche offen zu tage und da anerkanntermafsen selbst die „endlichen" Irrationalzahlen ohne entschiedene Heranziehung aktualunendlicher Mengen wissenschaftlich nicht zu begründen" seien („C. Grundlagen S. 21"), so wären die Bestrebungen beider darauf

gerichtet die Irrationalzahlen mit Hilfe ihnen geeignet erscheinender, künstlich ausgedachter Subsidiärtheorien durchaus „unnötig" und überflüssig zu machen. Er wendet sich gegen vielfache wider die transfiniten Mengen gemachten Angriffe z. B. von W. Wundt (S. 9), zitiert dafs die Möglichkeit aktual unendlicher Zahlen ausgesprochen werde von Sigwart, K. Fischer, und dafs Gaufs sich gegen die Heranziehung in die Mathematik, dafs Pascal sich für dieselben (unter Reserve wegen Beschränkung des menschlichen Geistes) ausspricht, Descartes, Spinoza, Leibniz, Locke, auch Lotze das A. U. in concreto bejahen, in abstracto verwerfen, einige auch umgekehrt (ein Teil der Neuscholastiker), während Cantor beides „vielleicht als erster mit voller Bestimmtheit und in allen Konsequenzen" vertrete.

Von Kant sagt er (S. 8), „es dürfte kaum jemals mehr zur Diskreditierung der menschlichen Vernunft und ihrer Fähigkeiten geschehen sein, als mit diesem Abschnitt der ‚kritischen Transcendentalphilosophie'" (Antinomien der reinen Vernunft), Kant habe nur durch einen „vagen, distinktionslosen Gebrauch des Unendlichkeitsbegriffes (wenn unter solchen Verhältnissen überhaupt noch von Begriffen die Rede sein kann)" seinen Antinomien Geltung verschafft.

Zweifellos ist es schwierig ein bisher nicht existierendes, „ganz neues Zahlengeschlecht" zu widerlegen, und es ist richtig, dafs man bei Beweisen wider die Möglichkeit aktual endlicher Zahlen nicht „(S. 3) von vornherein den in Frage stehenden Zahlen alle Eigenschaften der endlichen Zahlen zumuten oder vielmehr aufdringen" dürfe. Wird wirklich eine Lehre widerspruchslos durchgeführt und gelingt es wirklich zu zeigen, dafs aufserhalb ihres Rahmens das Unendliche mit Schwierigkeiten oder Widersprüchen nicht mehr vorkommt, dann allerdings ist eine solche Lehre hinreichend begründet und braucht nicht bewiesen zu werden (was bei Grundelementen überhaupt eine sehr zweifelhafte Sache ist), sondern ist — möglich. Ob dies auf die Lehre vom Transfiniten zutrifft oder besser auf andere Darstellung des Unendlichen, mufs dem überlassen werden, der prüft und daraus versucht selbst in sich die Schwierigkeiten des Unendlichen zu bezwingen. Auch aus Cantors Lehre sieht man wieder, dafs bisher von Einigkeit oder entschiedenem Siege einer Ansicht nicht die Rede sein kann, nicht einmal davon, dafs die Mathematiker einig wären, ob man in ihrer Wissenschaft ein eigentlich Unendliches verwenden dürfe. Der Versuch irgend eine Ansicht systematisch streng und zusammenhängend durchzuführen, ist jedenfalls dankenswert; auch bei Cantor wäre eine systematische umfangreiche Darstellung an Stelle

einzelner Aufsätze mit Dank zu begrüfsen. Eine Fortsetzung jener Abhandlungen ist bis heute nicht erschienen.

Durch Cantors Arbeiten bin ich erst jetzt nach Niederschrift alles Vorstehenden auf das Buch von Prof. Dr. Gutberlet aufmerksam geworden. (Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet, Mainz 78), aus dem ich Folgendes citiere.

S. 113. Die Lösung der Schwierigkeit der Stetigkeit soll nach ihm allein möglich sein durch Differentialrechnung oder vielmehr durch die Principien, auf welche sie sich stützt. Es wird citiert: Ohm (Geist der math. Analysis II, 67): „Die Existenz der unendlichkleinen Zahl kann, solange wir eine Stetigkeit der Gröfsen zulassen, nicht bezweifelt werden, wenn uns auch der Ziffernausdruck fehlt." S. 115 sagt Gutberlet: „Die kleinsten Teile — der wirklich, (in Gottes Erkenntnis) in aktual unendlichviele Theile getheilten stetigen Gröfse — sind noch theilbar innerhalb des Gebietes des Unendlichkleinen, und nicht mehr theilbar d. h. nicht in endlich grofse Theile." Man könne also in einer Beziehung sagen, sie seien teilbar, in der anderen, sie seien nicht teilbar. „Sind die letzten Theile des Stetigen noch etwas oder sind sie nichts? Sie sind nichts im Gebiete der endlichen Linie, Fläche usw., sie sind aber noch etwas 1. im Gebiete der Linie, der Fläche und überhaupt innerhalb der Gröfse, wovon sie die Elemente sein sollen und deren Wesen sie also nicht verlieren können, 2. sind sie auch etwas im Gebiete des Unendlichkleinen". „δx bezeichnet zwar eine Null, aber nur im Gebiete des Endlichen. (S. 117). „Also (S. 120) nun steht unsere Schwierigkeit noch auf demselben Punkt, auf welchem wir ihre Lösung begonnen haben. Denn nun beginnt die Möglichkeit der Theilung wieder von neuem, nicht zwar im Gebiete des Endlichen, wohl aber im Gebiete des Unendlichkleinen." „Es giebt ja ein Unendlichkleines höherer Ordnung bis zur unendlichsten Ordnung $(\frac{1}{\infty})^{\infty}$". „Man kann nun fragen, nachdem man auch im Gebiete des Unendlichkleinen bis zu den letzten Theilen vorgedrungen ist, also Theile von der Gröfse $(\frac{1}{\infty})^{\infty}$ erhalten hat, ganz ebenso wie am Anfange: Sind diese Theile noch teilbar oder sind sie es nicht? Sind sie es noch, so sind sie nicht die letzten Theile. Und doch sind nach vollzogener Theilung in $(\frac{1}{\infty})^{\infty}$ kleine Theile kleinere Theile nicht mehr möglich. Sind sie untheilbar, dann läfst sich das Stetige aus ihnen nicht zusammensetzen, wie schon gezeigt wurde." „Mit der Phantasie läfst sich dieser Begriff (Kleinheit ohne Ende) nicht vorstellen, er hat aber „intellektuelle Realität". Oder man zeige uns doch einmal einen Widerspruch in den beiden Begriffen: klein und „ohne Ende". Die Phantasie stellt sich freilich nur endliche Ausdehnung

vor, und wo sie dieselbe nicht findet, ist für sie ein absolutes Nichts (?). Der Verstand aber kann recht wohl — usw." „Die (S. 122) letzten Theile des Stetigen, welche nach unendlichvielen Theilungen der unendlichen Ordnung herauskommen, sind sie noch theilbar oder untheilbar? Sie sind schlechterdings untheilbar (?). Warum? Weil es ein Unendlichkleines, welches kleiner wäre als das Unendlichkleine der unendlichsten Ordnung nicht geben kann. Also sind es Punkte? Mit nichten; sondern es sind die unendlichkleinen Theile der Linie, der Fläche usw., so klein, daſs sie nicht mehr kleiner werden können, selbst nicht im Gebiete des Unendlichkleinen." „Sie sind etwas 1. im Gebiete der Linien, Flächen usw., wovon sie die letzten Elemente sind, und 2. im Gebiete des Unendlichkleinen der unendlichsten Ordnung." „Wir (S. 123) haben durchaus nicht behauptet, daſs $\left(\frac{1}{a^\infty}\right)^\infty$ das absolut und unter jeder Beziehung kleinste Unendliche sei, für dies halten wir das schlechthinnige Null, mit dem sich ebensowenig rechnen läſst, wie mit dem unter jeder Beziehung Unendlichgroſsen. Dieses wie jenes ist nur ein einziges". „Wir (S. 124) sagen nur, daſs in der Theilung des Theiles $\frac{1}{a}$ jener Bruch $\left(\frac{1}{a^\infty}\right)^\infty$ das schlechthin Kleinste und nicht mehr theilbar ist. In der Theilung von $\frac{1}{b}$ aber ist $\left(\frac{1}{b^\infty}\right)^\infty$ das untheilbare, kleinste, das schlechthin unendlich Kleine der unendlichsten Ordnung." Also hätte jede Gröſse ein schlechthin Kleinstes und nicht mehr Teilbares. G. citiert dann Newtons Ausdruck, indem er sagt, daſs soviel Realität z. B. in einer unendlichkleinen Linie, sinus, in der unendlichsten Ordnung, oder in einem unendlichkleinen Bogen derselben Ordnung sei und nicht mehr, nicht nach, nicht vor, sondern im Verschwinden, wie N. sagt. Wenn (S. 127, 8) man frage, ob auch die Punkte, welche man in derselben Anzahl habe, „wie die unendlichvielen Theile der unendlichen Ordnung, welche wir als letzte Elemente des Stetigen annehmen, die Linie ausmachen können, so ist das ganz entschieden zu verneinen. Denn Punkte können noch so sehr vermehrt, keine Linie geben. Aber als Theilungspunkte kann man sie betrachten und dann ebensoviel annehmen, als man Theile hat", (die Erfindung dieses Namens Theilungspunkte als eine ganz besondere Sorte von Punkten kann an sich keine Aufklärung geben) „dann machen aber nicht die Theilungspunkte, sondern die Theile die Linie aus. Fragt man weiter, ob die Theilungspunkte einander berühren oder nicht, so kann man ersteres in dem Sinne sagen, als keine Unterbrechung vorhanden ist und als sie keinen angebbaren endlichen, auch keinen unendlichkleinen (einer angebbaren endlichen

Ordnung) Abstand von einander haben", (Nun sollen sich Punkte dieser eigentümlichen Sorte berühren in Beziehung auf oder für diese gewissen Gebiete, obgleich doch Punkte sonst immer etwas waren, was in allen Gebieten des Unendlichkleinen vorkommen kann und in allen diesen Gebieten richtige Punkte blieben), „man kann aber auch sagen, sie berühren sich nicht, insofern Berühren von Punkten das Zusammenfallen derselben involviert". (Thut es denn das nicht immer? Dann sind doch diese Punkte gar keine Punkte mehr, sondern plötzlich ebensolche Geschöpfe geworden wie die unendlichkleinen Strecken, die in Beziehung auf das Endliche Null sind, sonst aber nicht; kann man sie dann noch Punkte nennen und nicht vielmehr Strecken?) „Sie fallen nicht zusammen, da sie den kleinsten denkbaren Abstand von einander haben." (Ist denn nun ein Abstand nicht mehr mit Punkten zu versehen? G. kommt sofort selbst auf diesen Einwurf). „Kann man wohl zwischen den Theilungspunkten noch andere Punkte fixieren? Theilungspunkte sicher nicht; denn erstens wir stehen an den untheilbaren Elementen" (und dann soll man doch noch von Abstand sprechen dürfen?); zweitens sollten dieselben nochmals getheilt werden, so müfsten die Theile kleiner sein als das Getheilte; kleiner als das Unendlichkleine (der unendlichsten Ordnung) kann es aber nichts geben." (?). „Es kann nämlich einen doppelten Grund der Untheilbarkeit geben; der eine liegt in dem zu Theilenden, wenn es nämlich in sich einfach ist; und diesen Grund fafst man gewöhnlich nur ins Auge, wenn man einfach und untheilbar identificiert. Der andere liegt darin, dafs die Theile, welche herauskommen müfsten, einen Widerspruch in sich enthalten. Letzteres wäre der Fall, wenn die letzten Theile des Stetigen, welche so klein sind, dafs es nichts Kleineres geben kann, in Theile, die doch noch kleiner sein müfsten, nochmals getheilt werden sollten; jene Theile sind nicht einfach und doch untheilbar." (Wer zwingt sie dazu, etwa die Natur, die Physik, Gott? Und wir kamen doch darauf nur durch unser Denken? Und dann sollen wir unserem Denken diesen Widerspruch aufbürden und nun glauben das Unendliche erklärt zu haben?). „Um schliefslich, fährt G. hier fort, jeden Verdacht auszuschliefsen, als ob wir den Boden streng mathematischer Sicherheit in unserer Metaphysik und Mathematik berührenden Ausführung verlassen haben könnten (Würde dies Nichtverlassen etwa die Angelegenheit klar machen?) will ich für Leser, welchen mathematische Lehrbücher weniger zugänglich sind — einige Sätze aus dem mehrerwähnten math. Werke von Lübsen anführen, welche mit dem von uns gefundenen Resultate sich vollständig decken." (Was freilich die letzten Widersprüche nicht besser machen würde).

G. schliefst (S. 129, es folgt das Unendliche in der Vollkommenheit): „So stände denn nichts der Annahme einer unendlichen Menge im Wege, selbst die grofse Schwierigkeit nicht, welche die Beschaffenheit der letzten Elemente machen, die durch die Theilung einer stetigen Gröfse in aktual unendlichviele Theile herauskommen müssen" (?). Sollte diese letzte Schwierigkeit nicht schliefslich die allererste Schwierigkeit der Vorstellung einer Teilung in unendlichviele Teile erster Ordnung wachrufen? Oder falls man doch mathematisch mit Nutzen unendlichkleine Teile irgend welcher Ordnung braucht z. B. der fünften oder der hundertsten oder einer beliebig hohen, sollte nicht bei ihr die Schwierigkeit ebenso gut vorhanden sein, sollte es weniger schlimm sein, wenn man sie in die unendlichste Ordnung verlegt? Das wäre nur dann der Fall, wenn man der unendlichsten Ordnung die Realität absprechen wollte, die man etwa der fünften zuerkennt. Was für einen Zweck hätte es dann aber bei der fünften noch weiter zu teilen? Kann man wirklich bei ihr weiter teilen, so wird die Schwierigkeit auch mitgeschleppt und verschwindet nicht, sie stellt immerwährend, wo sie auch auftreten mag, die Realität aller vorhergehenden mit in Frage; denn das Wirklichweiterteilen gehörte doch dann zur Realität. Darum steht der Annahme der unendlichen Menge dennoch dieselbe Schwierigkeit im Wege, die sich schon im Anfange zeigte. Trotz alledem ist es durchaus dankenswert, wenn einmal, wie durch Gutberlet, die Frage deutlich bis zu diesem Schlusse durchgeführt ist. Nur kann die Lösung auch nicht für das Unendlichkleine der ersten Ordnungen genügen; es fehlt die kritische Behandlung unserer geistigen Fähigkeiten, namentlich der Anschauung des Raumes, es fehlt die Untersuchung, welche Art der Wirklichkeit wir diesen Vorstellungen beimessen dürfen, die metaphysische Realität ist schliefslich doch nur trotz (!) der Widersprüche angenommen.

Der Begriff der Behaftung als vorläufige Lösung der Schwierigkeiten.

Gespräch mit einem jungen Manne.

D. (Der junge Mann). Wieso kann die Sekante einer Kurve zur Tangente werden?

I. (Ich). Man pflegt zu sagen, dafs die beiden Punkte, in welcher sie die Kurve schneiden, einander immer näher rücken sollen und die Gerade zur Tangente werde. Allerdings ist an sich nicht klar, was dies „Schliefslich" heifst.

D. Man sollte denken, daſs die Gerade immer eine Sekante bleibt und immer einen Bogen von der Kurve abschneidet, solange es zwei Schnittpunkte sind.

I. Wenn man aber an eine Kurve auf dem Papiere nach möglichster Genauigkeit eine Gerade heranschiebt, bis sie zum ersten Male irgend etwas mit der Kurve gemein hat, so hat man doch die Vorstellung einer anderen Eigenschaft, als wenn man eine Gerade die Kurve durchschneiden läſst. Nun ist es richtig, daſs eine Zeichnung stets ungenau ist, unsere Vorstellungskraft aber viel genauer arbeitet als Hand und Bleistift, überhaupt als alles, was sichtbar ist. Kann nicht eine Gerade so liegen, daſs sie mit der Kurve etwas gemeinsam hat und doch nicht eine Sekante ist, keinen Bogen abschneidet?

D. Dann müſste sie einen Punkt gemeinsam haben.

I. Wenn sie aber nur einen Punkt gemeinsam hat z. B. bei einer Parabel die schneidende Axe den Scheitelpunkt, wäre es dann eine Tangente, und unterscheidet diese Axe sich nicht wesentlich von einer im Scheitelpunkte angelegten berührenden — mag das auch sein, was es wolle, Sie verstehen schon, welche Gerade ich meine.

D. Ja diese hat eine bestimmte Richtung.

I. Kann man aber sagen, die Tangente habe mit der Kurve einen Punkt gemeinsam und irgend eine Richtung, wodurch sollte diese Richtung denn bestimmt sein, wenn man die Tangente an irgend einer beliebigen Stelle meint. Wollte man sagen, an dem gemeinsamen Punkte hafte eine Richtung, so würde man wieder fragen, was das für eine Richtung sei, könnte sie wieder nur durch eine Gerade angeben, würde also die Tangente durch die Tangente definieren müssen, was ein fehlerhafter Zirkel wäre.

D. Also dann müſsten die beiden Schnittpunkte der Sekante ganz beliebig nahe rücken?

I. Wie nahe? Beliebig? Dann würde es also durch einen Punkt beliebig viele Tangenten geben, jede derselben hätte auſser jenem Punkte noch irgend einen anderen beliebig nahen der Kurve gemeinsam. Oder giebt es nur einen ganz beliebig nahen Punkt?

D. Nein, ich fürchte auch, man hätte kein Recht, dann diese Gerade als etwas Anderes zu betrachten als irgend eine Sekante; es wäre eine Sekante, die einen beliebig kleinen Bogen abschnitte, und dies ist immer noch nicht die Gerade, die, wie man sagt und sich auch vorstellt, nur „berührt". Da weiſs ich mir zunächst nicht zu helfen.

I. Viele Mathematiker neigen dazu zu sagen: die Punkte sollen so nahe rücken, daſs ihre Entfernung kleiner ist als jede beliebige noch so kleine Strecke.

D. Ich weifs nicht, was es nützen soll, zu sagen: kleiner als jede beliebige? Jede beliebige drückt ja schon dasselbe aus.

I. Man meint aber, es könnte vielleicht die beliebig kleine Entfernung immer noch mit anderen bemerklichen und sonst noch in ihrer Ausdehnung betrachteten Gröfsen in Vergleich gezogen werden so wie ein inneres Sekantenstück. Nun will man durch den Zusatz: „kleiner als jede beliebige" verhindern, dafs diese Vergleichung stattfindet.

D. „Kleiner als" ist aber doch auch noch eine Vergleichung!

I. Richtig. Man sagt auch: kleiner als jede noch so kleine Entfernung.

D. Dann sollte man lieber bei „noch so klein" bleiben und gar nicht „kleiner als" zusetzen.

I. Wenn man das thäte, so müfste man sich aber jedenfalls dies „noch so klein" derartig klein vorstellen, dafs es mit den übrigen bei wirklichen Sekanten vorgestellten Entfernungen der Schnittpunkte nicht mehr verglichen würde.

D. In dem Ausdrucke „Noch so klein" steckt immer eine Vergleichung zu anderen, die nicht so klein vorgestellt werden, sogar ein Immerkleinerwerden oder eine ganze Reihe von immer kleineren Gröfsen.

I. Richtig, aber das „kleiner als" soll dann andeuten, dafs man innerhalb dieser Reihe nicht stehen bleiben möchte, wenigstens nicht von irgendeiner vorgestellten Entfernung von Sekantenpunkten auf eine damit vergleichbare oder sich daran anschliessende Entfernung (bei der Tangente) übergehen möchte.

D. Also wäre es gewissermafsen ein Sprung, den man thäte, indem man von irgendwelchen vorgestellten Sekantenpunktentfernungen auf viel kleinere oder besser „noch so kleine" oder gar „kleinere als noch so kleine" überginge. Wenigstens scheint es mir nicht möglich zu sein ganz allmählich ohne einen Sprung von Entfernungen der Sekantenschnittpunkte mit einem Male auf die Entfernung der beiden Punkte bei einer Tangente zu kommen. Bei diesem „Allmählichkommen" bliebe es immer eine Sekante.

I. Richtig. Aber mit dem Sprunge ist es auch solche Sache. Man kann auch von einer Sehne von der Länge 10 m durch einen Sprung auf eine Sehne von 1 cm übergehen und bleibt doch bei Sehnen und bei der Sekantenvorstellung. Und wenn man mit einem Sprunge auf ein Billionstel Millimeter überginge, so hätte man eine Sekante, an die man wieder beliebig viele mit noch kleinerer Sehne anschliefsen könnte und wäre doch nicht bei der Tangente, der einzigen Tangente. Denn gegenüber den vielen Sekanten wäre es doch

wohl eine einzige. Welcher Art soll denn nun dieser Sprung zur Tangente sein?

D. Das weifs ich nicht, aber man käme doch schliefslich zu Null.

I. Dies ist doch nicht geradezu ganz ausgemacht und klar bei einer Tangente; das hiefse ja wieder, dieselbe habe nur einen Punkt mit der Kurve gemeinsam und wir sahen, dafs dies zur Definition der Tangente nicht genügt.

D. Wenn man nun analytisch die Gleichung der Sekante aufstellt, so kann man doch für die Variabelen x und y in der Gleichung der Kurve z. B. der Parabel erstens den einen Schnittpunkt x_1, y_1 einsetzen, dann den Schnittpunkt x_2, y_2; dies giebt zwei Gleichungen ohne Variabele, schliefslich kann man die Gleichung der Geraden durch diese zwei Punkte allgemein aufstellen und mit dieser dritten Gleichung die beiden ersten verbinden, dann erhält man eine Gleichung der Sekante mit einem laufenden Punkte x, y dieser unendlichen Geraden und mit Konstanten, darunter auch die festen Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2. Läfst man nun darin die Differenzen $x_1 - x_2$ und $y_1 - y_2$ immer kleiner werden, so können sie schliefslich gleich Null werden.

I. Ja dann erhält man aber zwei Brüche, die beide gleich 0/0 sind, also jeden beliebigen Wert annehmen können, und es ist eine Willkür, diese beiden Brüche gerade einander gleich zu setzen, wie es geschehen mufs, um die Gleichung der Geraden zu erhalten. Wollte man aber sagen, in diesem Falle wäre 0/0 nicht unbestimmt, so wüfste man nicht warum und müfste dies begründen; dies wäre gerade so wie bei der Annahme eines Schnittpunktes mit der gewissen Richtung. Man könnte ja auch sagen, diese beiden Nullen wären ganz besondere (Eulersche), dann kann man aber geradesogut sagen, es wären eigentlich keine Nullen, sondern etwas ganz anderes; wie jener Berührungspunkt kein Punkt mehr wäre, sondern ein „langgezogener Punkt mit einer Richtung", so wären dies keine Nullen, sondern einfach kleine Gröfsen.

D. Aber wie findet man dann die Gleichung der Tangente?

I. Sie ergiebt sich richtig, wenn wir die Differenz $x_1 - x_2$ und $y_1 - y_2$ sehr klein setzen, so dafs der Bruch $(x_1 - x_2) : (y_1 - y_2)$ nicht 0/0, sondern sicher gleich dem aus der anderen Gleichung entstehenden $(x_1 - x_2) : (y_1 - y_2)$ ist. Dann bleiben aber die kleinen Differenzen $x_1 - x_2$ und $y_1 - y_2$, nennen wir sie δ und ε, zunächst in der Gleichung, und man findet die Gleichung der Tangente richtig, wenn man diese kleinen Gröfsen, als Summanden neben anderen in der Gleichung vorkommenden Gröfsen wie x_1 und x_2 wegläfst.

D. Also doch als Nullen betrachtet?

I. Nein nicht als Nullen, denn wenn sie wirklich Nullen wären, so müfste auch ihr dabei vorkommendes Verhältnis o/o oder unbestimmt werden.

D. Wie kann aber eine Gröfse als Summand als Null betrachtet werden, aber in einem Verhältnisse nicht? Ist das nicht ein Widerspruch?

I. Das sieht zunächst so aus. Aber überlegen Sie einmal! Kann es nicht Sachen geben, die im Verhältnis zu gleichartigen nicht weggelassen werden dürfen, weil sie gegenseitig von Einfluſs sind, aber deren eine wohl weggelassen werden darf, wenn sie neben dritte ganz fremdartige Dinge gestellt wird.

D. Wie kann sie dann fortgelassen werden? Das Fortlassen ist doch immer ein Fehler!

I. Was heifst Fehler? Wenn man z. B. von Gedanken spricht und stellt sich dazu eine einzelne Farbe vor, kann diese dazu gebrachte Farbenempfindung zu den Gedanken etwas hinzutragen, vorausgesetzt, daſs die Gedanken mit den Farben gar nichts zu thun hatten?

D. Die Farbenempfindungen sind aber auch etwas ganz Andersartiges als die bloſsen Gedanken! Eine Zahlendifferenz oder kleine Zahlengröfse δ ist aber etwas ganz Ähnliches wie die anderen Gröfsen x_1 und y_1!

I. Sehr richtig. Wie aber, wenn man zwei Farben anschaut, dann hat man doch Empfindungen, und wenn man nun einen Ton hört, so ist das doch auch eine Empfindung. Also die Empfindungen sind doch gewifs etwas Verwandtes, jedenfalls doch wohl verwandter als Gedanke und Empfindung. Oder wenn man sich zwei Raumlängen und aufserdem eine Sekunde vorstellt, so hat doch wohl die Sekunde keinen vermehrenden Einfluſs auf die Raumstrecken, und doch sind Raumgröfsen und Zeitgröfsen Gröfsen und haben darum viel Verwandtschaftliches.

D. Aber die immer kleiner werdende Strecke oder Zahl geht doch schliefslich an Null heran und ist vorher gröfser als Null und jene Gröfse δ ist doch auch gröfser als Null. Also gehört jene Gröfse δ doch ganz und gar zu derselben Sorte von Vorstellungen wie die anderen Gröfsen x_1 und y_1, d. h. es müfste die Sehne der durch zwei beliebig nahe Punkte gehenden Tangente ganz zu denselben Gröfsen gehören wie das Stück der Sekante, während Null oder ein Punkt etwas ganz anderes wären.

I. Gut, also ein Punkt oder die Null ist jedenfalls eine Vorstellung, die zwar mit den Raumgröfsen und Zahlengröfsen in einer Verwandt-

schaft steht, aber doch entschieden von ihnen sich wesentlich und deutlich unterscheidet. Wie nun, wenn auch jene kleine Strecke der Tangente zu einer Vorstellungsgruppe gehörte, die zwar verwandt wäre mit den Vorstellungen jener Sekantenstrecken, aber doch recht wesentlich verschieden.

D. Dann müfste man doch genau sagen, wieso sie verwandt und wieso verschieden wären.

I. Gewifs. Einen Anfang hätten wir ja bereits damit gemacht, dafs wir sagten: eine Verwandtschaft sei da, insofern das Verhältnis von zwei solchen Gröfsen gleich dem Verhältnisse von zwei Gröfsen der anderen Art sei. Nennen wir die bei den Sekanten vorkommenden Gröfsen kurz endliche und die jedenfalls nicht sichtbaren der Tangente die untersinnlichvorstellbaren Gröfsen (oder unendlichkleinen)! Dann wäre ein ferneres Gesetz: dafs eine einzelne untersinnlichvorstellbare Gröfse zur Vermehrung einer endlichen (als Summand) nichts beitragen könnte, wie etwa ein Ton nichts beiträgt zur Vermehrung einer Farbe!

D. Aber es sieht doch so aus, als ginge man ganz allmählich z. B. von einem cm zu immer kleineren Gröfsen und schliefslich zu den unendlichkleinen über.

I. Wir sahen aber doch schon, dafs man weder von Sprung noch von Nichtsprung reden darf, wenn die Tangente überhaupt etwas anderes als Sekante sein soll.

D. Wovon soll man dann reden?

I. Nennen wir es also eine Fähigkeit des Geistes innerhalb der Raumanschauung zwei verschiedene Behaftungen vorzunehmen, die Behaftung mit endlichen und unendlichen, oder auch zwei räumliche Behaftungen verschiedener Art vorzunehmen.

D. Aber mit dem bloſsen Worte ist doch nichts erklärt.

I. Mit dem Worte nicht, aber das Wort soll nur dazu dienen, um daran zu denken, dafs man hier zweierlei auseinander halten mufs, was in jenem genannten Verhältnis steht, was eine Verwandtschaft hat und doch durchaus nicht durcheinander gebracht werden darf, wie es bisher immer geschehen ist.

D. Es wären also die Schwierigkeiten durch die Einsicht vermieden, die man bisher nicht gehabt hat, dafs sich bei Betrachtung des Raumes, der Zahl oder der Zeit doch noch scharf zu unterscheidende verschiedene geistige Fähigkeiten ergeben, die man bisher nicht genügend unterschieden hat und für dasselbe hielt. Daher stammten z. B. auch die Schwierigkeiten im Problem Achilleus oder darin, dafs man niemals die Thür erreichen kann, wenn man darauf losgeht?

I. Ja, aber es wird noch nicht genug sein mit diesen beiden Behaftungen, vielleicht werden wir zur Annahme von noch mehreren gezwungen.

D. Aber ich sage wieder: wenn man von einem Centimeter zur Null weiter geht, so geht es doch ganz glatt oder kontinuierlich weiter.

I. Können Sie sich einen Menschen denken, der sich zwar viele und meinetwegen auch beliebigviele immer kleinere Stücke vorstellen kann? Ist es nun schon richtig, dafs der Mensch allein hierdurch auch die Idee haben mufs, dafs diese Teilung niemals aufhört? Oder ist nicht vielmehr dieses Zusetzen des „Niemals" noch etwas Neues?

D. Das scheint mir aber schon in jener Teilung zu liegen.

I. Ich meine, wenn der Mensch fähig ist sich jetzt einen Teil vorzustellen und nun wieder fähig sich einen noch kleineren vorzustellen und dann wieder einen noch kleineren usw., sobald man ihn auffordert oder sobald er selbst will, heifst dies schon ganz dasselbe als wenn man sagt: ein Mensch kann nun auch plötzlich alles übersehen und behaupten: ich brauche mit dieser Teilung niemals aufzuhören. Es könnte ja ein beschränktes Geschöpf sich immer nur darauf beschränken sich Teile und immer wieder Teile vorzustellen, niemals aber den Gedanken fassen, dafs diese Teilung nicht aufhöre.

D. Wenn das Geschöpf so stumpfsinnig ist niemals einen allgemeinen Gedanken zu fassen, dann ja.

I. Nein, wenn es auch allgemeine Gedanken fassen kann, so brauchte es doch für diesen Gedanken, dafs es nie (!) aufhört, noch etwas ganz Besonderes, was noch nicht in dem blofsen Überschauen der bis dahin ausgeführten Teilung und in dem Bewufstsein dieser Thätigkeit liegt. Es ist noch etwas anderes zu sagen, man könne etwas oft thun und nochmals thun und beliebig oft thun (Notabene solange die Gelegenheit und die Kräfte reichen), und zu denken, man könne es immer thun, die Kraft der Anschauung oder die Fähigkeit der Anschauung reiche aus oder sei so beschaffen, dafs dieser Idee des Nichtaufhörens nichts im Wege steht. Sie ist da als etwas Besonderes. Und man soll anerkennen, dafs es etwas Besonderes ist, wenn man sagt, man kann im Raume kontinuierlich weiterschreiten! So schnell man auch dies Weiterschreiten ausführt, vielleicht steckt bei gründlicher Zerlegung der Sache viel mehr darin, als man bisher bei weniger gründlichem Untersuchen erkannt hat. Dann hätte man eine geistige Entdeckung, und es wäre schön, wenn sie vermöchte über die Schwierigkeit des sogenannten Unendlichen, der Tangente usw. hinwegzuhelfen. Wäre solche Unterscheidung nicht klarer als die besondere Sorte von Nullen, die wieder der Erklärung bedürfen,

oder als der Augenblick des Verschwindens bei Newton, bei dem man nicht weifs, was das sein soll: etwas, was noch nicht verschwunden ist, aber auch nicht vor dem Verschwinden steht, was in einem Augenblicke, einem Zeitpunkte sein soll und doch Ausdehnung haben mufs, oder was ein Verhältnis hat, das sich einem Grenzwerte nähern soll? Haben wir es bei den Behaftungen auch noch mit solchen Ausdrücken wie Verschwinden, Nähern, Grenzwert zu thun? Oder nicht vielmehr mit etwas, wofür es andere unzweifelhafte Analoga im Geiste giebt?

D. Wenn Sie das so sagen, kann ich es nicht widerlegen. Aber vielleicht möchte mancher doch lieber die Tangente ganz aufgeben und nur Sekanten anerkennen, auch in der Gleichung der Sekante die Gröfsen δ und ε stehen lassen oder höchstens der Einfachheit halber weglassen, was ja nur einen kleinen Fehler gäbe.

I. Die Tangente sollte also dann eine Sekante sein wie jede andere d. h. mit einer Sehne, die ganz in die Sehnen der Sekanten eingeordnet würde; das Weglassen wäre dasselbe, als hätte eine Sekante keine Sehne?

D. Ja.

I. Dreht man eine aufserhalb eines Kreises liegende Gerade, bis sie Sekante wird, so schneidet sie also sofort einen Bogen ab, der nun auf jener Seite der Sekante liegt, von wo sich die Gerade herangbewegt hat. Auf diesem Bogen lassen sich doch beliebigviele Punkte vorstellen, durch welche andere, vorhergehende Lagen der Geraden gehen. Sicherlich giebt es doch Lagen, bei denen der Kreis noch nicht geschnitten wird — müfsten dann einmal die Sekanten anfangen, also eine bestimmte Lage die erste Sekante vorstellen?

D. Ich weifs nicht, ob man von einer ersten sprechen kann. Vielleicht fangen die Sekanten nicht plötzlich an, aber es giebt ein Gebiet, wo noch keine sind, und ein anderes, wo es welche giebt.

I. Und zwischen diesen Gebieten also keine bestimmte angebbare Grenzlage?

D. Nein, wenn man von der äufseren Seite kommt, so kann man sich immer wieder kleinere Abstände denken, die nie Null werden (wie bei den Problemen der Alten), und von der inneren Seite auch immer wieder neue Lagen mit immer kleiner werdenden Sehnen ohne Aufhören.

I. Allerdings kann man sich dies bei einer gewissen Anschauungsweise so vorstellen; aber dieselbe steht in sonderbarem Gegensatze zu der anderen Anschauung, dafs man bei Bewegung thatsächlich von einem Gebiete in das andere kommt. Mit Hilfe der Behaftung ist das lösbar, bei einer bestimmten Behaftung mit dem Endlichen z. B.

gelangt man mit Hilfe von endlichen Stücken von einem Gebiete in das andere, denkt alsdann freilich nicht an eine unendliche Annäherung. Bei der Behaftung mit dem Unendlichkleinen ersten Grades stellt man sich die Bewegung ebenfalls in Teilen, aber in unendlichkleinen vor usw.

D. Aber wir wollten ja sehen ohne Behaftung auszukommen.

I. Also dann müssen wir doch sagen, es sei eine Sekante mit sehr kleinem Bogen vorgestellt; auf sie kann man z. B. bei einem Kreise ein Lot vom Mittelpunkte fällen, dieses mufs den Bogen erst treffen, wenn es über den Schnittpunkt mit der Sehne hinaus verlängert ist (denn der Radius oder die Hypotenuse ist länger als die Höhe oder Kathete). Solcher Schnitt mit dem Bogen ist jedenfalls nach der Definition des Kreises da. Nun giebt es also jedenfalls eine zur genannten Sekante gelegte Parallele durch den Endpunkt jenes gleich r gemachten Lotes. Ist diese Parallele auch eine Sekante?

D. Vielleicht könnte sie auch den Kreis noch in zwei Punkten schneiden?

I. Dann würden die Radien nach diesen Punkten senkrecht auf der Geraden stehen müssen, zum wenigsten der eine; also hätte man ein gleichschenkliges Dreieck mit einem rechten Basiswinkel.

D. Vielleicht giebt es bei so kleinen Unterschieden ein solches Dreieck — —

I. Ja, aber dann sind wir in ein Gebiet gelangt, in dem die Geometrie des Endlichen nicht mehr richtig ist, und müssen so kleine Strecken wie diese Sehne durchaus als etwas Andersartiges als die anderen Sehnen bezeichnen. Jene Gerade ist also doch nicht mehr eine Sekante wie alle anderen! Auch würde es mehrere geben mit verschiedenen solchen unendlichkleinen Abschnitten.

D. Dann will ich lieber annehmen, es gebe doch eine Lage der bewegten Geraden, wo sie plötzlich eine Sekante wird, also eine einzige erste solche Lage.

I. Diese erste Lage kann nun aber keinen Bogen abschneiden, sonst gebe es ja vorher noch andere!

D. Nun dann möge sie eine kleine Gerade mit dem Kreise gemeinsam haben.

I. Das heifst, es wäre erstens keine der gewöhnlichen Sekanten mehr, und zweitens müfste die krumme Linie aus derartig kleinen geraden Strecken zusammengesetzt sein, deren Anfangs- und Endpunkt man aber nicht wüfste und deren Richtung auch nur durch den Begriff der „Tangente" als Nichtsekante vorstellbar wäre. Sehr schlecht endlich vertrüge sich dieses „plötzlich" mit der vorhergehenden thatsächlichen Vorstellung des Kontinuierlichen d. h. dem nichtplötzlichen

Übergange, sondern der Vorstellung von immer noch wieder vorhandenen kleinen Abständen. Alle diese Fälle vereinigen sich gut bei Annahme der Behaftungen: bei Beschränkung auf irgend eine Behaftung darf man von plötzlichem Eintreten sprechen und darf sich auch eine gemeinsame Strecke von Kreis und Gerader vorstellen, welche aber sofort wieder in ein krummes Linienstück und eine gerade Strecke auseinanderfällt, wenn man weitere Behaftungen anwendet. (Das Genauere lehrt der mathematische Teil dieses Buches.)

Führen die Behaftungen von neuem in die alten Schwierigkeiten?

Durch die Annahme, dafs bei den Mannigfaltigkeiten eine besondere geistige Thätigkeit die Vorstellung des Endlichen und Unendlichen erzeugt, erschienen uns die Widersprüche des Unendlichen entfernt. Wie ist es aber möglich, könnte man fragen, solche seit Jahrtausenden die Menschheit quälenden Schwierigkeiten einfach durch eine derartige Zerlegung fortzuschaffen? Sollte dies nicht etwa eine bloſse Verschiebung sein, ein Fortrücken an eine andere Stelle, wo sie zunächst nicht mehr zu tage treten?

Es ist schon bei mancher Lehre eine derartige scheinbare Lösung vorgekommen. Ein Geist wie Leibniz suchte die Schwierigkeit der gegenseitigen Einwirkung selbständig gedachter Wesen, der Monaden, dadurch zu lösen, dafs er die jetzige Wechselwirkung zwischen ihnen leugnete, die Übereinstimmung in den Vorgängen durch prästabilierte Harmonie erklärte und endlich auf die Frage, wie diese Harmonie ohne gegenseitige Einwirkung möglich sei, erklärte, Gott habe die Vorgänge in den einzelnen Monaden von Anfang ab derartig vorausbestimmt, dafs sie wie genau gleichgehende Uhren übereinstimmend weiter thätig seien. Man hat bald eingesehen, dafs damit die Schwierigkeit nur in eine frühere Zeit verlegt ist und dafs die Allmacht Gottes schliefslich ebensowohl jetzt und stets die Wechselwirkung zwischen den Wesen zu stande bringen könne wie damals. Damit ist aber auch die denkgemäfse Erklärung der Wechselwirkung, welche erstrebt wurde, gescheitert. Wie wenn auch unsere Lösung der Schwierigkeiten des Unendlichen, das Zerlegen in Behaftung nur eine ähnliche Verschiebung wäre?

Halten wir uns an ein Beispiel! Auf zwei gleichlangen Strecken liegen erstens gleichviel, zweitens verschiedenviel unendlichviele Punkte; wir sagten, sie würden nur behaftet mit der Punktvorstellung,

die Strecke selbst enthielte keine Punkte. Mag nun auch die Vorstellung der gleichen Strecken ohne die vielen Punkte möglich sein, soviel ist doch gewifs, dafs ebenso wie diese Vorstellung auch die Behaftungsfähigkeit etwas Geistiges ist; wir können also geistig durch Behaftung die Vorstellung der gleichen Strecken mit gleichviel unendlichvielen Punkten herstellen; ein zweites Mal können wir auch die Strecken mit verschiedenviel unendlichvielen Punkten behaften; beide zusammengesetzten Vorstellungen befinden sich nun im Geiste, man kann sie vergleichen, ja sogar zusammenfassen, indem man doch weifs, dafs es dieselben Strecken sein sollen, und kann auch ganz gut die erste mit der zweiten Punktebehaftung zu einem Gesamtbilde zusammenfügen. Haben wir da nicht sofort wieder die Schwierigkeit ebenso, als wenn wir blofs annehmen, es lägen da vor uns die beiden Strecken und enthielten jene Scharen von Punkten?

Oder die Schwierigkeit der Tangente soll gelöst sein, wenn man sagt, eine Sekante, die durch unendlichnahe Punkte der Kurve gehe, werde in der zweiten Dimension nicht mehr mit unendlichkleinen Gröfsen zweiten Grades behaftet (Höhe des wesenswichtigen Dreiecks gehört einer Behaftung an, die nicht mehr hinzugezogen wird). Der Bogen ist bei dieser Behaftungsweise eine kleine Gerade, und nur insofern heifst diese Sekante eine Tangente. Nun ist man aber auch im stande die Behaftung anderer Ordnungen hinzuzuziehen, dann ists in Bezug auf diese Vorstellung eine Sekante, welche ein als krumm vorgestelltes Stück abschneidet. Kann man nicht auch hier beide Vorstellungen zusammenfassen? Und hat man dann nicht wieder den Widerspruch der Tangente ebenso, als wenn man annimmt, es gebe einfach bei jeder vorhandenen Kurve an bestimmter Stelle Tangenten?

Wäre dieser Einwurf berechtigt, so würde man unsere Lehre ebenso als mifsglückt verwerfen können wie die Monadenlehre bei Leibniz.

Bei diesen Einwürfen sind Fehler gemacht worden. Allerdings können wir sagen: in der Vorstellung der Strecken mitsamt der Behaftung von gleichviel Punkten sind diese Punkte vorhanden, so weit überhaupt die Existenz einer Vorstellung reicht. Es ist auch richtig, dafs unsere Behaftungsfähigkeiten uns zwingen, sobald wir sie alle berücksichtigen, uns auf irgend einer Strecke unendlichviele Punkte (beliebigen Grades) vorzustellen; und diese unendliche Anzahl ist bei dieser Betrachtung eine unbestimmte (bedingt durch den Gegensatz des Endlichen und Unendlichen); wenn wir uns aber vorstellen, es lägen auf beiden Strecken gleichviele unendlichviele Punkte, so ist dies nur richtig, sofern die Art und Weise (Büschel von parallelen Strahlen)

hinzugedacht wird; nur in diesem Hinzudenken hat die Vorstellung des Gleichviel Bedeutung und Existenz, also die Vorstellung des Verschiedenviel nur in dem Hinzudenken der divergierenden Strahlen mit bestimmtem Ausgangspunkte. Auch die Vorstellung der krummen Linie hat nur Sinn und Existenz, soweit man die zweite Dimension und die Verhältnisse der Gröfsen in beiden Dimensionen hinzuzieht (siehe die früheren Besprechungen!). Durch Beschränkung auf gewisse Behaftungen besteht die Kurve aus unendlichkleinen geraden Strecken und besitzt Tangenten, nur hierin besteht der Begriff der Tangente in scharfem Unterschiede zur Sekante. Durch Weglassung der Beziehungen, durch Nichterkennen dessen, was wir dabei thun (der Behaftungsarten) entstehen die Widersprüche. Sobald wir uns Sekanten vorstellen und zugleich die krummen Stellen der Kurve in beliebigen Unendlichkeiten klein werden lassen, so können wir nicht widerspruchslos auf die Tangente kommen, die Tangente enthält in sich die Beschränkung auf bestimmte Behaftungen. Der Geist ist wohl imstande das eine Mal gewisse Behaftungen vorzunehmen, das andere Mal andere oder alle und dann obenein noch beide Vorstellungsbilder zusammenzufassen. Letzteres thun die Menschen seit altersher mit derartiger unwillkürlicher Schnelligkeit, dafs sie bis heute gar nicht gemerkt haben, wie verschiedenartige Thätigkeiten sie da zusammenbringen. Würden sie sich nun dessen bewufst werden können, so würden sie auch die Widersprüche in ihren Anschauungen und logischen Auseinandersetzungen jener Probleme vermeiden können. Da sie es aber nicht konnten, so entstanden die Schwierigkeiten.

Man könnte versuchen einzuwerfen: wenn man sich doch auf zwei Strecken erstens gleichviel Punkte, dann durch Zeichnung des anderen Strahlenbüschels verschiedenviele vorstellt, so wird man nun auch die Strahlenbüschel fortlassen können, und hat dann jene sich widersprechenden Vorstellungen des Gleichviel und Verschiedenviel auf der aufgestellten Geraden. Das ist falsch. Man kann es nicht, ohne Widersprüche hineinzubringen. Kann man von der Vorstellung einer roten Farbe die Vorstellung „Farbe" ganz entfernen? Dann ist es doch auch kein Rot mehr! Es kann eine Nachricht schmerzlich und erfreulich zugleich sein, man kann sich sogar gleichzeitig beider Eigentümlichkeiten bewufst werden. Aber wenn man wegläfst, in welcher Beziehung sie schmerzlich und in welcher sie freudig ist, so entsteht der Widerspruch von „Schmerzfreude", während mit jenen Beziehungen ein Widerspruch nicht da ist. Ähnlich ist es mit den Behaftungen. Natürlich hinken diese Gleichnisse, man möge

sie verstehen und das Unpassende nicht falsch benutzen. Es kann für jemand, der aus dem Sonnenscheine kommt, die Helligkeit des Mondscheines wohl eine Finsternis heifsen, und für einen, der die Bewegung einer Schnecke verfolgt, der langsam fahrende Wagen sehr schnell. Das ist gerade das eigentümliche Wesen unseres Geistes. Er beherbergt den Widerspruch, ohne doch selbst unmöglich zu werden. Wir müssen zugeben, dafs der Begriff des Widerspruchs in unserem Geiste in irgend einer Art real ist. Wir streiten einem widerspruchsvollen Gedanken nicht die Existenz als eines widerspruchsvollen Gedankens ab, sondern den Inhalt. Der Satz des Widerspruchs streitet einer Sache die Realität ab, welche zugleich und in derselben Beziehung das Gegenteil zeigt. In verschiedener Beziehung, bei verschiedener Behaftung fällt auch der Widerspruch des Unendlichen fort. Es kommt also nur darauf an, dafs man die Behaftung erkennt. Dann freilich ist es unsere Aufgabe über das Wesen derselben weiter nachzusinnen.

Weitenbehaftung und Empfindungen.

Gespräch mit einem Psychologen.

Ich. Stellen wir uns vor, es hätte ein Mensch eine Reihe von blofsen Empfindungen oder Erfahrungen, welche empirisch nur durch Empfindungen gemacht würden! Würden einem solchen Menschen dadurch Grenzen oder Begrenzungen mitgegeben sein? Oder sind Sie damit einverstanden, dafs noch etwas Anderes dazu gehört, um die Vorstellungen von Grenzen in einer Mannigfaltigkeit wie etwa der des Raumes zu haben?

S. (Dies sei der Anfangsbuchstabe vom Namen des betreffenden Gelehrten.) Ich möchte sagen, dafs wohl in den Empfindungen etwas läge, was uns dazu veranlafste.

I. Gewifs werden die Empfindungen und die Mannigfaltigkeiten, welche bei oder nach Empfindungen in uns auftauchen, irgend etwas besitzen, das uns veranlafst oder möglich macht überhaupt Grenzvorstellungen zu haben. Aber ich meine, ob die Empfindungen aus ihrem eigenen Wesen heraus das liefern, was wir Grenze nennen.

S. Eine Art von Begrenzung liegt wohl darin, dafs z. B. in der Farbenmannigfaltigkeit Übergänge von einer Qualität zur andern vorkommen.

I. Wenn ein solcher Übergang selbst eine neue, irgendwie von der vorhergehenden verschiedene Farbe sein soll, so könnte man wohl

bloſs sagen, es sei die erste und ferner diese zweite Qualität usw. durch Empfindungen selbst gegeben, und es fragt sich, ob man eine Empfindung als die Grenze zwischen zwei anderen bezeichnen darf. Vielleicht ist diese Bezeichnung doch nur mittels einer neuen Vorstellung möglich, die zu den bloſsen Empfindungen hinzukommt. Oder man muſs wenigstens sagen, daſs die einzelnen Empfindungen die Vorstellungen des Überganges nicht zeigen, beim geistigen Zusammenfassen der Empfindungen etwas Neues, wenn nicht von auſsen hinzukommt, so doch erst jetzt aus den Empfindungen heraus zum Bewuſstsein kommt. Und diese Vorstellung des Übergangs, die jetzt aus den Empfindungen auftauchen möge, ist dann jedenfalls unterscheidbar von den bloſsen einzelnen Empfindungen. Sie muſs ohne Frage, da eine geistige Zusammenfassung im Bewuſstsein vorliegt, in Berührung treten mit der sogenannten Einheit des Bewuſstseins und allem, was sonst noch hineingehört.

S. Auch einzelne Empfindungen dürften nicht ohne einen solchen Zusammenhang vorkommen.

I. Der Ansicht bin ich auch. Aber alles wissenschaftliche Denken beruht wohl auf der Fähigkeit aus dem zusammenhängenden Ganzen das Einzelne herauszuheben und dann nachher allerdings wieder zu berücksichtigen, inwiefern es mit dem Übrigen zusammenhängt. Was die Empfindungen an sich sind, ist eine Frage der Metaphysik. Widersprüche und Fehler werden besonders dadurch entstehen, daſs man zu wenig genau unterscheidet, was thatsächlich für den Geist in gewisser Art unterscheidbar ist. Sind die Empfindungen vom Übergange oder der Grenze unterscheidbar als etwas in gewissem Sinne Wesensungleiches? Auf dem Gebiete der Farbenmannigfaltigkeit hat man sich mit der Vorstellung von Grenzen nicht entfernt so viel beschäftigt wie auf dem der räumlichen Mannigfaltigkeit. Ohne behaupten zu wollen, daſs die Vorstellung einer Grenze oder meinetwegen eines Überganges in beiden Mannigfaltigkeiten ganz dasselbe wäre, kann ich doch meine Frage auf das Räumliche übertragen und sagen: kommt das, was man mathematisch eine Begrenzung nennt (z. B. Kreislinie als Grenze einer Kreisfläche) in bloſsen Empfindungen vor, also in solchen Empfindungen, die wir haben, indem wir den Raum „kennen lernen"?

S. Das möchte ich nicht behaupten. Solche Empfindungen wie die des Sehens oder die des Fühlens geben uns gleichzeitig mehrere Mannigfaltigkeiten wie Intensität und Qualität —.

I. Aber doch auch die räumliche, und wir werden nach dem vorhin ausgesprochenen Grundsatze der Wissenschaftlichkeit diese von

den anderen als jedenfalls verschieden oder unterscheidbar absondern können. Habe ich nach Ihrer Meinung Recht, wenn ich z. B. behaupte, auch das Sehfeld sei niemals begrenzt, wenn wir auch sagen müssen, daſs wir nie ein unbeschränktes Seh- oder Blickfeld haben? Das Beschränktsein oder Unbeschränktsein ist etwas, das in den bloſsen Empfindungen, die uns zu irgend einer Zeit das Sehfeld liefern, nicht vorkommt, allerdings sich sehr leicht dabei einstellt. Wenigstens als für möglich, also bis jetzt nicht widerlegt möchte ich die Ansicht hinstellen: die Beschränktheit oder Unbeschränktheit ist nicht ein Begriff, der allein aus Empfindungen hervorgeht, sondern zu dessen Entstehen etwas anderes Geistiges nötig ist.

S. Ein Begriff ist natürlich immer etwas Anderes als Empfindungen.

I. Ja, aber wenn wir den Begriff einer Empfindung bilden und andererseits den Begriff des begrenzten Sehfeldes, so haben wir als Material für die Begriffsbildungen im letzteren Falle noch etwas Besonderes hinzugezogen.

S. Ich stimme bei, daſs das Sehfeld an sich in der That nicht die Begrenzung an sich hat, solange wir nur Empfindungskomplexe dazu benutzen. Überhaupt ja — widerlegen könnte ich Ihre Ansicht nicht, es scheint mir wohl so, als ob Sie das einstweilen mit Recht sagen könnten. Aber —

I. Ich habe ganz bestimmte Zwecke dabei, wenn ich diese Möglichkeit aufstelle; es genügt mir also schon für unser Gespräch, wenn Sie gewissermaſsen im Namen der Physiologen von heute bis auf weitere etwaige Widerlegungen oder Schwierigkeiten einverstanden sind.

S. Wir wissen ja darin überhaupt noch nicht sehr viel und man wird gewiſs noch weiter kommen.

I. Nun dann könnte man ja immer wieder mit etwaigen Einwänden kommen und stets diese Möglichkeit von neuem prüfen. Kann man nun weiter behaupten, das Endliche sei dasselbe wie das Begrenzte oder kann man etwa behaupten, das Endliche sei durch die Empfindungen selbst gegeben? Kommt das Endliche z. B. im Sehfelde, soweit nur die Empfindungen dieses liefern, ebensowenig vor wie das Unendliche?

S. Etwas Endliches liegt wohl in den Empfindungen selbst —.

I. Könnte man aber nicht auch sagen: Allerdings, wenn wir Empfindungen haben und Komplexe derselben bilden und dann eine Vorstellung des räumlichen Sehfeldes erlangen, so ist in dieser Vorstellung etwas Endliches; aber ganz von selbst wirkte dabei etwas anderes Geistiges mit, und dies andere Geistige — mag es nun

heifsen wie es wolle — liefert das eigentlich Endliche zu den Empfindungen hinzu.

S. Es liegt aber doch wohl in den Empfindungen etwas Gegebenes, das die Vorstellung des Endlichen veranlafst.

I. Gewifs, aber könnte man nicht behaupten: es sind zwar in den Empfindungen Gründe dafür vorhanden, dafs wir uns Endliches vorstellen; das Objektive oder an sich Seiende oder, wie man es nennen will, was die Empfindungen veranlafst, hat gewissermafsen positive Gründe, positive Beziehungen, die uns mit einer gewissen Notwendigkeit dahin bringen uns Endliches vorzustellen, trotzdem aber liegt diese Vorstellung des Endlichen oder dieses vorgestellte Endliche nicht in jenem Positiven der Dinge, auch nicht in den Empfindungen, sondern wird aus einem anderen Bereiche herangelockt, aus einem Bereiche des Geistes (natürlich nicht örtlich) infolge einer Art von Verwandtschaft.

S. Hierbei ist wohl notwendig, sich überhaupt über das Wesen der Dinge zu äufsern. So möchte ich an Ihre eigene Ansicht erinnern oder wenigstens daran, dafs Sie für eine Möglichkeit hinstellen, es bestehe das Wesen des metaphysisch Wirklichen überhaupt in Verhältnissen. Solche Verhältnisse wären doch auch schon durch Empfindungen in gewissem Sinne gegeben, oder was meinen Sie?

I. Ich meine allerdings, dafs auch dabei schon Verhältnisse mitspielen, die — wie man gewöhnlich sagt — zwischen dem Geistigen und dem Äufseren stattfinden würden. Ich würde freilich, wenn ich jenen metaphysischen Relativismus vorbringen soll, sagen, dafs man logisch bei einem solchen Verhältnisse wie es auch eine Empfindung ist, unterscheiden würde zwischen einem Äufseren und einem Geiste, auf den das Äufsere wirkt, dafs man aber nicht behaupten dürfe, es bestehe an und für sich ein abgesonderter Geist und ein abgesondertes Äufseres, welche nun aufeinander wirkten. Ich würde innerhalb jener relativistichen Ansicht behaupten, dafs es verschiedene Seinsstufen gebe und eine höhere Seinsstufe ein Verhältnis genannt werden könnte, das wieder mit anderen in mannigfachen Beziehungen steht; oder besser, dafs überhaupt kein Verhältnis für sich isoliert bestehe. So würde auch eine Empfindung in Wahrheit wieder in mannigfachen anderen Beziehungen stehen und gerade dadurch zu einer höheren Stufe des Seins zu rechnen sein. Eine solche Beziehung könnte sein, dafs sie sich verknüpft mit der Vorstellung, die man endlich nennt. Man würde dann sagen, man könne logisch eine Art Fähigkeit unterscheiden, die Fähigkeit etwas mit der Weitenvorstellung des Endlichen zu behaften, und man könne in einem niederen Sinne (d. h. nicht als

absolute metaphysische Wahrheit) sagen, der Geist besitze solche Behaftungsfähigkeit; eigentlich freilich müfste es heifsen, in dem Bestehen von Beziehungen, die wir nennen z. B. die Beziehung einer Empfindung zur Vorstellung des Endlichen und in vielen, vielen anderen Beziehungen bestehe erst das, was wir Geist nennen oder als Geist logisch von anderem abzusondern versuchen. Auch innerhalb der Raumvorstellungen sind viele Beziehungen als wesenswichtig zu erkennen, z. B. kann man die Gröfse eines Kreises gar nicht angeben, ja sich nicht einmal vorstellen ohne Vergleichung mit etwas anderem, z. B. einem gleich grofsen oder verschieden grofsen Kreise; und die Angabe, der Kreis habe die und die Gröfse, ist überhaupt nichts weiter als eine Beziehung.

S. Die Empfindungen haben noch manches Andere, was gleich sein kann z. B. Intensität und Qualität.

I. Allerdings, aber es scheint mir, als ob bei jeder Vergleichung vom Geiste gewissermafsen etwas hinzugegeben wird zu den blofsen Empfindungen, etwas, was diesen natürlich nicht ganz fremd, sondern verwandt ist, aber doch recht deutlich von ihnen unterschieden werden kann; durch ein gewisses unbekanntes Band der Seele würde so z. B. die Vorstellung von Gleichheit oder Ungleichheit an Empfindungen, räumliche Gröfsen oder Intensitäten angeknüpft. Sie werden mich nicht mifsverstehen: ich meine natürlich nicht, die Seele sei etwas total Abgeschlossenes, eine Art Substanz.

S. Nein, nein.

I. Es wäre wohl möglich zu sagen, zu einem Verhältnisse gehöre etwas Eigentümliches, der betreffenden Mannigfaltigkeit Wesentliches z. B. Räumliches, aber dieses Eigentümliche sei nicht durch die Empfindung selbst oder deren Komplexe völlig gegeben; das Endliche wenigstens liege nicht schon von selbst in Empfindung oder Empfindungskomplex. Das dürfte ich solange behaupten, als es nicht widerlegt würde; und ich würde es mit Nutzen behaupten, wenn ich auf diesem Wege Schwierigkeiten entfernen könnte, die man sonst nicht lösen kann.

S. Ich bin noch nicht ganz überzeugt, dafs dies beim Endlichen so ist, wenn ich auch die Möglichkeit zugebe.

I. Vielleicht werden Sie lieber beistimmen, wenn ich sage, die unendliche Ausdehnung sei durch die Empfindungen selbst nicht gegeben, sondern es trete eine Art von geistiger Behaftung (dies Wort habe ich mir für mein neues Buch gebildet oder vielmehr in diesem bestimmten Sinne verwendet), der Behaftung mit dem Unendlichen hinzu.

S. Aber es giebt z. B. doch bei der Farbenmannigfaltigkeit die Auffassung, dafs sie wieder in einen Kreis zusammenschiefst, während die Tonmannigfaltigkeit wie eine Gerade in das Unendliche fortgesetzt werden kann, wenn wir es auch nicht hören.

I. Sie meinen, es veranlafsten uns die wirklichen Empfindungen der Töne ganz von selbst zu solcher Fortsetzung, nicht aber die Empfindungen der Farben (obgleich die Vorstellung der Wellenlängen uns auch hierbei zum Unendlichen bringen könnten)?

S. Ja, und es sind also auch wohl Gründe für das Unendliche oder gegen das Unendliche in den Empfindungen da.

I. Gewifs, Gründe werden wohl da sein, wenn wirklich, abgesehen vom Physikalischen, solche Fortsetzung nicht blofs denkbar, sondern auch vorstellbar ist, was mir nicht als sicher bewiesen erscheint. Aber wenn man auch die Empfindungen der höheren Töne in der Vorstellung bis in das Unendliche fortsetzen könnte, so könnte es auch dabei daran liegen, dafs eine andersartige und logisch geistig trennbare Funktion oder Fähigkeit in Thätigkeit gesetzt würde, meinetwegen auch mit Notwendigkeit oder mit Thatsächlichkeit, eine Fähigkeit, die nun erst das Unendliche in die Mannigfaltigkeit hineinbringt oder, wenn Sie wollen, durch das Hinzubringen der Unendlichkeit diese Mannigfaltigkeit zu ihrem eigentümlichen Bilde vervollständigt.

S. Die potentielle Unendlichkeit könnte aber auch schon in den Empfindungen liegen.

I. Kann ich nicht behaupten: diese potentielle Unendlichkeit, die doch in verschiedenen Mannigfaltigkeiten vorkommt, ist an sich keine Empfindung, auch keine reine Folge von Empfindungskomplexionen, sondern als Möglichkeit schon etwas allgemeiner Geistiges, ich will nicht geradezu sagen: eine Kantische Kategorie?

S. Die Kategorie ist auch im Kantischen Sinne etwas von der Anschauung Getrenntes. Und es möchte hier doch wohl eine Anschauungsmöglichkeit vorliegen.

I. Gewifs, nur fragt es sich, ob sie schon durch die Empfindung gegeben ist, oder ob man gut thut sie davon abzusondern, ja sogar sie von der Anschauung in sofern abzusondern, als diese nicht unbedingt die Unendlichkeit enthalten mufs, sondern auch ohne das wenigstens noch als Anschauung gedacht werden kann. Also: mögen auch erst die Empfindungen und die Komplexe derselben die Anschauung hervorrufen oder anregen und mag auch die Möglichkeit ins Unendliche zu gehen, ihren Grund in der Empfindung und der Anschauung mit haben, so könnte es doch sein, dafs diese Möglichkeit auf eine Beziehung zwischen der Empfindung, der Anschauung und andererseits

einer allgemeineren geistigen Fähigkeit hinwiese. Das Unendliche wäre dann nicht allein aus der Empfindung und der Mannigfaltigkeit in der Anschauung hervorgeholt, sondern repräsentierte eine besondere Fähigkeit, die sich ebensogut logisch absondern ließe, wie man die Empfindung ohne Endliches oder Unendliches noch verstehen kann und noch als Empfindung ansehen darf. Wozu das? Es wäre doch wichtig, wenn ich sagen könnte: sobald ich will, darf ich aus der Mannigfaltigkeit diese Behaftung herauslassen, ohne ihren Begriff vollständig zu zerstören. Es mag sein, daß ich hierdurch die Mannigfaltigkeit schmälere oder sie in gewissem Sinne beschränkt auffasse, indem ich hierbei nicht beachte, daß eine Art von Grund in ihr liegen muß zur Anwendbarkeit jener Weitenbehaftung. Aber es kann unter Umständen vorteilhaft sein sich das Räumliche auch einmal vorzustellen, ohne dabei geradezu an das Endliche oder Unendliche darin zu denken. Ja noch mehr, ich würde dann nicht bloß eine gewiße Eigenschaft so streichen, wie man aus einem Begriffe einmal ein Merkmal fortläßt, sondern ich würde behaupten dürfen, daß diese Behaftung nicht wie ein den übrigen gleichwertiges Merkmal durchaus darin stecke, sondern hinzugezogen sei von einer eigentümlichen, besonderen Fähigkeit des Geistes.

Wir sprachen vorhin davon, es komme auch bei der Empfindung eine Intensität vor, die zunehmen und abnehmen kann. Würden Sie der Meinung sein, daß dieses Zunehmen die Kontinuität stets enthalte, oder daß die letztere eine von der Intensität trennbare und darauf durch Behaftung anwendbare geistige Fähigkeit sei?

S. Vieles davon muß wohl die Erfahrung lehren.

I. Die Erfahrung könnte uns wohl sagen, ob uns thatsächlich die Intensität einer Empfindung anders erscheint, als bei einer etwa vorhergehenden Empfindung oder bei mehreren, auch ob ein Größersein der Intensität bei jeder folgenden vorliegt. Wir können auch wohl **bei** einer Erfahrung verschiedener Intensität oder nach einer solchen der Meinung sein, es wären die Intensitäten ohne Sprung aufeinander gefolgt, es könne von einem Sprunge keine Rede sein; wenn wir das nun auch Kontinuität nennen, so ist damit doch nicht ausgemacht, ob diese Vorstellung der Kontinuität in den Intensitäten an sich schon stecke, oder ob nicht der Geist nach bestimmten Gesetzen eine Vorstellung der Kontinuität mit der von Intensitäten verbinde. Man wird kaum angeben können, daß bei einer vermeintlich kontinuierlichen Zunahme der Intensität unendlichviele Intensitätsgrade zum Bewußtsein gekommen wären. Zur Kontinuität aber gehören unendlichviele oder auch unendlichviele zweiten Grades usw. Die Kontinuität, auch wenn

sie bei Empfindungsintensitäten vorkommen soll, ist verknüpft mit der Vorstellung von Einzelheiten. Wie man nun bei den extensiven Gröſsen (Zahl, Zeit, Raum) von Kontinuität sprechen kann, wenn man nur die Behaftung mit dem Unendlichkleinen und -vielen heranzieht, oder, sobald man zum Vorstellen mit dem Unendlichen höheren Grades kommt, sofort auch dieses mit in die Kontinuität hineinfassen würde, könnte man auch die Vorstellung der Kontinuität in der Empfindungsintensität als etwas je nach den Umständen zur Intensität Herangezogenes ansehen.

S. Wenn man das annehmen will, was wohl kaum zu widerlegen ist, so würde man dasselbe auch wohl bei der Qualität der Empfindung suchen müssen.

I. Ja, sobald man sich dazu entschlieſst, derartigviele Übergänge z. B. von der Empfindung eines Rotes bis zu der eines davon deutlich unterscheidbaren reinen Gelbs anzunehmen. Diese Annahme wäre dann nichts Anderes als die Behaftung mit allen möglichen Weitenvorstellungen der Kontinuität. Kann sich jemand wirklich solche unendlichvielen Übergänge in der Empfindung vorstellen, auch ohne daſs er sie in der sinnlichen Erfahrung hat, so würde er sie untersinnlichvorstellbar nennen und hätte auf die Qualität Behaftungen angewendet. Natürlich spreche ich hier nicht von Wellenlängen; denn die Annahme von unendlichvielen verschiedenen zwischen den Längen von Gelb und Rot wäre Behaftung des Räumlichen mit Weitenvorstellungen.

S. Eigentlich haben wir es bei alledem nicht mehr mit nur wirklichen, sondern mit vielfach vorgestellten Empfindungen zu thun.

I. Allerdings; aber man wird nicht leugnen, daſs man auch ohne äuſseres Vorhandensein von Lichtstrahlen, ohne Reize Sehempfindungen haben kann, daſs man im Traume sprechen hört, während in Wahrheit niemand zugegen ist, welcher spricht usw. Auch die in der Erinnerung auftauchenden Empfindungen kann man nicht als Etwas hinstellen, das den Empfindungen fremd wäre, ebensowenig wie etwa die Erinnerung an die Figur des Pythagoreischen Lehrsatzes den räumlich-sinnlichen Vorstellungen fremd ist. Auch die Empfindungen in der Erinnerung haben Qualität und Intensität und können mit Kontinuität behaftet sein. Es dürfte überhaupt schwer sein das Vorkommen einer einzelnen sinnlichen Empfindung zu begreifen, ohne Beziehungen zu anderen Empfindungen.

S. Und doch folgen zeitlich die Empfindungen auf einander.

I. Sie werden aber auch zusammengefaſst und kommen, wie man sagt, in derselben Seele vor. Die Bedeutung dieses Wortes würde uns freilich bis tief in die metaphysische Psychologie führen, und das

erfordert eingehende Untersuchungen über die Empfindung nicht blofs im Allgemeinen, sondern auch über die Bedeutung der Intensität, der Qualität, schliefslich auch die Bedeutung der Behaftungen innerhalb des Geistes.

Es würden zwar die ersteren für den Zweck unserer Betrachtungen nicht interesselos sein, aber trotzdem will ich mich hier auf metaphysische Betrachtungen über die Behaftungen beschränken.

Das Sein einer Weitenbehaftung.

Wir haben bisher immer davon gesprochen, dafs bei der Vorstellung von Ausdehnungen irgend welcher Art eine oder mehrere Weitenbehaftungen vorhanden sein können oder nicht. Es ist eine sogleich auftauchende Frage, was denn nun eine Weitenbehaftung eigentlich sei. Eine direkte Antwort hierauf habe ich bisher nicht gegeben; auch würden wir uns wenig befriedigt fühlen, wenn wir eine Definition mit Hilfe irgend welcher allgemeineren Begriffe hingeschrieben hätten. Was nützen uns hierbei allgemeinere Begriffe wie: geistige Anlage, Fähigkeit des Menschen, Kategorie oder Teile einer Kategorie? Es ist zwar nicht wertlos zu sagen, dafs eine Behaftung zunächst etwas sei, was dem Geiste angehört, aber dies ist keine Definition. Wollen wir genau sagen, welche eigentümlichen Merkmale dieses Geistige im Unterschiede zu anderem Geistigen habe, so würden uns nur solche Wörter nützen können, die das Eigentümliche der Behaftung wiedergeben. Wir würden uns durch Angabe eines anderen beschreibenden Wortes anstatt des Wortes Behaftung nur im Kreise herumdrehen. Auch die Anführung von mehreren Wörtern würde nur ausreichen, wenn sie alles klar zum Bewufstsein brächten, was wir bisher über Behaftungen gesprochen haben und wodurch wir auf diese Vorstellungen gekommen sind. Wir müssen uns also auf alle unsere früheren, besonders mathematischen Untersuchungen beziehen und voraussetzen, dafs jeder Leser daraus ein ausreichendes Bild der Behaftungen gewonnen hat.

Es handelt sich hier darum, was für eine Existenz eine solche Behaftung denn eigentlich führt. Führt sie überhaupt eine Existenz oder nicht?

Käme ihr nicht das Geringste von dem zu, was wir mit Sein bezeichnen, so wäre es unfafsbar, wie wir überhaupt davon sprechen, uns etwas dabei denken, eine Anwendung davon machen oder Schwierigkeiten damit lösen könnten. Wenn wir also auch zugeben, dafs die Frage: wie kann eine Behaftung existieren? nicht ganz un-

berechtigt ist, so können wir uns doch damit durchaus nicht beruhigen einfach zu sagen, die Behaftung existiere. Es ist sonst zu befürchten, daſs wir bei dem Gedanken über die Existenz der Behaftung in Widersprüche geraten. In dem Wesen der Behaftung, wie wir es kennen gelernt haben, liegt, daſs etwas, z. B. das Räumliche mit der Weitenbehaftung des Endlichen oder Unendlichen versehen wird. Das Wort Weitenbehaftung kam immer in zusammengesetzten Vorstellungen vor. Wenn wir also sagen: es gab für uns bei unseren Untersuchungen eine Weitenbehaftung, z. B. des Endlichen, so meinen wir damit: es gab dieselbe innerhalb z. B. der Vorstellung von endlichen Raumverhältnissen. Also es war von einer eigentümlichen Existenz bei einem Anderen die Rede.

Kann man nicht behaupten: wenn eine Weitenbehaftung bei etwas Anderem existiert, so existiert sie jedenfalls auch selbst? Dies wäre ähnlich, als wenn man sagen wollte: Weil die Eigenschaften des Wasserstoffs sich bei Versuchen mit Sauerstoff, Kohlenstoff usw. zeigen, so existieren sie doch jedenfalls auch selbst. Man versuche nur, sie ohne Rücksicht auf irgend welche anderen Grundstoffe anzugeben! Ähnlich wäre der Satz: wenn zwei Dinge in Wechselwirkung stehen, so muſs doch auch jedes Ding für sich da sein. Bejaht man letzteres, so entsteht das ewige philosophische Rätsel: wie können zwei für sich existierende Dinge in Beziehungen treten? Verneint man es, so entsteht die schwierige Frage: wie kann man die beiden Dinge unterscheiden, die nur innerhalb der Beziehungen beider existieren sollten? Würden wir nun auch mit Kant annehmen, daſs die Wechselwirkung eine Kategorie sei, so ist damit die Schwierigkeit doch nicht gelöst. Denn giebt es ein transscendental wirkliches Ding, so weiſs man nicht, wie in einem anderen transscendental wirklichen Dinge z. B. dem denkenden Ich ohne eine an sich wirkliche Wechselwirkung die Idee des ersten an sich wirklichen Dinges entstehen solle. Die prästabilierte Harmonie von Leibniz löst diese Schwierigkeit nicht. Existieren aber die Dinge nur im Geiste, so steht man doch wieder vor der Frage, ob denn in diesem Geiste zwei Vorstellungen von getrennten Dingen existieren und wie diese dazu kommen in Beziehung zu einander zu treten, oder ob innerhalb des Geistes die vorgestellten Dinge nur vermöge ihrer Beziehung existieren und wie die Dinge dazu kommen, dennoch als unterscheidbar vorgestellt zu werden.

Hieraus und aus ähnlichen Betrachtungen geht immer wieder hervor, daſs die einfache Angabe: etwas ist oder etwas ist nicht, allemal in unlösliche Schwierigkeiten führt. Man kann also nicht verlangen, auf die Frage: „existiert die Behaftung oder nicht?“ ein ein-

faches ja oder nein als Antwort zu erhalten; vielmehr muſs man zuerst und jedesmal darüber klar sein, was man sich unter einer solchen Existenz vorstellt. Es ist nicht wahr, daſs das Sein ein einfacher und ursprünglicher gesonderter Begriff sei, eine in sich verständliche Kategorie. Wir können in dieser Beziehung nicht bei Kant stehen bleiben, so wenig wie in der Erklärung des Unendlichen oder des Raumes, sondern müssen anstatt des einfachen Begriffes Sein mancherlei anführen, was man etwa mit Stufen des Seins bezeichnen könnte. Dabei behalten wir uns natürlich vor auch bei diesen Stufen des Seins wieder zu erklären, ob ihr Sein ein einzelnes, einfaches ist, oder nicht vielmehr wieder in Seinsbeziehungen in höherem Sinne zu suchen ist. Auch ist mit diesen Wörtern (Stufen) noch nichts erklärt, wir wollen keineswegs behaupten, daſs diese nun etwa wieder Kategorien in Kantischem Sinne oder Teile einer Kategorie seien, sondern wir müssen uns durchaus daran halten, wie diese Vorstellungen von Seinsstufen in allen Fällen entstehen und inwiefern sie geeignet sind die Schwierigkeiten zu lösen.

In diesem Sinne dürfen wir sagen: unsere Untersuchung verfährt empirisch. Wir können und wollen nicht geistige Eigenschaften konstruieren, auch nicht ihren Zusammenhang unter Verzicht auf gründliche Erfahrungen zurechtbauen, sondern wir brauchen die Empirie des Geistes, wir benutzen die mathematisch-empirisch in der räumlichen Vorstellung gefundenen Thatsachen, wir heben uns auſserdem empirisch über das einfache Thatsachengebiet des Mathematischen hinaus und berücksichtigen die psychologischen und erkenntnistheoretischen Erfahrungen. Wenn wir so Metaphysik treiben, so verlassen wir auch hierbei nicht die Erfahrung und sehen uns durch die Erfahrung veranlaſst dem Sein jenen beliebten einfachen Sinn abzustreiten.

Kehren wir zur Behaftung zurück! Es giebt nicht einfach schlechthin eine Behaftung, auch ist es nicht einfach an sich klar, was es heiſst, die Behaftung existiere im Geiste. Selbst der logisch abgesonderte Begriff einer Behaftung ist — sogar im Gebiete des Reinlogischen, wenn man ein solches Gebiet wirklich von den anderen trennen kann — nicht etwas einfach Existierendes. Was aber dann?

Wir müssen uns an dieser Stelle mit Folgendem begnügen. Der Begriff einer Weitenbehaftung hat dasjenige Sein, welches wir überhaupt einem Begriffe zuschreiben. Es steht zwar ein Begriff stets in Beziehung zu dem, wovon er gebildet ist, und ist ohne das nicht vorhanden; es wird sich auch die Art seines Seins nach der Art dieser Beziehung richten müssen und in weiterem Sinne nach der Art der

Beziehungen zu anderen geistigen Elementen oder Vorgängen, aber wir können trotzdem ein Sein, sofern es ihm als bloſsem Begriffe zukommt, abgesondert denken von dem Sein in allgemeinerem Sinne. Und dieses abgesondert gedachte Sein des Begriffes einer Weitenbehaftung steht auf derselben Stufe wie das entsprechende abgesonderte Sein irgend eines anderen Begriffes. Es liegt uns daran besonders ausdrücken zu können, daſs es in der sogenannten Seele Elemente giebt, denen wir dieselbe Stufe eines Seins zuschreiben können, während wir sehr oft genötigt sein werden Vorkommnissen der sogenannten Seele (z. B. verschiedenen Behaftungen oder der Wirkung verschiedener Weitenvorstellung bei der Behaftung mit einer Mannigfaltigkeit) verschiedene Stufen eines Seins zuzuschreiben.

Das Sein einer Weitenbehaftung selbst steht nicht auf derselben Stufe wie das Sein eines solchen Begriffes; ob wir es aber eine höhere oder niedrigere Stufe nennen wollen, oder ob wir zwei Weitenbehaftungen wie die des Endlichen und Unendlichkleinen erster Ordnung auf dieselbe Stufe setzen werden oder nicht, das kann erst nach weiteren Untersuchungen ausgesprochen werden.

Das Sein von Mannigfaltigkeitsverhältnissen ohne und mit Weitenbehaftungen.

In einer anderen Schrift (eine mögliche Wesenserklärung usw.) habe ich mich darüber ausgelassen, daſs die Vorstellung eines sogenannten Einzelelementes wie einer räumlichen Strecke derjenigen Bestimmtheit entbehrt, die man innerhalb der betreffenden Mannigfaltigkeit nicht entbehren möchte. Im Raume z. B. kommt es vor allem auf Unterscheidung räumlicher Gröſsen an, und es ist nicht möglich sich eine einzelne Strecke von bestimmter Länge vorzustellen ohne ihr Verhältnis zu anderen. Das Verhältnis von räumlich Ausgedehntem kann man danach für das Wesentliche erklären, nicht ein einzelnes Ausgedehntes. Wir wollen, wenn wir vom Sein einer Mannigfaltigkeit sprechen, an dasjenige Sein denken, das wir den Verhältnissen in der betreffenden Mannigfaltigkeit zuschreiben.

Man könnte, wie es oft geschehen ist, den Raum und die Zeit nebeneinander ordnen. Für unsere Seinsuntersuchung würde das bedeuten, daſs wir diesen Mannigfaltigkeiten oder genauer den vorgestellten Verhältnissen in beiden Gebieten eine gleiche Stufe des Seins zuschrieben. Daſs wir dabei stehen bleiben werden, soll nicht behauptet werden oder soll fraglich sein. Stellt man die Zahl jenen

beiden gegenüber, so könnte man dabei meinen, die Stufe des Seins sei für die Zahl dieselbe wie für jene und ihr Gegensatz bestehe in anderen Eigenschaften. Die Entscheidung hierüber erfordert Untersuchungen, die in den Rahmen dieses Buches nicht hineinpassen. Auch das Sein der Mannigfaltigkeiten wie der von Farbenempfindungen, von Quantitäten und Qualitäten verlangt ausführliches Nachdenken. Für uns ist es wichtig, ob solche Mannigfaltigkeiten auf eine andere Daseinsstufe zu setzen sind, wenn sie mit Weitenvorstellungen behaftet worden sind.

Kann überhaupt ein Mannigfaltigkeitsverhältnis ohne irgend eine Weitenbehaftung existieren? Diese Frage stieſs uns schon mehrfach auf. Das Verhältnis zweier Raumlängen z. B. kann entweder mit dem Endlichen oder Unendlichen irgend welcher Ordnung behaftet sein. Man kann auch die Behaftung ganz hinwegdenken und nicht entscheiden wollen, ob etwa zwei Dreiecksseiten einem endlichen Dreiecke angehören sollen. Für gewisse Probleme, so sahen wir, war es freilich durchaus nötig, sich die Gröſsen in einem bestimmten Weitengebiete vorzustellen. Wollte man also alle räumlichen Vorstellungen, wie sie etwa die Geometrie geben soll, zur selben Stufe des Seins zählen, so wäre es nötig diesem Sein die Behaftungen verschiedener Ordnung als wesensnötig zuzuschreiben. Spricht man z. B. von der Wirklichkeit, die dem Pythagoreischen Satze zukommt, so muſs man bei solcher Annahme sagen, daſs in dieser Wirklichkeit die Behaftungen mit dem Endlichen und dem Unendlichen aller Ordnungen stecken, die überhaupt in der Geometrie vorkommen. Freilich könnte man bei gewisser Vermischung der Weitenbehaftungen (siehe die früheren Abschnitte über Dreiecke mit gemischter Weitenbehaftung!) Ausnahmen oder besondere Auslegungen für den Pythagoreischen Satz konstatieren wollen. Auch könnte man, wie in einzelnen Abschnitten eines geometrischen Lehrbuches, zunächst einmal nur von dem Endlichen sprechen oder auch den Gegensatz vom Endlichen und Unendlichen gar nicht heranziehen und diesen Vorstellungen nur eine bestimmte Daseinsstufe zuweisen. Dann dürfte aber in geometrischen Abschnitten von dieser Daseinsstufe die Erklärung der Tangente gar nicht vorkommen, und man müſste einem Abschnitte über letztere eine andere Wirklichkeit zuweisen.

Wofür sollen wir uns entscheiden? Wir müssen hier wohl unterscheiden zwischen den Zwecken eines Buches und unserem Forschen nach metaphysischer Wahrheit. In einer speziellen Wissenschaft wie der Geometrie findet ein fortwährendes Spiel zwischen Anschauungen, erweiterten Vorstellungen, Begriffen, Schlüssen usw. statt, und wir

haben uns bereits dafür entschieden, dem bloſsen Begriffe einer Behaftung eine andere Art von Dasein zuzuschreiben als der Behaftung selbst. In der methodischen Entwicklung einer Wissenschaft also werden verschiedene Daseinsstufen unaufhörlich mit- und durcheinander vorkommen. Man werfe nicht ein, daſs der Geist, welcher denkt, doch immer dabei dasselbe Sein führe; denn wenn wir auch wüſsten, was dieser Geist eigentlich ist, so wäre es noch sehr die Frage, ob dieses Sein, von dem wir wissen, immer dasselbe wäre und nicht verschiedene Stufen durchliefe (die wir uns etwa durch Behaftung kontinuierlich oder nichtkontinuierlich vorstellen möchten). Man kann aber gar nicht sagen, was der Geist ist, wenn man nicht erst über das Sein von alledem spricht, was man mit dem Namen Geist zusammenfassen will.

Wir wundern uns also nicht mehr darüber, wenn die methodische Entwicklung einer Mannigfaltigkeitslehre verschiedene Daseinsstufen in häufigem Wechsel zeigt, und neigen dazu den Verhältnissen einer Mannigfaltigkeit eine andere Daseinsstufe zuzuschreiben, wenn wir die Behaftung überhaupt ausschlieſsen, als wenn wir eine oder gar mehrere Weitenbehaftungen vornehmen.

Wir würden demnach den gründlichen Vorstellungen über das Wesen einer Tangente, über Osculation und Inflexion eine andere Stufe des Seins zuschreiben als den Vorstellungen eines einfachen Euklidischen Dreieckssatzes. Es soll damit vorläufig nicht gesagt sein, ob solche Daseinsstufen etwa höhere zu nennen wären oder gar wertvollere; begnügen wir uns hier damit sie für verschiedene zu erklären.

Die Stellung der Weitenbehaftungen zu einander und das Sein derselben.

Es kann uns wenig daran liegen einen Schematismus herzustellen, nach dem wir die Weitenbehaftungen und ihr Sein behandeln. Nur zu leicht verfällt man in den Fehler, einem Schema zu Liebe, das anfangs einleuchtet, Angaben zu machen, für die man sonst keine Gründe haben würde. Wir sahen im mathematischen Teile, daſs es Weitenbehaftungen des Unendlichkleinen und Unendlichgroſsen giebt in Ordnungen, die wie die Zahlen 1, 2, 3 usw. aufsteigen, aufserdem auch Zwischenbehaftungen. Es hat also das Sein dieser Behaftungen mit dem Sein der Zahlen irgend etwas zu thun; aber keineswegs ist damit gesagt, daſs das Sein der Weitenbehaftungen sich ebenso unterscheide wie etwa das Sein der Zahlen. Will man die Zahlen 1, 2 usw.

oder auch nur die Zahlen 2, 3 usw. zur selben Stufe des Seins rechnen, so ist damit nicht bewiesen, daſs die Weitenbehaftungen entsprechender Ordnung derselben Daseinsstufe angehörten. Das Unendlichkleine ersten und das zweiten Grades stehen sich nicht einfach gegenüber wie die Zahlen 1 und 2, sondern haben bestimmte Beziehungsgesetze, die nicht etwa bloſs aus 1 : 2 folgen.

Noch weniger vermöchte man durch Zahlen auszudrücken, wie das Sinnlichvorstellbare dem Über- oder Untersinnlichvorstellbaren in seinem Dasein gegenüber stehen soll. Immer müssen wir uns an die im Geiste aufgesuchten Gesetze halten, die geistig-empirisch gefunden, aber nach dem Maſsstabe der Widerspruchslosigkeit als richtig angenommen wurden. Man hat auch, wie wir bei dem geschichtlichen Überblicke sahen, gelegentlich das Unendlichkleine als das eigentlich Reale hinstellen wollen, obgleich die meisten dazu neigen dem Sinnlichvorstellbaren die eigentliche Wirklichkeit zuzumessen. Wir kennen keine eigentliche Wirklichkeit und fragen nur nach Unterscheidbarkeit von Seinsstufen und dem Verhältnisse von Wirklichkeiten zu einander (den Seinsbeziehungen). Mancher möchte geneigt sein zu meinen, die aus den sinnlichen Erfahrungen uns bekannte Welt habe den höchsten Anspruch darauf wirklich zu heiſsen, und würde deshalb wohl der Behaftung des Endlichen die Fähigkeit beilegen der räumlichen und zeitlichen Mannigfaltigkeit eine hervorragende Stufe der Wirklichkeit zu verleihen; aber bei genauerem Denken zeigt es sich bald, daſs man über den Charakter dieser sinnlich erkannten Welt in groſse Zweifel gerät. Ich brauche darüber nichts weiter zu sagen, als daſs alles, was wir uns von der Welt vorstellen, soweit wir es uns vorstellen, doch Vorstellung ist, und der Schluſs auf ein von der Vorstellung Unabhängiges nicht die Wirklichkeit eines solchen ganz zweifellos macht, und daſs auſserdem die sinnliche Vorstellung der Welt voll ist von Unverständlichkeiten, die gebieterisch die Ergänzung durch andere Weitenbehaftungen oder wenigstens durch nicht sinnlich Wahrgenommenes erheischen. Wenn man nun glaubt durch einfache Hinzufügung des Unendlichkleinen ohne Gradunterscheidung und Hinzufügung des Hinweises auf die Unendlichkeit der Welt eine nunmehr vollendetere Stufe der Wirklichkeit erhalten zu haben, so zeigt uns gerade das genaue Nachdenken z. B. die mathematische Beschreibung der Naturgesetze, wie unverständlich das Sein einer solchen räumlichen Welt ist, wenn wir nicht wieder neue Behaftungen heranziehen.

Nun scheint es fast, als wenn durch die Anzahl der herangezogenen Behaftungen die Stufe der Wirklichkeit bestimmter würde und als wenn durch die Zusammenfassung aller Weitenbehaftungen

auch ein sicherstes Sein verbürgt würde. Wie wenig das richtig ist, zeigt die Möglichkeit, die selbständige Existenz der gesamten räumlichen Welt mit allen Dimensionen, dem Endlichen und Unendlichen anzuzweifeln, wie es oft in der Geschichte der Philosophie geschah. Freilich, könnte man sagen, dies geschah z. B. bei Kant wegen der Antinomieen des Unendlichen, und wenn wir hier diese Schwierigkeit gelöst haben, so fallen auch die Gründe Kants für die transscendentale Idealität fort. Indessen giebt es noch andere Gründe, auch bei Kant, für die Ableugnung der (transscendenten) Realität der Raumwelt. Da es eine Realität, die empirische, für den Raum auch bei Kant giebt, so ist klar, dafs auch schon bei ihm das Bedürfnis nach Unterscheidung von Realitäten vorhanden ist.

Für unseren Standpunkt ist es nötig möglichst klar zu sagen, was Seinsstufen, Verschiedenheit von Seinsstufen, eventuell bestimmteres, sichereres, höheres oder gar wertvolleres Sein heifsen soll. Die Unterscheidung nach Höhe und Wert wollen wir noch ganz ausschliefsen. Auch was Seinsstufen sind, können wir nicht anders als mit diesem Worte und den Gedanken sagen, welche uns auf Seinsstufen führten. Im allgemeinen nehmen wir als selbstverständlich an, dafs alles in irgend einer Art ist. Dies ist keine Tautologie und bedeutet nicht: alles, was ist, ist in irgend einer Art, vielmehr bedeutet es, dafs all und jedes, auch das blofs Gedachte, ist, man also nicht etwa behaupten kann, es käme dem einen ein Sein und dem anderen im Gegensatze dazu ein Schein zu. Zwar giebt es den Begriff des Scheines auch, aber es ist nicht ein im allgemeinen richtiger metaphysischer Gegensatz, dem Sein in jeder Beziehung etwa den Schein gegenüber zu stellen; sondern es bedeutet der Schein nur einen Gegensatz in gewissen Beziehungen — worauf hier nicht der Ort ist näher einzugehen. Zu sagen, was das Sein sei, weisen wir ab, wie wir die genaue Worterklärung des „Seins" (eines Grundbegriffes) abwiesen. Keineswegs sind wir damit einverstanden das Sein einfach eine Kategorie zu nennen und nun die Kategorieen nur dem Geiste als einzelne Eigenschaften zuzuschreiben, trotzdem aber vom Sein eines Dinges an sich zu sprechen wie von etwas, das von unseren Eigenschaften unabhängig sei. Wie erstlich das Sein ein Begriff eines Geistes sein kann, und doch auch alles, was nicht dieser Geist ist, ein Sein besitzen soll, diese Frage wird hier nicht gelöst und wird später für uns einen ganz anderen Sinn erhalten, der die gewöhnliche Form dieser Frage als falsch erkennen läfst.

Irgend ein bestimmter Begriff, der ganz genau wieder in den-

selben Beziehungen, derselben Bedeutung usw. gebraucht wird, hat dasselbe Sein in beiden Fällen. Man könnte einwenden, es sei in beiden Fällen schon deswegen etwas Verschiedenes, weil der zweite Fall doch zeitlich nicht genau mit dem ersten zusammenfallen soll, und weil doch wohl nicht die Seele oder gar die ganze Welt im zweiten Falle noch ganz genau dasselbe wäre wie im ersten Falle. Der Einwurf hat eine gewisse Berechtigung, nämlich für den, der noch an ein absolutes Sein glaubt; wir aber reden nicht von einem absoluten Sein im ersten und im zweiten Falle d. h. von einem Sein, dessen Beziehung zu Allem (zur Seele und zur Welt) vorkommt, sondern wir nahmen nur ein Sein an, welches in gewissen Beziehungen besteht (ich gebrauche den Ausdruck: „metaphysischer Relativismus" im oft citierten Büchlein, ohne einer solchen Benennung an sich einen Wert beizulegen, der die Sache selbst vollständig klar machte). Es soll damit nicht behauptet werden, dafs diese Auffassung die einzig mögliche sei oder gar absolut sicher bewiesen sei, sondern sie scheint uns zum mindesten keine gröfseren Schwierigkeiten als andere Auffassungen zu bieten. Bei unserer augenblicklichen Frage von den beiden Fällen fällt jedenfalls nach solcher Auffassung die Berechtigung des Einwurfs fort, und wir sagen wie oben: kommt ein bestimmter Begriff (oder entsprechend irgend etwas Anderes) in einem bestimmten Beziehungsgebiete genau in denselben Beziehungen usw. vor, so hat er für dieses Beziehungsgebiet dasselbe Sein.

Ein verschiedenes Sein liegt — wieder für ein bestimmtes Beziehungsgebiet — vor, wenn innerhalb dieses Beziehungsgebietes nicht ganz genau dieselben Beziehungen für das Sein wesentlich sind. Es fragt sich, wann wir die unter Umständen zahlreichen Verschiedenheiten der Beziehungen des Seins mit dem Namen von verschiedenen Seinsstufen belegen wollen. Ein Dreieckssatz bei Behaftung mit dem Endlichen kann natürlich mit mancherlei Beziehungen verbunden sein; wir sind auch im stande das eine Mal bei einem Dreieckssatze z. B. an ein Dreieck mit anderen Winkeln oder auch statt dessen und nebenher an den Gegensatz zu Vierecken usf. zu denken. Diese verschiedenartig komplicierten Vorstellungen haben als solche Vorstellungen natürlich bereits ein verschiedenes Sein, doch wollen wir diese Verschiedenheit nur eine Verschiedenheit innerhalb derselben Seinsstufe nennen. Dann sind verschiedene Seinsstufen von Behaftungen (oder von den mit Weitenbehaftungen versehenen Mannigfaltigkeitsverhältnissen) solche, die entweder je eine aber verschiedene Weitenbehaftung enthalten, oder auch solche, die zugleich mehrere enthalten in verschiedener

Anzahl oder auch gleichviel Weitenbehaftungen, aber verschiedener Art (z. B. das Endliche und Unendlichkleine erster Ordnung oder aber das Unendlichkleine erster und zweiter Ordnung). Eine bestimmtere Seinsstufe, beziehlich der Weitenbehaftungen, sei eine solche, welche mit mehr Weitenbehaftungen versehen ist. Die bestimmteste Seinsstufe, aber wieder nur beziehlich der Weitenbehaftungen, wäre eine solche, welche alle Weitenbehaftungen enthielte; doch kann eine solche im Geiste nicht vorkommen, nur den Begriff derselben kann man bilden.

Die letzten Wortbestimmungen erscheinen selbstverständlich, aber es ist wichtig zu sagen, dafs man überhaupt derartige Seinsunterschiede mittels der Weitenbehaftungen machen kann.

Weitenbehaftung und Subjektiv-Wirkliches.

Wir haben bisher bei Feststellung einer Seinsstufe von irgend etwas Mannigfaltigem schlechthin die Weitenbehaftung berücksichtigt, ohne uns darüber auszusprechen, welche Rolle diese Weitenbehaftung in viel weiteren Gebieten spielt, nämlich dem Gebiete der Persönlichkeit, demjenigen der uns bekannten Welt, welche die Persönlichkeiten enthält, und dem einer Welt, die ohne Rücksicht darauf existiert, ob wir sie kennen. Die letzten drei Unterscheidungen des subjektiven Ichs, der objektiven Welt und der Welt an sich sind bekannt. Es soll hier keineswegs behauptet werden, dafs dieses Dreifache als gleichartig nebeneinander gereiht werde oder überhaupt völlig trennbar sei. Halten wir uns zunächst nur an die Thatsache, dafs jeder Mensch einen Begriff von dem hat, was er seine Persönlichkeit gegenüber anderen Persönlichkeiten, sein subjektives Ich nennt, das jedenfalls thatsächlich einen engeren Zusammenhang in sich zeigt, als den Zusammenhang mit der übrigen Welt. Jeder Mensch versteht, was man meint, wenn man sagt: ich für meine Person stelle mir jetzt etwas Endliches oder etwas Unendlichkleines vor. Wir würden sagen: Es ist eine Thatsache, dafs jemand sich eine eigene Behaftung von Mannigfaltigkeitsverhältnissen vorstellen kann im Gegensatz zu den Vorstellungen anderer Persönlichkeiten.

Wir wollen nicht entscheiden, was für eine Art von Dasein das subjektive Ich etwa habe. Es kommt uns nur darauf an darüber nachzudenken, ob die durch Weitenbehaftungen hergestellte Daseinsstufe in anderer Beziehnng dadurch ein besonderes, etwa bestimmteres Dasein hat, dafs sie einem subjektiven Ich angehören soll. Man mag

einwenden, daſs diese Angehörigkeit in der Vorstellung dessen liege, der dies subjektive Ich gerade von anderen unterscheidet. Dadurch ist nach unserer Auffassung nicht etwa das Sein von solchen Vorstellungen zweifelhaft gewordeu. Man kann ja den Gedanken hinzufügen, es müsse dies doch von irgend jemand so vorgestellt werden; dann bringt dieser Gedanke eine Daseinserweiterung zu der bisherigen Daseinsstufe hinzu. Man kann auch diese bisherige Daseinsstufe nicht ganz einfach auffassen als Folgendes: Es ist eine Mannigfaltigkeitsvorstellung mit Weitenbehaftungen in irgend einem subjektiven Ich vorhanden. Dieser Gedanke ist ein umfangreicherer als der frühere: es ist eine Mannigfaltigkeitsvorstellung mit Weitenbehaftung vorhanden. Der Fortschritt von einem zum anderen ist nicht derselbe wie der Fortschritt von einer Daseinsstufe durch eine Weitenbehaftung zu einer anderen Daseinsstufe mittels mehrerer Weitenbehaftungen. Wir dürfen also eigentlich nicht sagen: durch das Hinzusetzen eines persönlichen Ichs tritt die Vorstellung in eine bestimmtere Stufe des Seins; denn einfaches Weiterzählen oder Weiterbestimmen tritt durch den Zusatz des subjektiven Ichs nicht ein. Es ist etwas ganz Neues, Eigenartiges, wenn wir hinzusetzen, die Vorstellung solle einem subjektiven Ich angehören. Es kann dieser eigenartige Daseinszusatz auch stattfinden, gleichviel, auf welcher Stufe mittels Weitenbehaftung die Vorstellung stand. Denn ein Ich kann sich z. B. ein Dreieck mit endlichen Verhältnissen vorstellen oder auch ein Dreieck mit gemischter Weitenbehaftung.

Wir können uns nicht dazu verstehen eine Existenz des Ichs in irgend einer Art abzuleugnen, als Schein anzusehen usw. Sehen wir es als einen Schein an, so bedeutet das für uns bloſs: es hat diejenige Existenz, die wir überhaupt einem Scheine zuweisen müssen, denn vorhanden ist auch ein Schein, nämlich als Schein. Wir wollen vorläufig diejenige Seinsbestimmung, welche der Zusatzgedanke, daſs die Vorstellung einem subjektiven Ich angehört, hinzugiebt, einfach als subjektive Seinsstufe bezeichnen. Es kann also z. B. ein Mannigfaltigkeitsverhältnis eine bestimmte Seinsstufe, beziehlich der Weitenbehaftung, dadurch haben, daſs endliche Gröſsen darin vorkommen. Es kann aber auſserdem noch eine subjektive Seinsstufe durch den Gedanken erhalten, daſs diese Vorstellung von Verhältnissen einem bestimmten subjektiven Ich angehören soll, und es kann endlich wiederum die subjektive Seinsstufe dadurch hinzukommen, daſs ich sage: Ich habe den Gedanken, daſs jene Vorstellung in irgend einem Ich vorkommt. Ganz unwillkürlich denkt man nun: statt daſs ich diesen Gedanken habe, kannst auch du ihn haben oder ein Dritter;

und wenn wir sagen: alle haben den Gedanken, daſs diese Vorstellung in irgend einem bestimmten Ich vorkommt, so liegt schon eine neue Daseinsbestimmung vor, nämlich diejenige eines sogenannten objektiven Daseins, ausgedrückt durch: es giebt objektiv thatsächlich ein Ich, welches jene Vorstellung hat.

Weitenbehaftung und Objektiv-Wirkliches.

Um eine klare Unterscheidung zwischen dem Subjektiven, also zwischen dem von mir als einer zusammenhängenden Persönlichkeit Vorgestellten und der objektiven Welt zu erhalten, ist es nützlich zunächst sich selbst oder irgend einen anderen so anzunehmen, als ob man von seinem eigenen Körper gar nichts merkte, derselbe starr im Dunkeln unbeobachtet bliebe, und als ob man auch gar nichts davon merkte, daſs man eine persönliche, neben andere zu reihende Seele hätte. Will man einwenden, dergleichen gäbe es gar nicht und man könne ohne Erfahrungen am eigenen Leibe und der eigenen Seele die übrige Welt überhaupt nicht kennen lernen, so wird man doch Folgendes zugeben müssen. Ein Mensch kann die Erfahrung an seinem eigenen Körper und an den in seiner Seele vorkommenden, von fremden Vorgängen unterscheidbaren Vorgängen für einige Zeit ganz vergessen oder ganz auſser Acht lassen, und es kann dann in seinem Bewuſstsein auch ganz der Gedanke fehlen, daſs eigentlich alles, was er denkt und sich vorstellt, sein allgemeines Ich genannt werden kann. Ein solcher sich selbst vergessender, aber doch die fremden Vorgänge beobachtender Mensch geht gewissermaſsen auf in den Vorgängen der Auſsenwelt, er ist einem Kinde zu vergleichen, das in die Natur hinausstarrt und die Begriffe von den Vorgängen der Natur bildet, ohne sich doch seiner selbst bewuſst zu sein. Was dann dort vor sich geht, ist die objektive Welt. Man möchte zwar sagen: ein Kind oder ein Einzelner kennt ja gar nicht die objektive Welt ganz, aber man mache dabei nicht den Fehler, daſs man eine etwaige Welt, die gar nicht in bewuſster Beziehung zu irgend welchen bestimmten Personen steht (eine Welt an sich) ohne weiteres mit der objektiven Welt identifiziert. Man darf, wenn man genau sein will, nicht naiv behaupten, die objektive Welt wäre auch da, wenn sie nicht vorgestellt wird. Eine solche Welt ist nicht etwa die Natur, soweit wir sie kennen und wie wir sie kennen, sondern ist schon etwas sonderbarerweise und bewuſstermaſsen als ganz (!) von uns Unabhängiges, sich um die Beziehung zu uns nicht Kümmerndes, als eine Welt, an (!) die wir denken, als eine Welt an sich hingestellt.

Die objektive Welt kann wissenschaftlich beschrieben werden deshalb, weil thatsächlich in der meinem allgemeinen Ich angehörigen Vorstellung von vielen und allen Menschen eine gesetzmäfsige Übereinstimmung der Äufserungen und also auch Gedanken vorkommt. Die objektive Welt ist die Welt, welche in der Botanik, Zoologie, Mineralogie, Geographie, Astronomie, allgemeinen Medizin, empirischen Psychologie, Ethnographie usw. behandelt wird. Es ergiebt sich daraus, dafs man zwar behaupten kann, alle wie wir beschaffenen Wesen würden auch dieselben Beschreibungen der objektiven Welt geben und würden auch künftig zu denselben noch nicht entdeckten Gesetzen wie wir gelangen. Dieses „Noch nicht entdeckten" und diese Zuversicht veranlassen zwar sehr schnell den Gedanken, dafs vielleicht etwas an sich da sein und die uns bekannte objektive Welt beeinflufsen möchte; aber andererseits liegt schon in der Voraussetzung der gleichgearteten forschenden Wesen die Abhängigkeit von diesen oder wenigstens der enge Zusammenhang der objektiven Welt mit der Eigentümlichkeit dieser Wesen. Wir müssen uns also auch wohl hüten von der objektiven Welt etwas zu behaupten, was wir nicht und keine Menschen je erfahren haben oder erfahren werden.

Statt der zahlreichen metaphysischen Untersuchungen über eine solche objektive Welt wollen wir nur zwei zusammenhängende Fragen untersuchen, die von der sogenannten Unendlichkeit der Welt und von der sogenannten Unsterblichkeit der einzelnen, als Objekt in der objektiven Welt vorkommenden Seele. Offenbar hängt dies mit den Untersuchungen über die Weitenbehaftungen zusammen und wird uns in der Frage Stoff geben, was für ein Sein den Weitenbehaftungen objektiv und der objektiven Welt mittels der Weitenbehaftungen zukommt.

Wenn man jemand fragt, ob die Raumwelt oder der leere Raum irgendwo ein Ende nehmen wird, so pflegt er nicht sofort zu antworten. Ich habe auch schon die Antwort bekommen: ja, der Raum kann einmal aufhören. Es wird indessen diese Antwort nach einigem Besinnen verbessert und geht in die andere gewöhnliche über: der Raum mufs doch immer weiter gehen. Wenn man dann fragt, ob nicht ein Gedanke darüber möglich ist, wie weit er denn gehen mufs, ob man bei jeder einzelnen vorgestellten Stelle des Raumes blofs angeben kann, er höre hier noch nicht auf, oder ob man eine Vorstellung hat, in der nicht mehr blofs die einzelne letzte Stelle vorkommt, so pflegt man zu hören: ja, er ist unendlich. Es ist bekannt und in der Geschichte der Philosophie viel benutzt worden, dafs man einen zureichenden äufseren Erfahrungsgrund hierfür nicht angeben kann. Denn,

pflegt man zu sagen, der Mensch kann ja nicht objektive räumliche Erfahrungen bis in das Unendliche ausdehnen. Ja, woher weifs man dann, dafs der Raum unendlich ist? Bekanntlich ist darauf oft von Philosophen geantwortet worden: durch eine Erfahrung, die im Geiste selbst gemacht wird, oder sogar durch eine geistige Anschauungsanlage, welche der Erfahrung vorausgehen soll. Dies scheint sich mit der objektiven Welt nicht zu vertragen, weil man nicht recht versteht, wie sich die objektive Welt nach einer geistigen Anlage oder Erfahrung des Einzelnen richten soll. Daher hat man auch oft die ganze räumliche Welt in das Subjekt verlegt und dem Raume nur eine Realität zugewiesen, die geradezu von der einzelnen vorstellenden Seele abhängt.

Nun verstanden wir unter der objektiven Welt eine Welt, wie sie von allen uns gleichen Geistern vorgestellt wird, und zwar konnten wir uns von dem rein subjektiv Räumlichen durch das Hineinversetzen in die Beobachtung eines sich selbst Vergessenden am leichtesten freimachen. Wenn solche objektive Welt unendlich ist, so mufs es uns erscheinen, als ginge diese Vorstellung des Unendlichen solch ein sich selbst vergessendes Subjekt nicht persönlich an. Wir setzten aber gleich hinzu, dafs auch irgend ein anderer Mensch diese die Person selbst vergessende Beobachtungswelt haben kann, ja alle Menschen, und dafs wir sie dann erst die eigentlich objektiv bestehende Welt nennen. Dies beruhte auf der gleichen Gesetzlichkeit in der Vorstellungswelt aller dieser Geister. Wenn nun jeder urteilt, die Welt wäre unendlich, so mufs dieses Urteil zweifellos mit dieser übereinstimmenden Gesetzlichkeit zu thun haben. Wir können gar nicht verlangen, dafs jemand über die Eigenschaften der objektiven Welt irgend etwas aussagt, ohne jene objektive Gesetzlichkeit zu benutzen.

Wenn einige Philosophen sich damit zu helfen suchen, dafs sie sagen: die Welt selbst ist weder endlich noch unendlich, so machen sie einen Fehler, falls sie damit die nach unserer Art definierte objektive Welt meinen. Denn die Eigenschaft der räumlichen Unendlichkeit wird allgemein von jedem objektiv so gesetzlich veranlagten Menschen zugegeben. Freilich, könnte man sagen, machen sie alle ja doch erst Erfahrungen, um die objektive Welt kennen zu lernen, und die Eigenschaft der Unendlichkeit sprechen sie aus, ohne sich dabei auf bestimmte hinreichende räumliche Erfahrungen stützen zu können, sie brauchen also thatsächlich eine Eigenschaft, die zwar die objektive Welt hat, aber die man zu kennen glaubt ohne Erfahrungen. Man bedenke indessen, dafs nach unseren Untersuchungen die blofsen erfahrenen Verhältnisse noch durch einen besonderen Akt (mit besonderer

Seinsstufe) mit dem Endlichen versehen werden (wenn dieser Akt auch nicht erst nachträglich einzutreten braucht). In dieser Beziehung steht die Behaftung mit dem Endlichen in gleicher Linie mit der Weitenbehaftung des Unendlichen. Also das Sein irgend welcher der sogenannten objektiven Welt angehörigen Verhältnisse hat durch die Behaftung mit dem Endlichen oder auch mit dem Unendlichen je eine besondere Seinsbestimmung erhalten. Die Hauptsache ist, dafs es nicht richtig ist dem Endlichen bei der objektiven Welt im allgemeinen Sinne die allein giltige Seinsbestimmung zuzuschreiben. Wir wissen nach unserem mathematischen Teile, dafs man sich ein bestimmtes Streckenverhältnis mit einem Zahlenverhältnisse wie $3:4$ sehr wohl ohne Widersprüche sogar geometrisch vorstellen und es verwerten kann, wenn beide Strecken unendlich sein sollen. Mit dem Einwande: „Das ist nur ein Schlufs; ursprünglich hat man nur endliche Strecken" darf man nicht mehr kommen; denn wir wissen, dafs auch für die Vorstellung der objektiv endlichen Strecken die Behaftung mit der endlichen Weitenvorstellung nötig ist und ihr eine Seinsbestimmung beilegt. Ebenso ist es eine Seinsbestimmung bei der objektiv wirklichen Welt, wenn man als einzig richtig behauptet, die Welt sei unendlich.

Es ist freilich wahr, dafs das Endliche auch das Sinnlichvorstellbare ist, also die sogenannten sinnlichen Empfindungen sonderbarer Weise thatsächlich mit endlicher Weitenbehaftung vor sich gehen. Aber wir können diese Thatsache sehr wohl so auffassen, als ob das Sinnliche thatsächlich stets verknüpft wird mit der endlichen Weitenvorstellung; wir haben ausdrücklich erörtert, dafs die Sinne selbst (z. B. beim Sehfeld) weder Grenzen noch das Endliche geben, sondern nur damit verknüpft werden. Auf diese Weise gelang es uns die Widersprüche zu entfernen, und darin fanden wir die Berechtigung dieser Annahme.

Die thatsächlich und unwillkürlich und sofort vollzogene Verknüpfung des Sinnlichen mit dem Endlichen liefs es immer so erscheinen, als ob die objektive Welt überhaupt durchaus endlich sei, und man geriet immer in Erstaunen, wenn man an die Gröfse der Sternenwelt und die Ausdehnung des Raumes dachte und plötzlich die Notwendigkeit in sich fühlte, den Raum unendlich zu nennen. Man würde in dieses Erstaunen nicht geraten sein, wenn es anders wäre, wenn nämlich thatsächlich die sinnlichen Erfahrungen immer gleich mit einer unendlichen Weitenbehaftung versehen wären. Alsdann würden wir in Erstaunen geraten, wenn wir bei Vervollständigung unserer Vorstellungen oder besser bei einem unwillkürlichen Wechsel

der Behaftungen plötzlich vor der Frage ständen, ob denn in der Welt nicht auch Endliches vorkommen könne. Dies müfste man alsdann bejahen, wenn trotz der sinnlich-unendlichen Erfahrungen auch die Weitenbehaftung des Endlichen in jedem Geiste gesetzlich vorhanden wäre und eine Daseinsbestimmung zu geben vermöchte. Wären aber unsere sinnlichen Erfahrungen thatsächlich durcheinander bald mit dem Endlichen, bald mit dem Unendlichen behaftet, so würde das Erstaunen gar nicht eintreten.

Nach unserer Lehre verändert sich also die ganze Sache nur insofern, als wir angenommen und als möglich eingesehen haben die logische Trennbarkeit des Sinnlichen von der endlichen Weitenbehaftung und das gesetzliche Nebeneinanderreihen der verschiedenen Weitenbehaftungen sowie die Thatsache, dafs wir beim Sein von irgend Etwas (z. B. der objektiven Welt) stets genau verschiedene Daseinsbestimmungen oder Daseinsstufen unterscheiden können. Die metaphysische Betrachtung der objektiven Welt in jeder Beziehung liegt nicht im Rahmen unseres Buches, aber wir sind zu folgendem Resultate gekommen: die objektive Welt besteht in der thatsächlich gleichen Weltvorstellung aller uns gleichen Geister, und diese Geister besitzen die verschiedenen Weitenbehaftungen, verknüpfen thatsächlich die sinnlichen Vorstellungen mit der endlichen Weitenbehaftung, besitzen aber in den anderen Behaftungen die thatsächliche Fähigkeit, ihren Erfahrungen eine ganz entsprechende Daseinsstufe, wie die des Endlichen, beizulegen. Ob es freilich Geister giebt, die einem Anderen, an sich Bestehenden gegenüberstehen und etwa durch die schwerverständlichen Wechselbeziehungen die objektive Welt erzeugen, darüber haben wir nichts behauptet. Wir wufsten nur, dafs uns die Thatsachen veranlafsten zur logischen Unterscheidung von persönlichen Ichs, und dafs diese persönlichen Ichs eine gesetzmäfsige Übereinstimmung in ihren Welterfahrungen zeigen.

Ist auch die Welt im Raume unendlich oder kann sie unendlich sein? Diejenigen Sterne, welche uns Licht zusenden, d. h. die wir sinnlich endlich kennen lernen, werden sich nicht in unendlichen Entfernungen von uns befinden. Man könnte sich zwar einen Strahl unendlichlang denken nnd nicht blofs beliebiglang, ebenso wie man die Vorstellung der geraden Linie mit der Weitenbehaftung des Unendlichen bilden kann. Indessen würde uns das physikalische Gesetz der Intensitätsabnahme bei näherer Überlegung veranlassen, eine Wirkung von wahrhaft unendlich entfernten Sternen auf unsere Sinne zu verwerfen. Gleichwohl steht der Möglichkeit von solchen nichts

im Wege. Jenes Gesetz gilt wie überhaupt die Physik nicht für das Übersinnlichvorstellbare. Ebenso kann das in der Raumwelt unendlichklein von irgend welchem Grade Vorgestellte als objektiv wirklich angesehen werden, sobald es sich mit den sinnlichobjektiven Erfahrungen verträgt oder zu ihrer Erklärung beiträgt; indessen bleibt es solange subjektiv, als der einzelne oder einige es (als Theorie) annehmen, und wird erst objektiv in vollem Sinne, wenn alle sein Vorhandensein bejahen. Wir müssen beim objektiv Wirklichen wieder unsere Seinsunterscheidungen vornehmen. Die im Unendlichen vorgestellten Sterne sind möglich-objektiv und haben nicht dieselbe Wirklichkeit wie die sinnlich wahrgenommenen, können aber trotzdem bei Übereinstimmung der vorstellenden Geister zur objektiven Welt gezählt werden. Das Möglicherweise-Objektiv-Wirkliche gehört jedenfalls zum Wirklichen, hat irgend eine Daseinsstufe, und zwar gehört es nicht mehr zum Subjektiv-Wirklichen, wenn alle auf der Höhe unserer Begabung Stehenden diese Möglichkeit zugeben. Gleichwohl hat es auch dann noch eine etwas andere Wirklichkeitsbestimmtheit an sich als z. B. die Wirklichkeit der Unendlichkeit des Raumes, welche sich schliefslich alle vorstellen werden (da sie thatsächlich die Behaftung auf den Raum anzuwenden gesetzlich veranlafst sind).

Über eine etwaige objektive Welt, welche für andersartige Geister (etwa Tierseelen) ebenso ist, können wir nicht urteilen.

Ob die Atome der Naturwissenschaft klein oder unendlichklein oder thatsächlich an Raumpunkte sich anschliefsende unendlichkleine oder endliche Bewegungsgruppen sind d. h. bei widerspruchsloser, unserer Anlage völlig entsprechender, alle Erscheinungen aufklärender Lehre sein werden, das zu entscheiden ist Sache der Naturwissenschaft. Es ist aber allgemein wichtig und kann auch eine nützliche Stütze für die Naturwissenschaft abgeben, wenn metaphysisch erörtert wird, dafs selbst unendlichkleine Strecken in einer objektiv wirklichen Welt vorkommen können. Dient es zur Klärung der sinnlich vorstellbaren Welt, so steht der Annahme nichts im Wege; ohne die Vorstellung des Krummen wäre die Vorstellung der objektiven Welt unmöglich, und doch wissen wir, dafs das Krumme ohne Heranziehung des Unendlichkleinen nicht widerspruchslos vorgestellt werden kann. Wie könnten wir behaupten, dafs in der, durch die Vorstellung Aller bedingten objektiven Welt das Krumme existierte, ohne widerspruchslos existieren zu können?

Wenden wir uns zur Frage der Unsterblichkeit, aber, wohl verstanden, vorläufig nur der objektiven Fortdauer einer persönlichen, objektiv von den anderen Seelen sich unterscheidenden Seele! Die

sogenannte Seele irgend eines Menschen kommt nur dadurch zu ihrer objektiven Existenz, daſs sie sich innerhalb der von allen vorgestellten oder auf Grund einiger Urteile von den übrigen mit anerkannten Welt sinnlich vorstellbar äuſsert. Eine Seele, von der niemand etwas sinnlich wahrnimmt, wird man nicht zur objektiven Welt rechnen, und sie hat nach unserer Auffassung überhaupt nicht die Daseinsbestimmtheiten des objektiv Wirklichen. Wenn die bisherigen Erfahrungen und die darauf gegründeten naturwissenschaftlichen Gesetze feststellen, daſs in der organischen Welt die Möglichkeit der Äuſserungen eines sogenannten organischen Wesens nur bei bestimmten Umständen vorhanden ist, so kann man bei Erfüllung dieser Umstände sagen: jetzt ist ein seelisches Wesen objektiv möglich, was bis dahin (z. B. vor der Befruchtung) nicht objektiv möglich war. Gehört diese mögliche Seele nun zur objektiven Welt?

Wir sind genötigt hier gleich wieder den Begriff der objektiven Welt mit verschiedenen Daseinsstufen zu zerlegen. Äuſsert sich das neue organische Wesen für irgend jemand derartig, daſs alle Menschen diese Äuſserungen als hinreichenden Grund anerkennen würden, so gehört die Seele dieses Wesens zur objektiven Welt ebenso wie irgend ein Stein, den jemand in der Hand hält und beobachtet: es hat dieselben Daseinsbestimmtheiten. Ein Stein, den niemals ein Mensch beobachtet hat und dessen Wirkungen auch in keiner Weise in einer Vorstellung existieren, gehört nicht dazu. Behauptet man, daſs er doch existiert, so ist dies eine Existenz, die in keiner Weise in den Rahmen der Naturwissenschaft hineinpaſst. Ein Stein, der auch nicht in der allergeringsten Gröſse zur Anziehungskraft der Erde, zur irgend wie beobachteten Masse oder Schwere beiträgt, ist kein Stein. Eine Seele, die auch nicht im allergeringsten Maſse solche Äuſserungen giebt, welche nach den Gesetzen der Wissenschaft Berechtigung geben von seelischem Wesen zu reden, ist keine objektiv wirkliche Seele im gewöhnlichen Sinne.

Wenn jemand einwendet, die Seele könnte ja in dem betreffenden organischen Zellensysteme vielleicht schon vorhanden sein, ohne daſs es bisher jemand gemerkt hat, so muſs auf das Genaueste geprüft werden, was hier heiſsen soll: erstens organisches Zellensystem, zweitens Vorhandensein, drittens Gemerkthaben. Es nützt nicht, ein Wort wie Vorhandensein sogleich in verschwommenem allgemeinen Sinne zu nehmen; thut man das, so bringt man all die Schwierigkeiten des Ansichseins, des Subjektiven, des Scheines usw. ohne klare Unterscheidung wieder hinein und kann nicht den Anspruch erheben, einen berechtigten Einwurf gemacht zu haben. Sobald jemand nicht nur

die subjektive Vermutung eines selbständigen Lebens in einem befruchteten Keime hat, sondern nach den Erfahrungen der Wissenschaft und derartig, daſs alle hinreichend Unterrichteten ihm Recht geben würden, die Möglichkeit eines selbständigen organischen Wesens feststellt, so gehört die Seele eines solchen Wesens (was man sich auch sonst darunter denken mag) zur möglichen objektiven Welt. Wird aber unter denselben Umständen festgestellt, daſs ein lebender Organismus vorhanden ist und zwar ein derartiger, bei dessen Vorhandensein man allgemein vom Vorhandensein einer Seele spricht, so gehört dieselbe zur objektiven Wirklichkeit. Was eine solche Seele an sich ist, wie sie mit anderen, an sich bestehenden Dingen in Beziehung tritt oder etwa ohne Beziehungen bestehen kann, das ist Sache der schwierigsten philosophischen Wissenschaft, der Metaphysik des Ansichseienden und gehört nicht zu den Wissenschaften der objektiven Welt.

Man komme also nicht immer wieder damit, daſs die Seele, auch wenn niemand eine Vorstellung davon habe, doch in der Natur vorhanden sein müsse! Es erscheint uns als eine müssige, weil in philosophischer Beziehung ungenaue Frage wissen zu wollen, in welchem Augenblicke das seelische Leben in einer Frucht beginnt — als ob in der objektiven Welt ein Augenblick einen bestimmten Vorgang bezeichnen könne ohne Beziehung zu alledem, was überhaupt das Sein der objektiven Welt erst ausmacht!

Wann hört die objektive Existenz der persönlichen Seele auf oder hört sie nicht auf? Wenn wir an einen Verstorbenen denken, so stellt dieser geistige Vorgang in gewissem Sinne eine Beziehung zum Verstorbenen vor; und wenn eine Beziehung vorliegt, so kann man nicht behaupten, daſs nunmehr nicht das geringste Sein des Verstorbenen mehr vorhanden sei. Indessen ist dieses Sein subjektiv und auch subjektiv nur in gewissen Bestimmtheiten vorhanden; nicht etwa ist es so, daſs durch das bloſse Denken an einen Gestorbenen auch eine Existenz desselben noch vorhanden wäre, welche für sich da ist und nun durch Einwirkung auf den Denkenden den Gedanken hervorbringt. So fassen wir diese Behauptung vom Vorhandensein von Bestimmtheiten nicht auf, wie wir auch gar nicht einfach voraussetzen, daſs es getrennte an sich bestehende Wesen giebt, die dann erst aufeinander einwirken. Das ist eine Frage für sich. Ich brauche wohl auch nicht zu sagen, daſs alles Subjektive, einer einzelnen Seele Angehörige auch eine Art von objektiver Existenz hat, sobald Alle sein Vorhandensein in dieser einen objektiv vorhandenen Seele zugeben müſsten. Ein objektives Sein einer Seele im allge-

meinen Sinne aber ist derart, daſs die räumlichen Beziehungen, die wir mit der Seele verbunden denken, vorhanden sind.

Selbstverständlich ist jene Art von Sein innerhalb des Gedächtnisses eines Hinterbliebenen ein anderes, als wenn man sagt: ich will mir subjektiv einmal einbilden, der Verstorbene lebte noch.

Wir haben gesehen, daſs etwas objektiv möglich sein kann, wenn man nach dem Stande der betreffenden Forschungen die Möglichkeit zugiebt, auch ohne daſs man jene sinnlichen Wahrnehmungen macht, welche die objektive Wirklichkeit feststellen. Würde man also wissenschaftlich zugeben, es wäre möglich, daſs die Seele eines Menschen noch existierte, ohne doch in der gewohnten Art die Zeichen der objektiven Wirklichkeit zu geben, so käme ihr die Stufe des objektiv möglichen Daseins zu. Es ist eine bisher im allgemeinen nicht bestrittene Thatsache, daſs mit dem Tode diejenigen räumlichen Äuſserungen wegfallen, in welchen man bei Vergleichen mit dem eigenen Ich die objektive Wirklichkeit der betreffenden Seele fand. Also dasjenige objektive Fortleben, welches in sinnlichendlichen Äuſserungen bestand, ist nach dem Tode sicherlich nicht vorhanden, und darin besteht der Tod. Wir gaben zu, daſs Sterne im Unendlichen objektiv existieren können, ohne sinnliche endliche allgemeine Wahrnehmungen zu veranlassen. Es ist nicht die Möglichkeit vollkommen abzustreiten, daſs auch eine sogenannte seelische objektive Existenz möglich ist ohne solche endlichen Wahrnehmungen; doch ist alsdann ein etwaiges Hinauswandern ins Unendliche ebensowenig begreiflich wie der Übergang einer endlichen Geraden ins Unendliche. Wie die Eigenschaft unendlich zu sein, bei einer Geraden nur durch eine andere Weitenbehaftung stattfindet, so würde dies auch bei einer im Unendlichen sich befindenden Seele nur so vorstellbar sein. Sicherlich ist es nur subjektive Phantasie, nicht aber objektive Wirklichkeit, wenn man der Seele eines Verstorbenen irgend derartige räumliche Äuſserungen zuschreiben will, wie sie der Körper des Verstorbenen vor seinem Tode sinnlich wahrnehmbar zeigte. Was aber eine Seele objektiv wirklich ohne Körper etwa sein soll, das liegt uns fern sagen zu wollen, vielmehr würden wir die Möglichkeit zugeben, einer Seele ohne Körper objektive Existenz überhaupt nicht zuzuschreiben.

Die Frage der Unsterblichkeit gehört demnach in die Philosophie der objektiven Welt nur in dem hier angedeuteten Sinne, nicht aber in dem Sinne, wie sie vielfach von Anhängern der Unsterblichkeit ausgelegt wird. Soviel ist sicher, daſs bei der Annahme einer unsterblichen Seele durchaus die Behaftung mit dem Unendlichen berücksichtigt werden muſs, und daſs der Gegensatz des zeitlichen

Endes oder der Begrenzung innerhalb endlicher Weitenbehaftung und andererseits der Ewigkeit diejenigen Daseinsunterschiede giebt, welche überhaupt immer (abgesehen von den übrigen Daseinsbestimmtheiten) dem Unterschiede der Weitenbehaftungen angehören.

Das Princip der Erhaltung der Arbeit (und damit des sogenannten Stoffes und der realen Gegenstände) ist als Naturgesetz soweit gültig, wie es sich bis jetzt bei endlicher Weitenbehaftung hat beobachten lassen. Es ist höchst übereilt, daraus sofort auf Ewigkeit der Stoffe des jetzigen Planetensystems oder der ganzen jetzigen Sternenwelt schliefsen zu wollen.

Weitenbehaftungen und das Ansich-Wirkliche.

Man könnte einfach dabei stehen bleiben die Thatsache der Verschiedenheit des subjektiven (psychologischen) und objektiven Wechsels zu beobachten und nicht mehr einen äufseren Grund für den letzteren zu suchen, einen Grund, der von meinem persönlichen Ich natürlich verschieden, aber auch vom objektiven und meinem allgemeinen Ich unabhängig sein soll, eine Welt an sich. Zu diesem Gedanken einer getrennten Welt bringt uns die sogenannte Kausalität, sie führt aber zugleich neue Schwierigkeiten mit sich (siehe das metaphysische Kausalverhältnis in meiner mehrfach citierten Schrift!). Auf den Gedanken kommt man besonders durch das Verlangen etwas als seiend anzuerkennen, auch wenn niemand es sich vorstellt oder denkt. Aber auch wenn wir durch Vorstellung die objektive Welt haben, neigen wir doch dahin vieles als wirklich anzunehmen, was in dem betreffenden Augenblicke sich gerade niemand vorstellt.

Eine Erweiterung erhält der Begriff der objektiven Welt dadurch, dafs man zum Ich auch Vorgänge rechnet, deren man sich nicht oder noch nicht oder nicht mehr bewufst ist. Danach würden zur objektiven Welt (freilich mit einer gewissen Änderung der Seinsbestimmungen) auch solche Dinge gehören, die nur in unbewufsten Seinsbeziehungen zu den persönlichen Ichs ständen oder besser die von allen als objektiv wirklich anerkannt werden würden, sobald sie in deren Bewufstsein träten. Soll nun auch noch eine Welt an sich als Ursache der objektiven Gesetzmäfsigkeit existieren, so würde sie ihrerseits, mit den sämtlichen Ichs andererseits, nur dann die bewufste objektive Welt hervorbringen, wenn sie in bewufste Beziehung zu den einzelnen Ichs träte. Sie würde aber nach solcher Annahme unter allen Umständen ein Sein führen, ein sogenanntes selbständiges oder Sein an sich. Dieses Sein wäre nicht ganz genau das gleiche, sobald sie in jene Beziehungen

zum Bewufstsein einträte, sondern hätte dann diese besondere Bestimmtheit, und falls sie in unbewufster Beziehung stände, besäfse sie diese letztere Seinsbestimmtheit. Vorhanden wären also diejenigen Eigentümlichkeiten, welche ihr zukommen, sofern sie die ganze objektive Welt (die den einzelnen Ichs bewufste und auch die ohne Bewufstsein, wie ein unbekanntes Inselland oder eine vororganische Erde bestehende) verursachen, soweit es an ihr liegt.

Trotz der grofsen neuen Schwierigkeiten, die hierbei auftreten und uns noch zu anderen metaphysischen Auffassungen drängen werden, wollen wir doch erst einmal betrachten, was für eine Rolle die Behaftungen hierbei spielen würden, z. B. wie man das Unendliche bei einem im Unendlichen stehenden Sterne oder ein etwaiges Atom im Unendlichkleinen oder das Krumme oder die punktartige Raumstelle auffassen würde. Liegt dann die Behaftung nur in den vorstellenden Geistern oder nur im Dinge an sich oder in beiden?

Etwas Unendliches oder Unendlichkleines als an sich bestehend anzunehmen ist sehr schwierig und hat nicht blofs uns, sondern seit lange viele Philosophen veranlafst zu Zweifeln. Die Rätsel, welche der Begriff des Krummen, allen Vorzügen der Mathematik zum Trotz, aufgab, glauben wir durch die Lehre von den Behaftungen gelöst zu haben. Ein krummes Linienstück führt auf Unendlichkleines, ein unendlichkleines Linienstück ist, wie wir sahen, einerseits nur krumm und andererseits nur gerade bei Heranziehung bestimmter Behaftungen, es hat überhaupt nur Sein durch und mittels gewisser gerade dabei verwendeter Behaftungen. Sicherlich werden wir das Krumme in der sogenannten Welt nicht entbehren wollen (z. B. bei der Vorstellung der Erde); ebenso ist es mit vielen anderen auf Behaftung beruhenden Eigenschaften. Stehen nun Dinge an sich den Ichs gegenüber und erzeugen mit ihnen die das Krumme enthaltende Welt, so wird man wohl zuerst zu der Ansicht neigen, dafs die bald so, bald so zur Verwendung gelangenden Behaftungen nur den Geistern angehören. Diese Ansicht erscheint wie eine Erweiterung der Lehre Kants von der transscendentalen Idealität des Raumes und der Zeit. Auch die berechtigten Einwände gegen Kants Lehre stellen sich hier ein. Das Ding an sich soll die sogenannte Endlichkeit nicht liefern und nicht besitzen, ebensowenig die Unendlichkeit, das Krumme, das Gerade usw. Was wissen wir dann noch von dieser Welt an sich?

Aus welchem Grunde nahmen wir denn die Existenz der Welt an sich an? Wir wollten behaupten, dafs ein Stein, ein Land, die Erde, die Gestirne auch existierten, wenn kein Geist sie sich gerade vorstellt; wir wollten ferner die sich unserer Persönlichkeit aufzwingende

Gesetzmäfsigkeit durch etwas an sich Bestehendes erklären — und nun fällt das, was bei der Naturgesetzmäfsigkeit durchaus nötig ist, das Endliche, Krumme usw. aus dieser Welt an sich heraus? Warum dann nicht lieber dem absoluten Idealismus huldigen?

Man könnte, um von der Welt an sich etwas zu retten, derselben die Verhältnisse zuschreiben, während die Art der Weitenbehaftung von uns herrühren soll; freilich würde der Naturwissenschaft auch damit nicht sonderlich gedient sein, denn gerade das Endliche bei den endlichen Verhältnissen ist es, welches der Natur wie etwas Unverrückbares, von uns nicht Abzuänderndes anhaftet. Aufserdem erklärt gerade die Naturwissenschaft, sobald sie mathematisch genau wird, den Zusammenhang dieser Verhältnisse durch das Krumme, die Differential- und Integralrechnung und man versteht nicht, wie diese uns die Natur erst klar machende Vorstellungsart einer, die Verhältnisse enthaltenden Welt an sich fehlen soll.

Es wird kaum die Ansicht im allgemeinen, dafs ein uns sonst gänzlich unbekanntes Ding an sich auf uns wirkte, direkt zu widerlegen sein, aber die Schwierigkeit des Unendlichen, die bei Kant stark zu dieser Ansicht hinzieht, ist dadurch nicht entfernt. Sicherlich können wir der Auffassung des Seins als einer blofsen Kategorie des Geistes trotz der Annahme des Seins von Dingen an sich, so wenig beistimmen, dafs wir vielmehr der Vorstellung des Dinges ein verschiedenartiges Sein zuschreiben je nach den Behaftungen, und jenem Dinge an sich ein durch das Fehlen der Behaftungen weniger bestimmtes Sein zumessen würden.

Auch das Verhältnis des Ichs und eines sonstigen, ihm gegenüberstehenden Dinges an sich kann nicht durch die Kategorie einer Wechselwirkung erklärt werden. Mögen wir auch die Wechselwirkung als eine Art der menschlichen Vorstellung betrachten — ist sie blofs (!) eine Kategorie, so ist es unsinnig von einer Wechselwirkung zwischen dem Ich und dem Dinge an sich zu sprechen. Wie kann in einer solchen Vorstellung das Ich und die blofse Vorstellungsweise des Menschen, nämlich die Wechselwirkung, einfach zusammengebracht werden mit dem Dinge an sich, das aufserhalb der Vorstellung sein soll? Man könnte zwar sagen: bei der Vorstellung „das Ding an sich stehe in Wechselwirkung mit dem Ich" sei dies hier vorkommende Ding an sich doch ein vorgestelltes Ding an sich. Aber man begreift nicht, wie es dann das nicht mehr vorgestellte, wirkliche Ding an sich fertig bringen soll, durch die blofse geistige Kategorie mit dem Ich in Beziehung zu treten. Die Annahme der Weitenbehaftungen

erschwert im übrigen das etwaige Zustandekommen einer Wechselwirkung zwischen Ich und Ding an sich nicht, freilich erleichtert sie dasselbe auch nicht. Denn man weifs nicht, wie es die blofs als geistig angenommenen Weitenbehaftungen anfangen mit dem Dinge an sich in Berührung zu treten. Übrigens leistet die Lehre von den Behaftungen auch den Anhängern der Kantischen Metaphysik den Dienst, dafs sie die in der apriorischen Anschauung hängengebliebenen Schwierigkeiten des Unendlichen entfernt.

Nimmt man an, dafs die Weitenbehaftungen nicht dem Ich, sondern der Welt an sich angehören und behält man meine Auffassung vom Unendlichen und vom Krummen bei, so müfste das Ansichseiende teilweise endlich, teilweise unendlichklein und unendlichgrofs sein, und zwar müfste die Wirklichkeit z. B. des Krummen darin bestehen, dafs Weitenbehaftungen in verschiedener Anzahl sich zu einer Art des Seins zusammenthäten, und dafs, bei einer anderen Seinszusammenstellung jenes im übrigen Gleiche nicht mehr krumm wäre. Obenein müfsten diese eigentümlichen Arten des Seins dem vorstellenden Geiste zugänglich werden, in ihn übergehen, ein Abbild in ihm erzeugen oder so wirken, wie man überhaupt dann die Wirkung auf den Geist auslegen mag.

Endlich könnten die Weitenbehaftungen sowohl als ursprüngliches Besitztum des Ichs als auch der Welt an sich angenommen werden. Dann müfste man das Vorhandensein der objektiven Welt durch eine sonderbare Übereinstimmung oder gar durch Wirkung ohne genaue Übereinstimmung mit den erzeugenden Weitenbehaftungen ansehen. Beides vermehrt zwar nicht die Gröfse der Schwierigkeit, die überhaupt in der Erzeugung einer objektiven Welt durch zwei aufeinander wirkende selbständige Wesen liegt, aber diese Schwierigkeit käme doch in vervielfachter Anzahl, je nach den einzelnen Weitenbehaftungen oder ihrer Zusammenstellung vor.

Die Weitenbehaftungen und das absolute Ich.

Die Schwierigkeiten der dem Ich gegenüberstehenden Dinge haben schon oft zur Leugnung der Welt an sich (soweit sie nicht Ich ist) geführt. Versetzen wir uns auch einmal in diese Ansicht, die sich ebenfalls nicht mit vollständiger Beweiskraft widerlegen läfst. Die Thatsache der verschiedenen an Körper (wie wir kurz sagen wollen) „gebundenen" persönlichen Seelen ist dann so aufzufassen, dafs sie mitsamt den Körpern und der übrigen objektiven Welt eine

Existenz führen, die wir einem allgemeinen Ich in ähnlicher Weise zuschreiben, wie wir unsere persönlich wechselnden Gefühle und Gedanken je unserer einzelnen Persönlichkeit, dem einzelnen Menschen zuschreiben. Der Gegensatz z. B. von einer toten Welt und lebenden Organismen und die Beziehung zwischen beiden bleibt natürlich als Thatsache dabei bestehen. Wie z. B. ein Felsen dazu kommt in der Vorstellung einer Person bald aufzutauchen, bald zu verschwinden, das behält seine Schwierigkeit, nur wird gesagt, dafs sich alle solche Ereignisse in etwas abspielen, was wir durch den Namen eines absoluten Ichs für in vielen Fällen wesensgleich dem persönlichen Ich erklären.

Selbstverständlich erheben sich hierbei auch folgende Schwierigkeiten: was hat das einzelne persönliche Ich mit dem absoluten Ich zu thun? Und wie kommen die vielen persönlichen Ichs dazu alle dem absoluten Ich anzugehören und zwar so, dafs sie sich eine in ihren Gesetzen gleiche objektive Welt vorstellen? Die Abwägung dieser gegenüber den anderen metaphysischen Richtungen soll hier nicht versucht werden. Was für eine Rolle müssen wir aber dann den Weitenbehaftungen zuschreiben, wenn wir auch für diese Ansicht unsere Untersuchungen fruchtbar machen, d. h. die auch hier im Einzelnen gerade so gut auftauchenden Schwierigkeiten des Unendlichen entfernen wollen?

Jedenfalls gehören auch die Weitenbehaftungen alsdann dem absoluten Ich an. Es fragt sich dann, was Raum, Zahl, Zeit usw., deren Widersprüchen die Lehre von den Behaftungen gilt, zunächst in den einzelnen Persönlichkeiten eigentlich sein sollen. Mag dies nun auch ausgelegt werden wie es wolle, es können die Weitenbehaftungen alsdann als eine genauere Zerlegung im Sein dieser Mannigfaltigkeiten gelten und würden in gewissem Sinne des irgendwie angenommenen Seins mit teilhaftig werden; aber auch hierbei müfsten wir unsere Ansicht festhalten, dafs durch die Verschiedenheit der einen oder der anderen Weitenbehaftung und das Zusammenkommen verschiedener auch Verschiedenheiten in den Seinsbestimmungen stattfinden. Ganz ebenso bringen sie bei irgend welchen Erklärungen der objektiven Welt, auch für den absoluten Idealismus, Besonderheiten (Modifikationen) in der Seinserklärung dieses Objektiven mit sich. Es ist durchaus nicht richtig, dafs durch die Annahme einer allgemeinen metaphysischen Richtung, wie des Idealismus oder auch des Materialismus, die Lehre von den Behaftungen mit ihren Resultaten und ihrem Nutzen umgestürzt würde.

Es ist mir aber ein Bedürfnis eine in den letzten Besprechungen nicht vorkommende, aber im ganzen Buche hier und da angedeutete

metaphysische Richtung anzuführen und die Stellung der Weitenbehaftungen in ihr anzudeuten. Ich will diese Ansicht der Kürze halber wie in der Schrift: „Eine mögliche Wesenserklärung usw.“ als metaphysischen Relativismus bezeichnen, obgleich — wie gesagt — in dem Namen die Sache selbst nicht hinreichend gekennzeichnet ist.

Die Weitenbehaftungen und der metaphysische Relativismus.

Wenn man sagt, wir hätten keine absolute Kenntnis vom Wirklichen, sondern dieselbe sei immer nur relativ, so denkt man dabei, daſs das Wirkliche für sich d. h. auch unerkannt existiert, und daſs die durch seine Einwirkung entstehende Erkenntnis wesentlich bedingt sei durch die Natur des Erkennenden und die Umstände des Erkennens. Es bleibt dabei die Schwierigkeit der Wechselwirkung zwischen getrennt existierenden Wesen bestehen. Kann man nicht diese nachträglich gedachte Wechselwirkung der anfänglich selbständig gedachten Dinge vermeiden?

Vielfache Betrachtungen führen dahin, daſs schon innerhalb der sinnlichen Anschauungen ein bestimmtes Einzelelement bei Wegstreichen des Vergleichs mit anderen seine Bestimmtheit verliert. Mit mindestens dem gleichen Rechte, mit dem man zwei räumlichen Strecken Anschauungsexistenzen zuschreibt, die dann durch das Verhältnis der Strecken erweitert werden sollen, kann man das Verhältnis beider Strecken als eigentlich allein in der Anschauung existierend betrachten und die Existenz jeder einzelnen nicht auf die gleiche Stufe der Existenz wie die Existenz des Verhältnisses stellen, sondern mehr in den Hintergrund rücken. Bestärkt wird diese Auffassung dadurch, daſs ein Verhältnis zweier Strecken sowohl mit endlicher Weitenvorstellung als auch mit unendlicher irgend welchen Grades behaftet werden kann. Man sagt alsdann, die beiden einzelnen Strecken hätten eine Anschauungsexistenz in endlicher Weitenbehaftung, beziehlich eine solche in unendlicher.

Der Unterschied beider Auffassungen besteht vornehmlich darin, daſs durch Hinzukommen der Behaftung das Hinzukommen einer besonderen Seinsbestimmtheit gedacht wird, während das Verhältnis beider Strecken auch ohne Behaftung eine allgemeinere Art von Sein haben soll. Anstatt langer Ausführungen, die nicht hierher gehören, will ich mit einem Sprunge etwas Ähnliches auch für das Sein der sogenannten Dinge, des sogenannten Ichs, des Subjektiven und Objektiven als möglich anführen. Anstatt also Dinge und Ich als Einzelexistieren-

des zuerst einander gegenüber zu stellen, könnte man als allgemeinere Existenz ein sogenanntes metaphysisches Verhältnis ansehen. Wie man sich das Verhältnis zweier Strecken vorstellen kann, ohne doch dabei als in gleicher Art seiend die Einzelstrecken anzuschauen, so könnte man auch vom Verhältnis irgend eines Dinges an sich und eines Ichs als existierend sprechen, ohne doch schon die Existenz des vom Ichs getrennten Dinges in gleicher allgemeiner Seinsstufe anzunehmen. Allerdings wird man sagen: „es muſs doch etwas sein, was im Verhältnisse steht!", doch ist diese durch lange Gewohnheit gefestigte Auffassung nicht die einzig mögliche. Man kann auch umgekehrt sagen: „Es muſs doch ein Verhältnis da sein, ehe die einzelnen Dinge ihre volle Seinsbestimmtheit haben!" Noch besser ausgedrückt hieſse dies: es hat schon das Verhältnis eine bestimmte allgemeine Art des Seins, ohne daſs die dabei gedachten einzelnen Elemente, welche im Verhältnisse stehen, bereits bestimmte andere Seinsbestimmtheiten haben, die ihnen anhängen können, wenn neue Seinsbestimmungen (ähnlich wie die Behaftungen bei den Strecken) hinzukommen.

Diese Auffassung ist etwas ganz Anderes wie der anfangs erwähnte Erkenntnisrelativismus. Zwar wird auch hierbei alsbald von Erkenntnis die Rede sein, aber es wird nicht etwa ein „Sein schlechthin" oder eigentliches Sein den Einzeldingen von vornherein zugeschrieben, sondern ihnen kommen besondere Seinsstufen zu, sofern neue (behaftungsähnliche) Seinsbestimmtheiten ihnen zugehören. Will man sagen, diese müſsten, wenn sie ihnen überhaupt unabhängig von unserer subjektiven Betrachtungsweise zukommen sollen, ihnen von vornherein und immer angehören, und es wäre doch ganz gleichgiltig, ob wir sie ihnen erst nachträglich in Gedanken zuschöben, so verkennt man das Wesen der in diesem metaphysischen Relativismus enthaltenen Seinslehre. Es giebt demnach kein absolutes Sein, sondern nur Seinsstufen; etwas ist nicht einfach allgemein da, sondern ist nur da in gewisser Bestimmtheit und ist anders da, nicht wenn neue Bestimmtheiten von uns hinzugedacht werden, sondern sofern andere Bestimmtheiten thatsächlich da sind. Dies thatsächliche Dasein und die dadurch beschriebene Seinsbestimmtheit sind ganz dasselbe.

Was bedeutet aber bei dieser Auffassung die objektive Welt? Die Welt an sich d. h. einzelne Dinge an sich soll es ja danach nicht geben; man kann zwar das Wort „Welt an sich" gebrauchen, aber dies bedeutet dann nicht ein metaphysisch Existierendes, sondern nur eine logische subjektive Loslösung gewisser zum Verhältnissein hinzukommender, sekundärer Seinsbestimmtheiten. Eine allgemeinere Art

der Existenz, ein zwar nicht absolutes Sein, aber doch ein vom naiven Menschen mit dem Worte Welt bezeichnetes Sein schreiben wir den Verhältnissen zu, in denen das logisch abgesonderte Dingansich und das logisch abgesonderte Ich stehen. Wir nähern uns hiermit ganz beträchtlich der naiven Auffassung der Welt, die unter den Schwierigkeiten des Denkens von den bisherigen metaphysischen Richtungen ganz sonderbar unsicher gemacht worden ist. Wir können fast das Wort „objektive Welt" im Gegensatze zur Weltansich und im Gegensatze zur einzelnen persönlichen Vorstellung vermeiden und einfach sagen: die Welt. Ein bestimmtes Sein, welches vom naiven Menschen und von der Naturwissenschaft bevorzugt und einfach Sein oder Welt genannt wird, wollen wir einmal bezeichnen als „Weltsein". Dann haben wir freilich zu überlegen, was Seele und Körper, was endliches Raumdasein, was Unendlichkeit des Raumes, Unendlichkleines, Krummes, was endlich das bloſs Vorgestellte oder Subjektive im Vergleich zu diesem Weltsein zu bedeuten haben.

Fängt der naive Mensch an über das Weltsein genauer nachzudenken, so bemerkt er bald, daſs diese Welt ihm nicht immer völlig bekannt ist, daſs von diesem Sein immer nur ein Teil gegenwärtig ist, der bald gröſser, bald kleiner, bald Null ist (wenn er schläft). Thatsächlich taucht der verschwundene Teil immer wieder auf, und zwar so, daſs er sich entweder wieder ebenso zeigt als vorher oder doch ganz ähnlich, nur mit gewissen bemerkbaren gesetzlichen Verwandlungen, mit einem Fortschritte oder einer gesetzmäſsigen Änderung. Man muſs dann sagen: die Verhältnisse, welche dieses Weltsein ausmachen, sind gesetzlich veränderlich. Zugleich bemerkt ein solcher ungelehrter nachdenkender Mensch, daſs etwas auftaucht, welches wir die Frage nach dem Warum nennen würden. Das Auftauchen dieser Frage ist keine einzeln dastehende Thatsache, sondern der denkende Mensch erinnert sich plötzlich, daſs in diesem Weltsein auch mancherlei vorkam, welches nicht denselben gesetzlichen Wechsel zeigte, wie das ihm zuerst auffallende Weltsein. Dies sonderbar und anders wie die übrige Natur Wechselnde knüpft sich zwar vielfach an gesetzmäſsige Vorgänge der Naturwelt (z. B. Verletzungen des Körpers und sich daranschlieſsender Schmerz), es zeigt sich aber auch eine gewisse, von jenen Gesetzen abweichende Gesetzlichkeit (Überwinden des Schmerzes, Verknüpfen mit Gedanken, Frage nach dem Warum). So kommt er dazu in dem Weltsein eine thatsächliche Verschiedenheit kennen zu lernen, das Sein der körperlichen Welt und das der seelischen. Wie schon gesagt, bemerkte er aber auch, daſs das Sein der körperlichen Welt in seinem Umfange wechselt, dieselbe Bemerkung macht er an

diesen seelischen Vorgängen. Insbesondere dabei bemerkte er den eigentümlichen Drang der Frage nach dem Warum. Er lernt kennen, wie beim Verengern des Seins der körperlichen Welt (Abkehren von äufseren Erfahrungen) in der seelischen eine Art Ergänzung und Wiederholung des vorher vorhandenen körperlichen Seins auftritt, die sogenannte Vorstellung der körperlichen Welt. Dieser Vorstellung kommt dieselbe Eigentümlichkeit zu, welche die bis dahin bemerkte seelische Welt hatte, eine psychische Beweglichkeit, eine Anordnung nach psychischen Gesetzen bei einer Art von Festhalten der körperlichen Welt (im Gedächtnisse). Ebenso bemerkt er, dafs die sich verengernden seelischen Vorkommnisse in Vorstellungen Ergänzung und Wiederholung finden können, dafs dabei ihre Gesetzlichkeit (im sogenannten Gedächtnisse) in gewisser Art festgehalten werden kann, dafs aber damit die andere beweglichere seelische Gesetzlichkeit (Wechsel der Vorstellungen von früheren seelischen Vorkommnissen) verknüpft ist. Dieser Thatsache bemächtigt sich die Frage nach dem Warum.

Der Mensch bemerkt auch, dafs diese Frage schon bei dem Auftauchen des Seins der körperlichen Welt immer vorhanden war und ihn veranlafste zu denken, der eine Vorgang entspringe als Wirkung aus dem anderen: der Ursache. Bei diesem Gedanken stehen noch jene beiden thatsächlichen Vorgänge, allerdings bereits in der Vorstellung verknüpft, einander gegenüber. Jetzt aber fängt er an die Thatsache, dafs eine seelische Vorstellung das körperliche Weltsein verknüpft, verbindet, begleitet oder mit dabei vorkommt, so auszulegen: die durch Vorstellungen verknüpften körperlichen Weltvorgänge müssen wohl in der Vorstellung bestehen. Es ist keineswegs sicher, dafs er damit recht hat, er weifs blofs, dafs die körperlichen Vorgänge mit ihrer zeitlichen Gesetzlichkeit bisweilen auch erweitert und verengt und beweglich geworden in der Art der seelischen Vorgänge thatsächlich vorkommen, und dafs er dann sagt: sie werden vorgestellt. Er ist auch bereits dazu geführt worden die seelischen Vorgänge mit dem Ausdrucke zusammenzufassen: sie bilden eine Seele. Dieser Seele weist er nun alles zu, nicht blofs das, was sich nur in seelischer Gesetzlichkeit bewegt, sondern auch das, was die körperliche Gesetzlichkeit noch enthält, aber bereits mit seelischer Beweglichkeit verbunden ist (die Vorstellungen von der Körperwelt). Nun fängt er gar an bei den zuerst nur als Naturweltsein vorkommenden Ereignissen die damit untermischte Verknüpfung nach Ursache und Wirkung so auszulegen, als ob diese körperlichen Vorgänge auch nur eine Art von Vorstellung wären. In diesem Augenblicke erst taucht die

Welt an sich empor. Er glaubt, daſs ebenso wie der eine Naturvorgang den anderen verursacht, so auch etwas Besonderes die ganze mit der Vorstellung des Warum verknüpfte Raumwelt verursachen müsse, daſs diese Raumwelt also der Vorstellung, mithin dem Seelischen angehört, daſs aber dieses Angehören ein anderes ist, als die bewegliche Vorstellung (Ergänzung, Wiederholung im Gedächtnisse) der nicht so beweglichen Naturwelt und auch ein anderes als die Gefühlswelt und die Vorstellung dieser Gefühlswelt. So entsteht der Unterschied der Welt an sich, der objektiven Welt, des subjektiven Ichs und des allgemeinen Ichs.

Würde dieser Mensch keine anderen körperlichen Menschen kennen lernen, so würde ihm wohl die Vorstellung des absoluten Ichs schwer kommen; er schlieſst aber aus den räumlichen Ähnlichkeiten des am engsten mit seinem Seelischen verknüpften Körpers und der übrigen organischen Körper, daſs eine ähnliche Verknüpfung auch bei den übrigen Körpern vorhanden sei, schlieſst, daſs es andere Seelen gebe, daſs auch bei ihnen die Vorstellung der Welt vorkomme, ferner, daſs auch sie das Sein der körperlichen Welt verbinden, so wie er solche Verbindung von Ursache und Wirkung bemerkte und seiner seelischen Gesetzlichkeit zuordnete. Diese vorgestellte Übereinstimmung der eigenen Verknüpfung von Seele und Körperwelt mit einer solchen der übrigen Menschen veranlaſst ihn dazu ein groſses Ich zu denken, das in derselben Weise wie er und alle Menschen das Sein der Körperwelt mit Ursache und Wirkung verknüpft und zu einem zusammenhängenden Ganzen vereinigt. Das kann ihn entweder veranlassen alles Sein sich nur noch durch dies absolute Ich verknüpft vorzustellen (absoluter Idealismus) oder eine von jener Verknüpfung befreite Welt an sich anzunehmen (ein von den Kategorien freies Ding an sich) oder ein Ding an sich, von dem man wenigstens nichts weiter sagen kann, als daſs es ist und durch Wirkung die empirische Realität hervorbringt.

Wie deutet dies der metaphysische Relativismus mit seinen Seinsstufen? Er möge zunächst das Weltsein als die in vieler Beziehung (man denke an das Sinnliche und Gesetzmäſsige!) bevorzugte Stufe des Seins betrachten und dazu rechnen, was alles als Natur irgendwann für ihn da ist. Er wird dann einer vorgestellten Naturwelt oder seelischen Welt ein etwas anderes Sein zuschreiben — etwas anders, weil die sinnliche Lebhaftigkeit und der damit verknüpfte zeitliche Wechsel nicht mehr da ist, dafür aber die Beweglichkeit des seelischen Seins mit ihrem Hin- und Herspringen, ihrer Wiederholung,

ihrer andersartigen gedanklichen Verknüpfung vorhanden ist. Er verwendet hierzu nützlich die Lehre von den Behaftungen.

Dasjenige Weltsein, welches mit der sinnlichen Wahrnehmung und mit der Weitenvorstellung des Endlichen behaftet ist, hat hierdurch eine andere Seinsbestimmtheit als das mit dem Unendlichen behaftete Weltsein. Die Behaftung soll hier nicht bedeuten, dafs etwa einerseits eine Seele dastehe, welcher die Behaftungsfähigkeiten ankleben, und andererseits etwas Anderes, welchem die Behaftungen angeklebt werden, sondern es bedeutet einfach die Thatsache, dafs eine Verschiedenheit vorliegt, welche wir die Verschiedenheit der Behaftungen nennen und welche wir wohl unterscheiden, um nicht in die Widersprüche des Unendlichen zu kommen.

Das seelische Weltsein unterscheidet sich thatsächlich vom körperlichen Weltsein dadurch, dafs (unter anderem) der Raum und also die räumlichen Behaftungen fehlen, dafür aber die Behaftungen in Anderem z. B. der Zahlenmannigfaltigkeit vorkommen können. Also ergiebt sich als eine Erfahrungsthatsache die Modifikation der bevorzugten grofsen Stufe des Weltseins durch die Seinsbestimmtheit der Behaftungen nach verschiedenen Stufen und mit verschiedenen Mannigfaltigkeiten.

Wir haben die endliche Weitenbehaftung auch die des Sinnlich-vorstellbaren genannt. Es ist eine weitere Thatsache, dafs diese Behaftung einerseits mit den sinnlichen Mannigfaltigkeiten (Sehfeld usw.) verknüpft sein kann, andererseits aber sie entbehren und bei der blofsen Vorstellung der Welt vorkommen kann. Die Thatsache der blofsen Vorstellung veranlafste, wie wir oben sahen, die naiven und immer mehr denkenden Menschen zu dem Gedanken einer Absonderung des Weltseins von der verknüpfenden, begleitenden Wechselwirkung, und sie veranlafst schliefslich den immer weiter Denkenden zu dem Begriffe des Dinges an sich, das dem Ich gegenüberstehen soll. Der metaphysische Relativismus fafst als das gewöhnliche Sein das Weltsein und nennt dieses, sofern die von der Wechselwirkung und Ähnlichem befreit gedachte Welt gegenüber gestellt wird einem Ich, „das Verhältnissein zwischen einer derartig unterschiedenen Welt an sich und einem Ich.“ Es ist also hierbei ganz deutlich, dafs in solchem Verhältnisse die einzelnen Dinge, die sich verhalten sollen, nicht ein gleichwertiges Sein haben wie das Weltsein, sondern dafs ihr Sein nur durch solche Seinsbestimmungen, einerseits Entfernung von Behaftungen und andererseits Gesondertdenken von Behaftungsfähigkeiten

besteht. Es ist danach nicht schwer näher anzugeben, wieso ein subjektives Ich, ein allgemeines Ich oder absolutes Ich als in gewissen Bestimmtheiten seiend anzusehen ist.

Ein Sternensystem ohne lebende Wesen, betrachtet in verschiedenen metaphysischen Richtungen.

Die Naturwissenschaft hat ein volles Recht ohne Rücksicht auf die Philosophie ihre Lehren aufzustellen, auch wenn die Auslegung derselben der Philosophie grofse Schwierigkeiten bereitet — vorausgesetzt ist aber dabei, dafs sie bei Aufstellung ihrer Lehren vollkommen in demjenigen Rahmen bleibt, in den ihre Voraussetzungen und ihre Methoden passen. Im Unrecht ist sie sofort, wenn sie Behauptungen aufstellt, die über diesen Rahmen hinausgehen. Sie ist dann keine eigentliche Naturwissenschaft mehr, sondern fängt an Philosophie zu werden und darf nicht mehr diejenige Sicherheit innerhalb bestimmter Grenzen beanspruchen, die ihr als Naturwissenschaft zukommt. Beispiele von solchen unberechtigten Behauptungen sind die Sätze: „der Stoff ist ewig; die materielle Welt ist unendlich; die Summe der aktiven und potentiellen Energie bleibt bis auf unendlichwenig oder garnichts in der Welt dieselbe und zwar ewig dieselbe," denn bei diesen Sätzen geht sie über die Voraussetzung der endlichen Beobachtung, innerhalb deren einzig und allein jene Sätze gefunden sind, hinaus und spricht vom Unendlichen, ohne die Beziehungen vom Endlichen und Unendlichen ebenso widerspruchslos gefunden und verstanden zu haben wie ihre Beobachtungen und Methoden, soweit sie sich auf das Endliche beschränken.

Wenn die Naturwissenschaft den Satz aufstellt, dafs eine Zeit gewesen ist, wo im Planetensysteme noch keine organischen Wesen vorhanden waren und doch die Vorgänge desselben sich nach bestimmten, uns im Grofsen und Ganzen bekannten Gesetzen abspielten, so bewegt sie sich dabei innerhalb des Rahmens der endlichen, durch endliche Verhältnisse ausgedrückten Zeit, innerhalb ihrer ihr bisher möglichen Auffassung des Organischen und Unorganischen; sie setzt einfach voraus, dafs sich die Zeit objektiv abspielt, ohne weiter daran zu denken, ob in diesem Begriffe die menschliche Vorstellungsfähigkeit als Voraussetzung enthalten ist, sie setzt als objektive Welt alles ihr bekannt Gewordene in der ihr bekannt gewordenen Art voraus und schliefst einfach, dafs es ebenso noch mehr giebt, auch wenn es niemandem bekannt geworden ist. Sache des Philosophen ist es zu

überlegen, was dieser Satz wohl zu bedeuten haben mag, wenn er wie irgend welche anderen innerhalb eines bestimmten Auffassungskreises gemachten Sätze, beim Hinausschauen über diesen Kreis ausgelegt werden soll. Ein Hinausschauen bedeutet hier schon der bloſse Gedanke, daſs ein objektives Existieren zu einer Zeit, wo niemand da war, der objektivgesetzmäſsige Existenz durch Begreifen und Aufstellen von Gesetzen bilden kann, ein schwieriger Begriff ist. Der Naturforscher als solcher hat keine Verpflichtung daran überhaupt zu denken, er prüft nicht, worin das Sein einer objektiven Welt besteht und was die Welt ist, wenn niemand ihre Gesetze formuliert. Er thut so, als wenn die Naturgesetze wie an einer groſsen Tafel angeschrieben ständen und als ob sich die Welt nach dieser Tafel richten müsse, ganz gleich ob das Lesen und das Sichrichten metaphysische Schwierigkeiten bietet, wenn man keine Augen und keine persönlichen Gedanken hat. Er fragt ja nicht, was haben diese Gesetze zu bedeuten abgesehen von unserer Art sie auszusprechen, fragt nicht, ob sie dann überhaupt noch etwas zu bedeuten haben; die objektive Welt ist für ihn einfach da, mag nun auch bei philosophischem Nachdenken dies Dasein etwas höchst Schwieriges und mit dem Ich Verknüpftes sein! Für ihn allerdings existiert, solange er Naturforscher allein bleibt, nur das eine Sein, nämlich das, was wir oben als das Weltsein bezeichneten. Er versteht darunter ebensowohl alles, was jetzt ist, als wie das, was war. Wollte er erst anfangen zu überlegen, wieso dieses Sein mit der Zeit verknüpft ist und was diese Zeit ohne unsere seelische Zeitvorstellung ist, so würde er sofort aus seinem Rahmen der Exaktheit herausgehen. Es ist ganz selbstverständlich, daſs ein solcher Naturforscher, solange er Naturforscher allein sein will, eine „vollkommene", „alles berücksichtigende", „für einen menschlichen Geist möglichst gründliche" Erklärung überhaupt nicht giebt. Sobald man aber nicht mehr bloſs Naturforscher in jenem engeren Sinne sein will, muſs man einen Satz wie jenen von der Existenz des Planetensystems einer weitgehenden Prüfung und Auslegung unterziehen.

Versuchen wir dies erstlich unter der Voraussetzung, daſs es eine Welt an sich giebt, von der wir aber nicht das Allgemein-Räumliche, Allgemein-Zeitliche und die Existenz der Behaftungen voraussetzen können, die vielmehr durch Einwirkungen auf ein Ich und Mitspielen der Vorstellungsarten, Behaftungen usw. des Ichs die objektive Welt zu stande bringt. Ein Bestehen des Planetensystems an sich kann dann damit nicht gemeint sein, denn alle Dinge an sich sollen keine Zeit haben, keinen Raum und die übrigen bestimmten Eigenschaften nicht, welche den Begriff eines solchen Systems ausmachen.

Es kann also nur gemeint sein ein System, soweit es unter den Voraussetzungen eines geistig auffassenden Ichs vorgestellt wird; also irgend ein Geist stellt sich die zeitlichräumliche Welt vor. Aber, kann man einwenden, dieser Geist stellt sich doch auch seine eigene Existenz, das Vorhandensein seines Körpers mit der Seele zeitlich vor. Es fragt sich nun, ob er mit der Vorstellung, daſs kein Körper und keine menschliche Seele in einem solchen existiert, die Vorstellung vom Planetensystem philosophisch beibehalten kann. Er muſs dann wohl schlieſsen, daſs irgend etwas die Bestimmtheit der objektiven Welt veranlasst, denn wozu wird sonst die Welt an sich überhaupt noch angenommen? Wenn er sich aber vorstellt, daſs eine Zeit war, wo das Planetensystem ohne persönliche Menschen existierte, so muſs er doch sagen, daſs ein Grund in der Welt an sich vorhanden sein muſs, der diese Vorstellung rechtfertigt; denn gerade das Nichtexistieren der organischen Wesen ist ein Schluſs, der durchaus nicht aus der Unbestimmtheit des bloſsen Ichs herrührt, sonst müſste das bloſse Ich die Realitäten der Naturwissenschaft erzeugen können. Nun soll freilich die Zeit aus dem Ich stammen; aber die bloſse Zeit besorgt doch keineswegs diejenige objektive Realität in ihren Einzelheiten, auf denen eine solche Theorie vom Planetensystem beruht. Die Thatsache des sogenannten Daseins ohne menschliche Wesen muſs solche Gründe in der Welt an sich haben, die das Sein der persönlich-zeitlichen Ichs ausschlieſsen. Wie vertragen sich diese Gründe mit der Voraussetzung, daſs jener Satz nur für die durch das Ich mitbedingte und zeitlich geregelte objektive Welt gelten soll?

Kant würde sagen: die Frage nach der vororganischen Welt ist nur eine solche, die hineingehört in die Wissenschaft von der empirisch-realen Welt. Lehrt nun aber die empirisch-reale Wissenschaft, daſs eine Seele nicht ohne Körper existiert (und zwar rein empirisch-real, nicht metaphysisch gesagt), so kann jedenfalls eine solche Seele (die sich empirisch-körperlich-zeitlich zeigt) nicht zu einer Zeit existiert haben, wo noch keine organischen Wesen gewesen sein sollen. Also sobald man sich eine vororganische Welt vorstellt — muſs man sagen — gehört diese Vorstellung einer Seele (oder einer Existenz) an, die unabhängig ist von dem zeitlichen Verlauf, sofern sie sich diese vororganische Welt vorstellt. Also muſs man sich dann notwendig eine existierende Seele vorstellen, die in sich jene Vorstellung („vororganische Welt") hat, oder wenigstens die sogenannte seelische Existenz solcher Vorstellungen muſs man sich vorstellen. Damit ist diese Seele herausgerückt aus den Begriffen von sich körperlich äuſsernden Seelen, ja sogar aus solchen von zeitlichlebenden, sich zeitlich abspielenden

Seelenvorgängen. Soll eine Seele sich zeitlich abspielen, so ist sie auch den Vorgängen unterworfen, die zeitlich sind, also kann sie nicht vororganisch existieren, demnach auch die vororganische Welt als bloſse Vorstellung einer s o l c h e n, beschränkten, innerhalb des Zeitverlaufes nur jetzt existierenden Seele nicht existieren. Existieren muſs demnach (für diese metaphysische Richtung) eine allgemeinere Seele von nicht bloſs zeitlicher Gegenwartsexistenz, und es ist nötig alsdann zwischen dem Sein einer zeitlich-empirischen und dem einer nichtzeitlichen Seele zu unterscheiden. Erstere hat empirische Realität (aber transcendentale Idealität), letztere fällt aus solcher Realität heraus. Es ist aber nicht richtig sie nur einfach als Ding an sich zu betrachten, von dem man nichts (!) wissen könne. Denn wir müssen, um diese Metaphysik aufrecht zu erhalten, durchaus von ihr wissen, daſs sie zwar unzeitlich ist, aber doch Vorstellungen von der vorganischen Welt oder besser die vororganische Welt selbst (als bloſse Vorstellung) in sich hat.

Soll aber der Inhalt solcher Vorstellungen noch den Namen einer vororganischen Welt verdienen, so muſs diese Welt auch Verhältnisse in ihren räumlichen und zeitlichen Einzelheiten enthalten. Das Sein dieser Seele ist also ein solches, von dem man vielerlei aussagen kann (nämlich daſs in diesem Sein alle jene Weltvorstellungen vorkommen), nicht aber ein solches, von dem man nichts aussagen kann (wie das Sein des nicht zeitlichräumlichen Dinges an sich).

Also auch diese Metaphysik ist genötigt mehrere Arten des Seins anzuerkennen und sie würde beim weiteren folgerichtigen Ausdenken auch diejenigen Stufen des Seins unterscheiden müssen, welche den verschiedenen Behaftungen und ihren Zusammenstellungen entsprechen. Die Verhältnisse der vororganischen Welt sind endlich, wie auch diejenigen der jetzigen Welt endlich sind, und unendlichklein gerade so, wie man jetzt das Unendlichkleine zur Erklärung des Krummen etc. nötig hat. Auch die Frage, ob man sich etwa eine von der Gegenwart unendlich entfernte Zeitstelle denken könne, zu der jene vorganische Welt einen gewissen Zustand gehabt habe (z. B. etwa bei der Entwicklung des Planetensystems aus einem rotierenden Nebel), wird nach dem Maſsstabe einer widerspruchslosen Theorie der Behaftungen und den oben angeführten Folgen jener Metaphysik zu entscheiden sein — stets vorausgesetzt natürlich, daſs wir uns auf den Boden jener Metaphysik versetzen. Man sieht, auf dem Standpunkte, der innerhalb der Naturbetrachtung über das Zeitlich-Räumliche hinauszugehen verbietet, kann man nicht stehen bleiben, und doch wird uns durch die Voraussetzung dieser Richtung verboten diese

weiteren Folgerungen zu ziehen (dafs man auf anderen Gebieten wie dem des Moralischen über das Zeitlich-Räumliche hinausgehen dürfe, davon ist hier keine Rede).

Auch wenn man einem absoluten Ich alle Ursachen für die Annahme einer vororganischen Welt zuschiebt, mufs man in jenem Ich das persönlich-zeitliche von einem nichtzeitlichen trennen. Denn wenn sich das persönlich-zeitliche vorstellen soll, dafs einmal eine Zeit war, wo kein persönliches Ich und doch eine zeitlich-räumliche unorganische Welt existierte, so müssen in solcher, dem absoluten Ich angehörigen Welt Gründe sein, weshalb wir uns jetzt überhaupt das einstige Dasein der vororganischen Welt in bestimmter Art vorstellen. Damit ist jene Welt durch einen Schnitt von unserer Persönlichkeit getrennt, mögen wir ihr auch den Namen eines Ichs beilegen. Die Behaftungen aber müssen in jener abgetrennten Welt irgend eine Rolle spielen; wollten wir sie nur den organischen Körperseelen zuschreiben, so verständen wir nicht, wie jene vororganische Welt ohne Behaftung, ohne das Krumme, die Tangente usw. überhaupt noch irgendwie unseren jetzigen Vorstellungen von der Weit ähnlich sein soll. Dann könnten wir sie nur getrost streichen und behaupten, es gäbe keine aufserzeitlichen oder zeitlichen Gründe für sie. Gehören aber die Behaftungen der vororganischen Welt an, so erhebt sich die Schwierigkeit, wie dieselben bald so und bald so zusammentreten können, um bald das Krumme, bald das Gerade usw. zu geben. Wir kommen einer klaren Gedankenfolge hierüber vielleicht in folgender Art noch besser bei.

Der Satz: „es gab einmal eine Welt ohne organische Wesen", ist auch im absoluten Idealismus zunächst unter Voraussetzung einer irgendwie bestehenden Zeit auszusprechen. Wenn es aber aufser dem Ich kein Ding mehr giebt und gab, so mufs diese vororganische Welt in dieses Ich hineinfallen. In diesem Ich sind also zu trennen die persönlichen Ichs von dem übrigen Inhalte desselben. Es kann jener Satz nun als eine Wahrheit aufgefafst werden, die nur für einen gewissen Ideenkreis mit gewissen Voraussetzungen und Anschauungen innerhalb des absoluten Ichs giltig ist, etwa zu nennen Ideenkreis der zeitlich-empirischen Naturwissenschaft. Dann stehen wir wieder vor der Frage, ob dieser Ideenkreis isoliert im Ich dasteht oder Gründe im Ich aufserhalb des Ideenkreises hat. Bei ersterer Annahme hat man einfach jede Frage nach dem Warum abgeschnitten. Bei der zweiten müssen wohl Gründe ganz bestimmter Art im Ich aufserhalb jenes Kreises vorhanden sein, weshalb man innerhalb des Kreises das Bestehen einer vororganischen Welt annimmt. Man sieht: die Schwierig-

keiten erheben sich in dieser metaphysischen Richtung ganz entsprechend wie in den anderen. Aber es sieht so aus, als wäre es durch Annahme eines Ichs anstatt des getrennten Dinges an sich leichter die Schwierigkeiten des Endlichen und Unendlichen im Raume und der Zeit zu überwinden. Besonders erscheint es zuerst so, als ob das Zusammentreten der verschiedenen Behaftungen (wobei z. B. eine Strecke bald als krumm, bald als gerade erscheint) natürlicher wäre, wenn wir jenes Ich in allen seinen Gebieten als persönlich oder ähnlich einer menschlichen Einzelseele fassen; die Einzelseele kann nach den Umständen verschiedene Behaftungen vornehmen. Wenn in der vororganischen Welt das Krumme da sein soll, ohne daſs organische Einzelwesen da sind, so könnte dies Krumme durch ein Zusammenkommen von Behaftungen da sein; und dies Zusammenkommen hätte etwas von der Beweglichkeit einer persönlichen Einzelseele an sich. Aber, genau betrachtet, nützt das nichts; denn es bleibt doch bei dem Unterschiede zwischen einer unorganischen Natur nnd dem mehr beweglichen Wesen einer vorstellenden Person. Die vororganische Welt hat diese Naturgesetzmäſsigkeit im Gegensatze zur beweglichen Gesetzmäſsigkeit der Seele. Das vororganische Ich muſs darum bestimmte, der von uns ihr zugeschriebenen Naturgesetzmäſsigkeit entsprechende Gründe besitzen, welche verursachen, daſs unsere persönlichen Ichs sich jetzt die damalige Existenz bestimmter Art vorstellen.

Es bleiben auch die Schwierigkeiten einer Wirkung durch die Zeit von damals her auf das, was jetzt ist, bestehen; mit diesen verknüpft ist die Frage, welche Ursachen denjenigen Verbindungen von Behaftungen entsprechen, die wir jetzt vornehmen, wenn wir uns die vororganische Welt räumlich-zeitlich, mit Verhältnissen von endlichen und unendlichen Gröſsen (dem Krummen, den Atomen und etwa auch dem Unendlichausgedehnten) vorstellen.

Nehmen wir nach Art des Realismus an, daſs eine reale unorganische Welt eine selbständige Existenz führt, die uns, die wir ebenfalls in gewisser Selbständigkeit existieren, veranlaſst zu unserer Vorstellung von der Natur, so muſs auch die vororganische Welt eine solche Existenz geführt haben und es müssen, da wir etwas hiervon wissen wollen, Ursachen vorhanden sein, welche unsere bestimmten Vorstellungen veranlassen. Diese Vorstellungen zeigen die verschiedenen Behaftungen mit ihren Zusammenstellungen. Mit ihrem Fortstreichen fiele aus jener Welt derartig viel heraus, daſs wir überhaupt nichts Zusammenhängendes mehr darüber sagen können — man vermeide nur wieder einmal von endlichen, unendlichkleinen, von geraden und krummen Gröſsen, von Zeitverhältnissen usw. zu sprechen und

versuche dann noch etwas Bestimmtes über die vororganische Welt auszusagen und auszudenken! Es wiederholen sich bei allen diesen metaphysischen Richtungen ähnliche Bilder von Schwierigkeiten in anderem Rahmen. Es kommt noch beim Realismus hinzu, dafs die reale Welt aus vielen Gründen getrennt von unserer Vorstellung nicht so sein kann, wie sie in unserer Vorstellung erscheint, dafs all unser Forschen niemals die Sache selbst wiedergiebt, so wie sie sein müfste, losgelöst von unserer Vorstellungsbeschränktheit und Vorstellungsweise. Was ist z. B. das Reale für die Eigenschaften und die Gesetzlichkeit des Wasserstoffes? Was entspricht real einem von uns gedachten und in unserer Art formulierten Brechungsgesetze und Anziehungsgesetze? Das Gesetz schwebt nicht in der Luft oder im Raume herum. Wollte man sagen, die Erscheinungen selbst, die Bewegungen, so liegt schon im Worte „Erscheinung", dafs dies auch etwas vom Geiste Vorgestelltes ist; die Bewegungen aber sind nur verständlich durch unsere mathematische Anschauung mit Punkten, Linien, dem Krummen. Man müfste also schon geradezu behaupten, dafs die reale Welt auch Punkte usw. besäfse. Durchschauen wir aber wirklich alle Umstände einer einzigen Naturerscheinung, müssen wir nicht vielmehr zugestehen, dafs alle unsere Ansichten nicht etwas so Vollendetes geben, wie wir uns unter einer von uns unabhängigen realen Welt denken möchten? Wann werden wir alle Gründe für die Naturerscheinungen (natürlich bei dieser Frage die realistische Richtung vorausgesetzt) durchschaut haben? Ignorabimus. Malen wir uns unsere Frage noch aus für den metaphysischen Relativismus!

Es soll nach dieser Lehre falsch sein zuerst die Existenz von zwei Dingen vorauszusetzen und dann anzunehmen, dafs dieselben in Beziehungen treten, vielmehr sollen Dinge, die noch nicht in Beziehung sind, überhaupt nicht sein. Es soll das eigentlich Seiende in der Beziehung selbst liegen, allerdings so, dafs man logisch die Begriffe von Dingen bilden kann, die in Beziehung stehen, ohne doch zu behaupten, dafs diese logische Bildung Anrecht auf eine andere Existenz hätte, als bloíse logische Absonderungen überhaupt. Die Welt, welche wir kennen, soll demnach überhaupt nicht hingestellt werden als eine Welt, die nun erst auf uns wirkte, nachdem sie da ist. Sobald etwas (eine sogenannte Erscheinung der Raumwelt) soweit da ist, wie wir sie kennen, so hat sie eine Existenz und darf auch eine Art Dasein beanspruchen, wie wir es einer Welt zuschreiben. Aber freilich dann hat man auch innerhalb dieser von uns sogenannten Natur zwischen verschiedenen Stufen des Seins wohl zu unterscheiden.

Ein Körper, den wir krumm nennen, hat sein Dasein als etwas

Krummes insofern, als er auftaucht; er führt ein sinnliches Dasein, insofern er sinnlich vorgestellt wird. Aber die bloſse Vorstellung d. h. dieser Begriff, sobald wir von ihm reden als von etwas einem real Gedachten Gegenüberstehendem, hat dadurch, daſs wir ihn denken, schon eine andere Existenz als jene sinnliche Erscheinung der naiven Anschauung. Ich muſs mich hierbei auf die früheren Ausführungen berufen. Einem gewesenen Körper oder dem gewesenen Zustande eines Körpers kommt nicht mehr diejenige Daseinsstufe zu, die das Gegenwärtige hat, er hat also nicht mehr dieses zeitlich-gegenwärtige Dasein. Eine Erde mit gewissen Zuständen, die in der vororganischen Welt existiert, gehört nicht in die Lehre von der objektiven Welt in dem Sinne, daſs diese objektive Welt alles umfaſst, was ist und von allen als jetzt seiend anerkannt werden muſs. Wenn wir aber solchen Erdkörper zur objektiven Welt rechnen und sagen, die Naturforschung behandele die objektive Welt, also auch die Weltkörper zu jener Zeit mit, so hat damit diese objektive Welt ein allgemeineres Sein, sie enthält das jetzt Seiende und das Gewesene.

Wie wir sahen, gehört ein Stein, dessen Wirkung niemand merkt, sich vorstellt und mitdenkt (der sich auch nicht innerhalb der ganzen, von den Weltkörpern ausgeübten Schwere irgendwie endlich geltend macht) nicht zu solcher objektiven Welt; nimmt man die Existenz derartiger Steine an, so ist dies eine Existenz, die über die gewöhnliche „objektive" hinausgeht. Die objektive Welt, welche die ferne Vergangenheit mitumfaſst, enthält damit etwas, welches ebenfalls wie jener Stein von niemandem augenblicklich gemerkt wird; wir können nicht behaupten, etwa die Wirkungen der vororganischen Erde innerhalb der Summe der gegenwärtig vorhandenen Kraft oder des gegenwärtig vorhandenen Stoffes als Bestandteil zu spüren. Die Bestandteile gehören alle der Gegenwart an. Nun lehrt zwar das Gesetz der Erhaltung der Energie, daſs die Summe der vorhandenen aktuellen und potentiellen Energie nicht ab- oder zunimmt (NB soweit die genauen, allerdings immer innerhalb gewisser kleiner Gebiete angestellten Beobachtungen reichen). In einem solchen Satze steckt auch bereits die Zeit. Ist nämlich Arbeit dasselbe wie „Kraft, multipliziert mit dem Wege" z. B. Gewicht $m \cdot g$, multipliziert mit der Höhe h, die dieses Gewicht durchfallen kann, so ist dies zwar etwas zeitlos oder im Augenblicke Vorgestelltes; man denkt dabei an Feststellung des Gewichtes mittels Zeit erfordernder Versuche oder Beobachtungen, schlieſst aber, dies Gewicht sei im Augenblicke der Gegenwart da und die Fallhöhe h werde im Augenblicke der Gegenwart vorgestellt. Soll die Spannkraft eine Zeit lang in dieser Form

erhalten werden, so kann das nur durch entgegenwirkende Bewegungen (z. B. Wärmeabstofsungen) geschehen. Setzt sie sich um, so ist auch dazu zeitliche Bewegung nötig; ist die Form für diese Umsetzungsgröfse bei einer erreichten Endgeschwindigkeit v von der Gröfse $m/2 \cdot v^2$, so steckt darin die Vorstellung der Geschwindigkeit, die ohne Zeit nicht möglich ist. Also stecken in der Vorstellung der gegenwärtigen Welt mit ihrer Kraftsumme aus potentiellen und aktiven Energieformen bereits Zeitvorstellungen, erst recht aber in dem Gedanken, dafs diese Summe konstant ist, also bei Umsetzung und Wechsel der Form (Umwandlung einer potentiellen in aktive und umgekehrt) dieselbe bleibt. Gleichwohl glaubt man imstande zu sein vom Zustande der Welt im Augenblicke der Gegenwart zu sprechen.

An anderer Stelle habe ich zu zeigen versucht, dafs eine Auffassung zum mindesten möglich ist, nach der auch bei irgendwelchen zeitlichen Vorstellungen die Zeitverhältnisse das eigentlich Wirkliche sind, man freilich dabei nicht leugnen kann, dafs die gerade existierenden Zeitverhältnisse den Punkt der Gegenwart enthalten müssen. Es mag sich logisch wohl die Absonderung der Vorstellung einer Kraftsumme von dem Zeitverlauf herstellen lassen, wenn freilich auch der richtige Begriff der Energie leiden würde, sobald man die Erinnerung an die Zeitverhältnisse bei Geschwindigkeit etc. ganz fortwerfen wollte. Aber auch das logisch Abgesonderte ist niemals ein ganz Alleinstehendes, es enthält immer noch Beziehungen zu früheren und anderen Gedanken und Vorstellungen. Es wird bei den logischen Absonderungen etwas Bestimmtes in den Vordergrund der Beachtung gerückt, das ist bei obiger Absonderung der Augenblick der Gegenwart, während die zeitlichen Verhältnisse dabei mehr in den Hintergrund rücken. Man kann es bereits als verschiedene Stufen des Seins bezeichnen, wenn einmal der Augenblick, das andere Mal das Zeitverhältnis im Vordergrund des seienden Gedankens steht.

Wir sind danach genötigt auch bei der Vorstellung einer gegenwärtigen objektiven Welt sorgfältigst zwischen solchen Auffassungen zu unterscheiden. Mit der vororganischen Welt liegt es wieder anders. Die Zeitverhältnisse, welche hierbei in Betracht kommen, werden in das Gesetz von der Erhaltung der Energie zwar schlufsweise (ob mit völligem Rechte, ist nicht nachweisbar) mit hineingefafst; man spricht dabei vom Erhalten der für jeden Augenblick vorstellbaren Energiesumme durch lange Zeit hindurch und denkt, dafs die damalige Erde zwar nicht dieselbe Energiesumme wie heute enthalte (Abkühlung usw.), aber doch mit der Energie von heute verglichen werden könne.

So gut man in den die Gegenwart einschliefsenden Zeiten Be-

haftungen mit Unendlichkleinem kennt (unendlichkleine Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Integrale oder Summen von unendlichvielen unendlichkleinen), so gut wenden wir diese Vorstellung auch auf die vororganische Welt an. Nun fragten wir aber: was bedeutet die Existenz der vororganischen Erde oder Welt? Wir sagen doch: sie existierte, während noch kein Mensch, keine Pflanze usw. da war! Können wir behaupten, jene Erde mit endlichen Verhältnissen, mit unendlichkleinen und endlichen Bewegungen, mit Punkten, mit krummen Linien, mit Atomen und Molekeln war da? Was waren dann diese krummen Linien, diese Punkte, wenn keiner da war, der sie sich vorstellte? Man könnte auch mit gleichgutem oder -geringem Rechte fragen: was sind sie heute, wenn niemand sie sich vorstellt? Indessen möchte mancher darauf antworten, sie existierten als Punkte dann nicht; und es würde sich wieder die Schwierigkeit entwickeln, ob die Welt beim Fehlen jeder menschlichen Vorstellung in der vororganischen Zeit überhaupt habe als Welt (in der Form, die wir Welt nennen) bestehen können.

Man muſs hierbei vom Standpunkte des metaphysischen Relativismus sich hüten Verschiedenes durcheinander zu mengen. Man hat genau zu überlegen, was es bedeutet, wenn wir sagen: niemand stelle sich vor. Sobald wir das Wort „niemand" gebrauchen, befinden wir uns sofort in dem Gebiete der Vorstellung von persönlichen, räumlich-zeitlich-menschlichen, an Körper gebundenen Seelen! Dieser Niemand bedeutet das Fehlen von solchen organischen Geschöpfen, wie wir Menschen der Erde es sind! Ist dies aber vollkommen dasselbe als wenn wir überhaupt von irgend etwas allgemein Geistigem reden? Gehört z. B. das Gebiet des Moralischen, des Schönen, des Religiösen unbedingt und ausschlieſslich in dieselbe Vorstellungsweite hinein, die wir betreten haben, wenn wir von „organischen Geschöpfen" sprechen?

Wenn Menschen die Vorstellung vom Weltsein haben, so bedeutet das nach jenem Standpunkte nicht etwa zunächst, daſs da etwas für sich existiere, was man den menschlichen Geist nenne (ein höchst zweifelhafter und kaum angebbarer Existenzbegriff) und dann noch etwas, mas man die augenblickliche Körperwelt nenne; und daſs dann schlieſslich diese Körperwelt auf diesen Geist einwirke und die Vorstellung der Welt mit Punkten usw. in ihm erzeuge. Im Gegenteil: es soll ein eigentliches Sein gerade die Beziehung haben, in der das Weltsein besteht und bei der wir nur nachträglich logisch den vorstellenden Geist von der vorgestellten Welt unterscheiden, ohne diesen beiden gesonderte Existenzen zuzuschreiben, ohne ihnen ein anderes Sein zuzuweisen als das der logischen Sonderung! Auſserdem ist die

Seinsbeziehung, welche in der Vorstellung des Moralischen oder des Religiösen liegt, eine ganz andere als die Seinsbeziehung der sogenannten Natur. Mögen auch viele Verbindungen, viele neue Seinsbeziehungen zwischen beiden Gebieten existieren! Es giebt ungemein viele verschiedene Seinsbeziehungen. Falsch aber ist es, einfach von einem Sein an sich, von einem Sein der jetzigen oder vororganischen Welt zu sprechen, als ob damit alles, was es an Sein geben kann, auch abgemacht wäre. Wenn wir sagen: es gab einmal eine vororganische Welt, in welcher keine Menschen waren, so sprechen wir hierbei nur in dem Sinne von dem Sein einer Welt, ähnlich wie es die Naturwissenschaft thut, wenn sie von Massen tief im Erdinnern spricht (die niemand sah). Wir sprechen aber keineswegs damit sofort aus, dafs mit dieser Vorstellung eines Menschen auch schon alles Sein gemeint sei, was irgendwie geistig gefafst werden kann. Es ist nur eine sprunghafte, nicht ausreichend begründete Art des Denkens, in die Vorstellung vom Sein eines organischen Menschen sofort alles hineinzustecken, was überhaupt gedacht werden kann. Der organische Mensch ist der Mensch, soweit wir seine körperlich-organischen Eigenschaften naturwissenschaftlich studieren und genau kennen, soweit wir alles dabei Vorkommende genau ohne Widersprüche und Schwierigkeiten erklären können. Dasjenige, was unerklärbar bleibt, darf nur mit der gröfsten Vorsicht in diesen Begriff des organischen Menschen hineingefafst werden. Wer gewohnt ist z. B. nur das Körperliche zu untersuchen und wer dabei hübsche körperliche Resultate gefunden hat, der ist nur zu leicht geneigt dann mit einem kühnen Sprunge auch alles, was er noch nicht versteht und andere auch noch nicht erklären können, in die engen Grenzen seiner Forschung hineinzuzwängen — weil er glaubt, dafs es nichts anderes giebt, als das, was zu seiner Forschung gehört. Ja, wenn es so leicht wäre mit den Rätseln der Welt, der Philosophie fertig zu werden! Ist es nicht eine grofse Voreiligkeit z. B. aus dem Gebiete der Geometrie heraus sofort Schlüsse auf das Gebiet der Arithmetik zu machen? Solche Schlüsse sind nur bei ganz genauer Prüfung des Wesens beider Wissenschaften und des Charakters der betreffenden Frage erlaubt. Wenn man aus einer Gleichung, die im Anschlusse an geometrische Probleme aufgestellt wurde, negative oder imaginäre Werte herausbekommt, so fragt man mit Recht erst einmal, ob sie auch geometrisch einen Sinn haben können. Es mag wohl sein, dafs wir die Gleichung im Anschlufs an Betrachtungen von Naturkörpern aufgestellt haben. Trotzdem müssen wir bei der

Rechnung genau aufpassen, ob nicht etwa in derselben Handlungen vorgenommen werden, die nachher für die Naturkörper keinen Sinn haben. Durch Quadrieren z. B. kann eine Mehrdeutigkeit entstehen, die vorher nicht da war, aber sich hinterher beim Wurzelausziehen zeigt, indem auch ein negativer Wert entsteht, welcher in der Natur keinen Sinn haben würde. Der Mathematiker überlegt dann genau und schaltet diesen unnatürlichen Wert aus. Ähnlich darf man auch nicht ohne weiteres irgend welche Betrachtungen in einem Gebiete z. B. dem der Naturwissenschaft auf ein anderes Gebiet übertragen z. B. das allgemeinere der religiösen oder moralischen Gefühle. Es ist nur ein kühner Schluſs, dieses Gebiet in die naturwissenschaftlichen Beobachtungen mit hineinzustecken und zwar deshalb, weil thatsächlich für alle naturwissenschaftlich bemessenen Erfahrungen die seelischen Thätigkeiten einen Zusammenhang mit den körperlichen haben. Ist dieser Zusammenhang etwa auch noch so genau ausgemessen wie die rein körperlichen Vorgänge? Ist etwa der Gedanke, daſs es in der Seele eine Zeitvorstellung giebt, ganz dasselbe wie ein zeitlich bemessener seelischer Vorgang? Dann wäre die Vorstellung von Etwas identisch mit diesem Etwas. Dann gäbe es gar keine Seinsunterschiede mehr innerhalb dessen, was im Geiste oder überhaupt für uns vorkommt. Allerdings machen solche kühn kombinierenden Forscher keine derartigen Seinsunterschiede. Aber wir sahen, daſs ohne dieselben der Rätsel unzählige sind, und stellten uns auf den metaphysischen Standpunkt der Seinsbeziehungen. Mag derselbe nun richtig sein oder nicht, mag er der einzig mögliche oder nur ein möglicher neben anderen sein — wenn er überhaupt möglich ist, so gehört nach ihm die Ansicht von der vororganischen Welt in gewisse Gebiete mit gewisser Seinsbeziehung und muſs streng unterschieden werden von anderen Seinsbeziehungen. Der Satz: „eine vororganische Welt hat existiert“ heiſst nicht, daſs damit eine Seinsbeziehung ausgeschlossen sei, wie wir sie sonst kennen etwa für das Moralische. Die Nichtexistenz des Menschen zu jener Zeit bedeutet nur die zeitliche, innerhalb der naturwissenschaftlichen Seinsstufe befindliche Nichtexistenz, darf aber nicht ohne weiteres mit Nichtexistenz irgend eines anderen Seins verwechselt werden, daſs gar nicht in dieser Art betrachtet wird, gar nicht in dieser Art existiert, sondern höchstens indirekt, durch Vergleich der körperlichen und Seelenkräfte in einer gewissen Beziehung zur naturwissenschaftlichen Auffassung steht. Die Sätze: „damals existierte kein Mensch“ und „es existiert keine Moral oder Religion“ sind Sätze, die überhaupt gar nicht ohne weiteres verglichen werden können, weil die gleichklingenden Wörter „Existieren“

und auch die dabei vorkommenden Zeitbegriffe in beiden ganz andere Bedeutung haben.

Die Lehre von den Behaftungen als Beispiel für die Lösung metaphysischer Widersprüche.

Der Grundsatz zur Lösung von Widersprüchen ist der sogenannte Satz des Widerspruchs. So bekannt derselbe auch ist und so selbstverständlich er erscheint, so oft ist er deshalb nicht beachtet worden, weil man nicht sah, dafs ein Fehler gegen ihn vorlag. Wenn dieselbe Eigenschaft demselben Subjekte nicht in derselben Art zukommen und nicht zukommen kann, so mufs natürlich in den beiden Sätzen, die sich da gegenüberstehen, auch alles Entsprechende wirklich genau dasselbe sein und im selben Sinne gebraucht sein. Es ist nun nicht blofs eine Schuld der Sprache, wenn Fehler in dieser Richtung entstehen. Diese hat oft für dieselbe Sache in verschiedenem Sinne dasselbe Wort. Aber es gelingt leicht durch sprachliche Übung den Unterschied zu beachten. Eine gröfsere Schuld hat die mangelhaft angewendete Fähigkeit der Unterscheidung oder gar der Umstand, dafs häufig die Entwicklung des philosophischen Denkens trotz der Jahrtausende philosophischer Forschung nicht weit genug fortgeschritten ist, um Unterschiede einsehen und finden zu können, die noch zu machen sind.

Im Verlaufe der Untersuchungen dieses Buches hat sich gezeigt, dafs man nicht damit auskommen kann, einfach dem Endlichen und Unendlichen im Raume unterschiedslos eine Stelle im Raume anzuweisen, und bei Sätzen über den Raum auf den Unterschied zwischen dem Endlichen und Unendlichen gar nicht zu achten. Noch weniger war es richtig etwa den Raum schlechthin als etwas Endliches zu betrachten und gar das Unendlichkleine nicht mehr als etwas Räumliches anzusehen, sondern durch den Begriff der Grenze und den Augenblick des Verschwindens aus dem Raume herauszustreichen. Vielmehr entstanden bei solcher einfachen Auffassung des Raumes zahlreiche bedeutende Schwierigkeiten, an denen der Versuch der denkenden Geister einig zu werden, scheiterte. Wenn so sogar innerhalb der Mathematik von wirklicher Klarheit nicht gesprochen werden konnte oder vielmehr durfte, um wieviel mehr mufste Unklarheit dadurch entstehen, sobald man sich auf das Gebiet der Metaphysik begab. Da fiel es z. B. auf, dafs der Satz: „die Welt sei endlich", zwar viel für sich hatte, aber der entgegengesetzte, „sie sei unendlich" auch nicht wegzuleugnen war. So begegnen wir dem dritten Satze,

die Welt sei weder endlich noch unendlich. Und es sollte uns nicht wundern, wenn man gar in einem einzigen Sätzchen aussprechen wollte, die Welt sei trotz alledem sowohl endlich als unendlich.

Solche Schwierigkeiten trieben dazu, dem Begriffe der Welt zu Leibe zu rücken. Man stritt ab, dafs eine Welt, die endlich sei oder die unendlich sei, überhaupt eine widerspruchslos, an sich existierende Welt sein könne, und kam zur Welt an sich oder besser dem Dinge an sich (um ihm die Welt mit empirischer Realität gegenüber zu stellen). Doch ist der Kampf um diese Auffassung nicht zu Ende gekommen, und es ist sogar die Frage aufgetaucht, ob überhaupt im empirischen Raume die Schwierigkeit dadurch verschwunden sei. Wenn auch im Geiste Widersprüche thatsächlich vorkommen, ohne den Geist zu zerstören, so ist es doch sehr zweifelhaft, ob in der Anschauung oder unserer Ansicht von der vorhandenen Anschauungsfähigkeit der Seele solche Widersprüche ruhig bestehen bleiben dürfen. Wenn es nun gelingt den Begriff der Welt, auch ohne davon die „Welt an sich" zu trennen, derartig vorsichtig aufzufassen, dafs der Widerspruch in den beiden Sätzen verschwindet, dann mufs offenbar in dem Satze: „die Welt ist endlich" der Begriff der Welt ein anderer sein als im (negierten) Gegenteile. Hat man dann noch nötig beide für falsch zu erklären?

Gerade mit der scheinbar sonderbarsten Auffassung, die Welt sei sowohl endlich als unendlich, scheinen wir uns dann am besten vertragen zu können. Nach der Lehre von den verschiedenen Behaftungen ist die mit endlichen Verhältnissen behaftete „Welt" genau zu unterscheiden von der mit dem Unendlichen behafteten. Das Sein beider ist nicht genau dasselbe, steht aber in bestimmten — durch die Grundsätze des Unendlichen oder vielmehr der sämtlichen Weitenbehaftungen formulierten Beziehungen. Die Welt in dem Satze: „die Welt ist endlich" hat nicht genau dasselbe Sein wie im verneinten, ist also auch nicht genau derselbe Begriff. Die Form jenes Satzes mit „sowohl als auch" ist also falsch und verführt uns gerade zum Irrtume; richtiger hiefse es: „die Welt ist sowohl sinnlichvorstellbar, als auch übersinnlichvorstellbar"; denn nun erscheint es wenigstens nicht mehr so, als wäre das Endliche und das Unendliche ein kontradiktorischer Gegensatz. Doch ist auch hierbei noch zu bemängeln, dafs der Satz beide Subjekte in ein Wort zusammenschiebt. Die Sprache ist bequem und scheut sich vor häfslich klingender Genauigkeit. Die Philosophie darf darauf keine Rücksicht nehmen und mufs die aus jenen Eigenschaften der Sprache entstehenden Fehler berichtigen, mag es auch unschön klingen. Sie

sagt besser: die durch die Beilegung dieser Eigenschaft (die endliche Weitenbehaftung) in ihrem Sein näher bestimmte oder angedeutete Welt ist sinnlichvorstellbar oder endlich; die durch die Behaftung mit dem Unendlichen in anderem Sein anerkannte Welt ist unendlich. Selbstverständlich wäre alles in den Formen: „die endliche Welt ist endlich" und die „unendliche Welt ist unendlich"; aber etwas so Selbstverständliches haben wir nicht ausdrücken wollen, sondern es kam uns darauf an durch jene Sätze überhaupt darauf hinzuweisen, dafs die Unterscheidung zwischen beiden derartig näher bestimmten Welten gemacht werden mufs. Dabei ist die Frage noch ganz offen gelassen, was für Eigenschaften diese beiden so unterschiedenen Welten gemeinsam haben, warum sie beide den Namen Welt tragen dürfen.

Es giebt das Sein einer endlichen Welt!

Es giebt das Sein einer unendlichen Welt!

Das Sein einer endlichen Welt ist nicht ganz dasselbe wie das das Sein einer unendlichen Welt!

Ein Widerspruch liegt nun nicht mehr vor, da verschiedene Seinsstufen hiernach kein Widerspruch sind und sogar in gewissen Seinsbeziehungen stehen können. Mag man nun auch diese Seinsarten keine eigentlich selbständigen nennen und noch eigentliches Sein einer Welt an sich annehmen, auf welche die Behaftung mit dem Endlichen und Unendlichen nicht passen soll, oder mag man von dieser Welt an sich ganz wieder abkommen, das kommt auf die verschiedenen metaphysischen Richtungen an. Jedenfalls gelingt es durch solche Unterscheidungen der immer und bei allen metaphysischen Auffassungen, wie wir sahen, wiederkehrenden Widersprüche zwischen dem Endlichen und Unendlichen z. B. in der Mathematik Herr zu werden.

Selbst wenn man sich weigert dem Unterschiede des Endlichen und Unendlichen den Namen verschiedener Seinsstufen zuzusprechen, ist die Lösung vorhanden. Man vermeide den Namen der Seinsstufen, wie es ja auch im ersten mathematischen Teile des Buches geschehen ist, und man kann doch noch Formen für die folgenden Beziehungen zwischen den Behaftungen finden, die ich allerdings am liebsten derart mit Wörtern des Seins ausdrücken möchte:

Die Seinsbeziehungen der endlichen und unendlichen Welt besitzen beide Verhältnisse mit bestimmten Werten; in beiden ist es möglich an das Seelische zu denken, wie im Gebiete des Seelischen an seelische Behaftungen. Auch das Sein der Seele kann mit dem Sein des Körpers in Beziehung gesetzt werden durch Behaftungen des Endlichen und auch des Unendlichkleinen. Freilich darf in dieser

Beziehung die Seele nur in gewisser Seinsart und in gewissen Seinsstufen vorkommen — eine Erweiterung, auf die wir gleich kommen werden als auf das eigentliche Ziel dieses Abschnittes.

Ähnliche Unvorsichtigkeit wie beim Vermischen der Weitenbehaftungen zeigt sich in den Sätzen: „Die Seele wohnt im Körper" und „der Körper und überhaupt die ganze Welt wohnt als Vorstellung in der Seele". Wenn die Naturwissenschaft feststellt, dafs bei allen seelischen Thätigkeiten körperliche Vorgänge vorhanden sind, wenn sie erkennt, dafs sinnliche und andere körperliche Einwirkungen stattfinden und seelische Vorgänge sich daran knüpfen, so hat sie ein Recht in gewissem Sinne Seele und Körper miteinander zu vergleichen und diese Begriffe nebeneinander zu reihen — aber nur in gewissem Sinne. Keineswegs ist sie imstande irgend einen körperlichen Vorgang als einen seelischen zu bezeichnen, der körperliche bleibt ein körperlicher und der seelische ein seelischer, wenn auch Gesetze zu tage treten, nach denen beide Vorgänge in gewisser Art verknüpft sind. Niemals sind diese Gesetze so, dafs darin nur etwa von Bewegungen die Rede wäre, für beide Arten der Erscheinungen, oder nur etwa von Gefühlen oder Gedanken für beide Arten. Spricht man von seelischen Bewegungen, so ist dies nur in übertragenem Sinne gemeint und nicht räumlich, und spricht man von logischer Folgerichtigkeit einer Naturbewegung und der zweiten, so ist innerhalb der Bewegungswelt, innerhalb des Räumlichen das Logische selbst nicht als solches vorhanden; vielmehr sprechen solche Gesetze über beide Gebiete sowohl von körperlichen Bewegungen als auch von seelischen Vorgängen, die in Parallele gestellt werden (z. B. für einen gewissen Gedanken ist eine gewisse Summe von Gehirnsbewegungen nötig — ein Satz, den übrigens die Wissenschaft noch nicht imstande ist in Mafsen anzugeben).

Es wird nun kaum jemand einfallen zu behaupten, dafs die Seele aufser im Körper zugleich irgend wo anders im Raume wohne z. B. auf dem Monde, aber dazu lassen sich viele nur zu leicht bringen, dafs sie behaupten, einem seelischen Unterschiede wie Gut oder Böse oder Schön und Unschön müsse auch ein Unterschied im Körperlichen entsprechen. Wenn wir vom Monde sprechen, so wissen wir ganz genau durch wohlbeachtete Thatsachen, dafs die Seele auf demselben nicht in dem Sinne sein kann, wie sie in unserem Gehirne hier auf der Erde wohnt; und dabei ist doch das Räumliche des Gehirnes und das Räumliche des Mondes etwas recht Wesensähnliches, gerade weil beides räumlich ist. Wenn wir aber davon sprechen, dafs die Empfindungen gewissermafsen recht nahe an das Körperliche grenzen

d. h. damit in vergleichenden Maſsstäben (psychophysisch) verknüpfbar sind, so dürfen wir doch nicht sofort sagen, es sei auch etwa der Gegensatz von Wert oder Unwert, von Gut und Böse, von Niedrig und Erhaben ganz ebenso mit dem Körperlichen verknüpfbar. Warum ist dann nicht auch der Raum des Mondes mit der Seele ebenso verknüpft wie der Raum des Gehirnes? Der Unterschied zwischen jenen Begriffen und den Empfindungen ist wahrlich mindestens ebenso groſs wie der Unterschied zwischen dem Räumlichen auf der Erde und auf dem Monde, nein, weit gröſser. Diese Begriffe gehören nicht demselben Gebiete an, wie Mond und Gehirn dem Raume und zwar sogar — nach der gewöhnlichen Vorstellung — dem endlichen, sondern Gebieten, die man unmöglich dieselbe Behaftung nennen könnte. Das Gebiet des Schönen und das Sein in diesem Gebiete ist — wenn auch in irgend einer Weise verwandt mit dem Guten usw. — doch dem Wesen und Sein nach verschieden davon, und erst recht von den bloſsen Empfindungen. Man kann nicht behaupten, daſs eine Empfindung an sich schön sei, ein genaueres Denken muſs in dem „Schönen" etwas von der Empfindung an sich Unterscheidbares und Hinzukommendes erkennen. Wie flüchtig denkt man also, wenn man einfach erklärt, das Schöne und Gute wohne im Gehirne! Allerdings erscheint das den meisten Menschen keineswegs so unsinnig wie der Satz: „Meine Seele wohnt im Monde". Und doch liegt eine viel schlimmere Vermengung darin.

Man komme nur nicht damit, es höre doch z. B. mit der Zerstörung des Gehirnes auch das Gute und Schöne der Seele auf. Darin liegt schon wieder eine Unvorsichtigkeit. Freilich, kein Mensch wird behaupten, daſs in einem zerstörten Gehirne noch die Seele wohne, aber wir fanden ja an der Behauptung, die Seele wohne darin, auszusetzen. Wieso wohnt das Gute und Schöne im Gehirne? Mit der Thatsache des Aufhörens eines menschlichzeitlichen, uns anderen wahrnehmbaren Lebens durch Zerstörung des Gehirnes ist dies nicht bewiesen. Hierdurch ist nur bewiesen, daſs alle sinnliche Äuſserung und vitale (zum Körperlich-Seelischen gehörige) Gehirnsthätigkeit dahin ist. Besteht darin die ganze Seele?

Freilich bestehen Beziehungen zwischen den Gebieten des Guten und der Empfindungen — aber auch zwischen dem Monde und dem Gehirne bestehen Beziehungen.

Der Satz: „die Seele wohnt im Körper" bedeutet genau nicht: „die Seele in ihrer allgemeinsten Bedeutung, alles, was wir seelisch in jeder Art des Seins nennen, ist durch solche Gesetze an das Körperliche geknüpft, wie wir sie z. B. von den Empfindungen kennen".

Sondern er bedeutet: „es ist eine Thatsache, dafs seelische Erscheinungen, wie die Empfindungen in gewissem Beziehungskreise gesetzlich geknüpft sind an nachweisbare körperliche Bewegungen (wobei die Art der Verknüpfung dunkel bleibt und nur parallele Messungen möglich sind). Es ist freilich aufserdem eine Thatsache, dafs die Empfindungen in Beziehungen zu vielem stehen, was wir auch seelisch nennen; es ist aber keineswegs richtig, dafs alles, was wir seelisch nennen, in jene dem seelisch-körperlichen Sein zugehörige Abhängigkeit vom Gehirne gebracht werden kann. Im Gegenteile es ist nicht widerlegbar, wenn jemand behauptet, es sei alles, was wir vom Körper und der Welt wissen, doch zunächst nur unser Wissen und als solches seelisch, sodafs also danach das Seelische alles Körperliche als einen Teil seines Inhaltes enthielte. Wenn wir die metaphysische Wahrheit erkennen wollen, dürfen wir nicht mehr wie der Erforscher der Raumwelt kurzweg sagen: „die Seele wohne im Gehirne", sondern müssen sagen: „dasjenige seelische Sein, welches nachweisbar unzweifelhaft auf körperliche Bewegungen folge und nachweisbar nicht ohne sie existieren könne, in der Art, wie es so existiert, wohne im Körper, d. h. sei in dieser Art an das Körperliche geknüpft". Das klingt allerdings wie eine Tautologie, ist auch eine, bedeutet aber die Thatsache, dafs eine Verknüpfung des Körperlichen und einer Art von Seelischem beobachtet und vorgestellt sei.

Die umgekehrte Behauptung, der Körper, wie wir ihn kennen und beobachten, sei nur eine Beobachtung und wohne als solche in der Seele, ist ebenfalls unvorsichtig. Er bedeutet ebenfalls nur, dafs es Vorstellungen vom Körper giebt und dafs wir diese Vorstellungen thatsächlich im Zusammenhange sehen mit dem, was wir sonst noch Seele nennen. Das Sein einer solchen Vorstellung ist trotz dieses Zusammenhanges nicht dasselbe wie sonst irgend ein Sein seelischer Art. Mit anderen Worten, man darf nicht einfach alles Seelische unterschiedslos als seelisch existierend ansehen. Wir müssen zwischen den verschiedenen Arten seelischen Seins noch viel genauer unterscheiden wie zwischen dem Sein des Gehirnes und des Mondes.

Früher habe ich bereits auf falsche Fragen aufmerksam gemacht wie: „In welchem Augenblicke beginnt die Seele des Kindes zu sein?", auf falsche Schlüsse wie die von der beobachteten Umsetzung endlicher Arbeit auf die Ewigkeit des Stoffes. Ähnlich wäre der Schlufs von der Erhaltung der Energie auf die Unfreiheit des Willens, nämlich eines Willens, der nicht als objektivsinnlich existierend angenommen wird. Sogar die Definition: „Die Welt ist alles, was es giebt" kann

bei genauer Kritik nicht als richtig anerkannt werden. Denn wie kann man etwas mit einem Worte „giebt" definieren, wenn man Grund hat anzunehmen, dafs es ein Sein schlechthin gar nicht giebt?

Seinsvermittlung zwischen Seelischem und Körperlichem.

Es gelingt im grofsen und ganzen die seelischen Vorgänge einer körperlich-seelischen Persönlichkeit in eine Art Parellele zu stellen mit den körperlichen; allerdings sind die verschiedenen Arten der beiderseitigen, irgend wie genauer vergleichbaren Erscheinungen nicht sehr zahlreich. Der Körper bildet sich, und dann erst werden seelische Vorgänge der neuen Person für die anderen bemerkbar und zwar auf dem Wege der räumlich-zeitlichen Erscheinungen so, dafs ein Schluss auf die Seele berechtigt erscheint. Der organische Körper zerfällt, und der Schlufs auf das zeitliche Vorhandensein dieser Seele ist nicht mehr in jener Art möglich. Der Körper leidet, und diejenigen Äufserungen, die, wie man sagt, die Seele offenbaren, sind nicht mehr in derselben Art vorhanden wie vorher. Der Körper entwickelt sich und wird gestärkt, und das Seelische scheint dann oft vollkommener werden zu können. Physiologische Untersuchungen zeigen Kraftumsetzungen beim Vorhandensein sogenannter seelischer Arbeit. Freilich sind diese Parallelen bisher noch recht, recht wenig in ihren Einzelheiten durchgeführt, und vielfach erscheint es vollkommen unmöglich die körperlichen Unterschiede und die Verschiedenheit der Arbeitsumsetzung sich auch nur vorzustellen, wenn zweifellos seelische Unterschiede vorhanden sind, z. B. der Unterschied zwischen dem Fortschritte von Klug zu Klüger einerseits und von schlechter Gesinnung zu besserer andererseits. Auch umgekehrt sind oft die Unterschiede der Reize physikalisch noch ganz deutlich, während die Empfindungen keine Unterschiede mehr zeigen (Gefühl der Gewichtsvermehrung bei psychophysischen Versuchen usw.). Immerhin ist trotz dieser Lücken der Gedanke von parallelen Vorgängen in solchen Fällen nicht ganz unmöglich; und auch bei monistischer Vorstellung werden die seelischen und körperlichen Erscheinungen eines und desselben Wirklichen in solche nicht unmöglichen Parallelen eingeordnet. Mag man das Seelische und Körperliche dann auch nur Erscheinungen nennen, irgend ein Sein haben dieselben dennoch, und wäre es auch nur das Sein des Scheines, und zwar verschiedenes Sein. Diese Verschiedenheit ist rätselhaft und

bleibt darum eine Ursache verschiedener philosophischer Richtungen. Aber viel mehr setzen auch den Nichtphilosophen andere Rätsel in Erstaunen: es sind die alten noch immer nicht erklärten Wunder der einem Willen zugeschriebenen, sonderbaren, von dem sonstigen Bilde der Thätigkeiten in der Natur abweichenden Entscheidungen, welche der Mensch und vielleicht auch die Tiere in ihren Handlungen zeigen, ferner der Erzeugung von organischen Wesen, der Vererbung, der Mannigfaltigkeit in den Formen der lebenden Welt.

Es haben immer wie heute diese Thatsachen den Eindruck gemacht, als ob etwas ganz Fremdes dabei hineingriffe in das räumlich-körperliche Leben, als ob der Wille versuchte gegen das Körperliche zu arbeiten oder auch nach seinem Belieben über das körperlich-gesetzmäfsige Sein zu verfügen; es schien, als ob mit dem Vorgange der Erzeugung etwas sonderbar Fremdartiges in das irdische Dasein hineinkäme und allem, was damit in Berührung steht, der Liebe, den besonderen Gefühlen des Familienlebens den Stempel eines Höheren oder wenigstens Fremden aufdrückte. Die Verschiedenheit der Arten organischen Seins hat zu übernatürlichen Schöpfungsgeschichten seit den ältesten Zeiten Veranlassung gegeben.

Was haben für uns die Versuche der Naturwissenschaft, auch diese Rätsel zu lösen, für eine Bedeutung? Bleiben sie im Rahmen der eigentlichen Naturwissenschaft, so verharren sie damit auch immer auf denjenigen Stufen des Seins, auf welche die Naturforschung sich überhaupt stellt. Es kann deshalb eine physiologische Erklärung der Willensvorgänge, eine anatomische und physikalisch-chemische Zergliederung bei empirischer Erforschung oder auch theoretischer Vorstellung der Vorgänge in Zeugungszellen wohl zu nützlichen Resultaten führen, aber diese Resultate haben immer nur Wert für die naturwissenschaftliche, räumlich-zeitliche Betrachtung und können niemals eine vollkommene Lösung der Probleme sein, ebensowenig wie auch die aufs Feinste ausgearbeitete Vorstellung der Atome und ihrer chemischen Angliederung jemals das Warum der thatsächlichen Mannigfaltigkeit in den Erscheinungen restlos wird erklären können. Wie soll man durch Arbeit im Gehirne jemals das erklären und genau unterscheiden können, was man im Seelenleben als Willen so deutlich von anderem wie dem Denken unterscheidet?

Das Gesetz von der Arbeitserhaltung ist, wenn auch nicht immer für alles unzweifelhaft erwiesen, so doch ausreichend begründet, um die Annahme zu erlauben, dafs in einem seelisch-körperlichen Wesen (d. h. bei der Betrachtung für diese Arten des Seins) einer seelisch-zeitlich ausgedehnten Thätigkeit eine endliche ausdrückbare räumlich-

zeitliche Energieumsetzung entspricht, keineswegs aber ist damit erwiesen, daſs es überhaupt nichts Seelisches im allgemeinsten Sinne, bei jeder Stufe des Seins gäbe, dem man keine endlich bemeſsbare Energieumsetzung an die Seite stellen könnte. Das Problem der Willensfreiheit ist noch immer viel umstritten.

In einer früheren Arbeit (Ist die Einwirkung eines freien Willens räumlich möglich ohne Widerspruch gegen die Arbeitserhaltung; Inaug.-Diss.) habe ich unabhängig von Boussinesq (der den Gedanken in ähnlicher Weise mechanisch behandelte) die Möglichkeit zu zeigen gesucht, daſs bei Annahme von labilen Gleichgewichtszuständen im Gehirne die Entscheidung für diese oder jene Thätigkeit durch einen mechanischen Prozeſs vorstellbar erscheint, der das Gesetz der Arbeitserhaltung nicht umstürzt, aber einer mechanischen Gesetzlichkeit im Sinne der bisherigen Naturwissenschaft nicht unterliegt. Die Herstellung des labilen Gleichgewichtes innerhalb eines Systems bedeutet in der Physik, daſs in diesem Systeme keine endlichen Bewegungen mehr vorhanden sind, die einen Ausschlag (ein Auslösen der Spannkräfte) nach dieser oder jener Seite bewirken müſsten. Soll die Auslösung in einer Weise stattfinden, wie sie die Physik nach ihren bisherigen Methoden und Gesetzen meſsbar angiebt, so muſs von irgend woher eine meſsbar groſse oder in gewissem endlichen Maſse vorstellbare, wenn auch beliebigkleine Bewegung in das System hineinkommen. Diese Bewegung muſs, da anderswoher genommen, bei Überschätzung aller anderen vorhandenen Energiesummen von diesen abgezogen werden. Trotz alledem kann man sich vorstellen, daſs ein labiles Gleichgewicht auch durch eine unendlichkleine Änderung gestört wird. Mag auch für gewöhnlich ein irgendwo in der anorganischen Natur (z. B. bei verschieden erhitzten Luftschichten) vorgestelltes labiles Gleichgewicht immer durch eine endliche Bewegung gestört werden, mag auch z. B., wenn überhaupt ein Wirbelsturm entsteht, dieser etwa durch das Auffliegen eines kleinen Vogels aus der heiſsen in weniger heiſse Luft veranlaſst werden, und mag man auch sagen, daſs ein mathematisch genaues labiles Gleichgewicht eigentlich nur in einem Momente vorkommen könnte, so ist die Vorstellung eines labilen Gleichgewichtes doch an die Vorstellung des Punktes geknüpft (Lage des Unterstützungspunktes, des Schwerpunktes usw.). Es steht also auch für streng naturwissenschaftliche Anschauung nichts im Wege sich die Möglichkeit eines mathematisch genauen labilen Gleichgewichtes bei irgend welchen besonderen Erscheinungen z. B. Gehirnvorgängen vorzustellen. Wenn man nun annimmt, eine unendlichkleine Bewegung störe dieses Gleichgewicht in irgend einer bestimmten Richtung, so

würde die Auslösung der vorhandenen Spannkräfte geschehen, ohne daſs jene Einwirkung irgend welchen Zuwachs für die endlich vorgestellte Energiesumme bedeutet. Es ist hierbei nicht nötig, daſs der Zustand des labilen Gleichgewichtes wirklich bis zu einer mit Punkten behafteten mathematischen Vorstellung hergestellt ist, wenn nur für die Behaftung mit endlichen Gröſsen Gleichgewicht stattfindet. Auch wenn das Gleichgewicht bis zum Unendlichkleinen hergestellt wäre, könnte doch eine unendlichkleine, Ausschlag gebende Bewegung aus irgend einem nicht rein naturwissenschaftlich nachweisbaren Gebiete herstammen, ohne das Gesetz der Energieerhaltung umzustoſsen. Ja selbst wenn man dieses Gesetz auf das Unendlichkleine irgend welchen Grades ausdehnen wollte, sodaſs nirgends ein solches Kleines auftreten könnte, ohne nach Naturgesetzmäſsigkeit irgendwoher aus der konstanten Summe der Energie genommen zu sein, so würde immer noch ein Unendlichkleines niedrigeren Grades plötzlich auftreten können und den Ausschlag bewirken, ohne vorher der Naturnotwendigkeit unterworfen zu sein. Eine solche Einwirkung könnte man frei nennen, indem ihr Auftreten unabhängig von der Naturnotwendigkeit jener räumlich-zeitlichen Welt ist und auch, nachdem sie da ist, keine andere Änderung hervorbringt, als daſs die vorhandenen Spannkräfte sich nun in bestimmter Weise auslösen. Diese Art von Freiheit wäre es möglich nun einem Willen zuzuschreiben, und dieser Wille wäre fähig, mit Hilfe solcher angenommener Gleichgewichtszustände (bemerkbar durch seelisches Schwanken) die Handlung frei so oder so zu bestimmen.

Nach unseren früheren Betrachtungen ist allerdings einer derartig kleinen räumlichen Einwirkung eine andere Art des Seins zuzuschreiben als dem mit nur endlichen Gröſsen behafteten Sein der Energiesumme der zeitlich-räumlichen Welt. Aber da zweifellos der Wille eine andere Seinsstufe wie das Räumlich-Körperliche hat und Seinsbeziehungen zwischen den verschiedenen Seinsstufen angenommen werden können, so könnte auch sehr wohl jene mit dem Sein des Unendlichkleinen behaftete Einwirkung eine Art Seinsvermittlung zwischen dem Sein der mit endlicher Energiesumme aufgefaſsten räumlichen Welt und dem seelischen Sein des Willens vorstellen.

Eine ähnliche Rolle könnte auch das labile Gleichgewicht bei den Vorgängen der Zeugung spielen und danach eine entsprechende Theorie vom „toten Punkte“ gestaltet werden. Daſs auch hier das Sein des Seelischen mit dem Sein des Körperlichen in einer eigentümlichen Beziehung steht, die vor den übrigen Beziehungen der Seele und des Körpers während des Lebens etwas Besonderes voraus hat, ist klar. Alle naturwissenschaftlichen Beschreibungen und Forschungen

über die Zellenvorgänge erstrecken sich bisher auf das Endliche. Daſs sie eine wirkliche Lösung im philosophischen Sinne geben werden, ist aussichtslos trotz ihrer unzweifelhaften Bedeutung für die Naturwissenschaft. Auch möchte ich nicht behaupten, daſs die Annahme einer besonderen Art des labilen Gleichgewichtes und einer unendlichkleinen Störung desselben bei der Befruchtung eine solche vollkommene Erklärung böte, aber sie machte folgende Fortschritte möglich. Erstens würde man das Gebiet der Forschung bei diesem Probleme bewuſstermaſsen über das Endliche hinaus erweitern und sich dann der Grenzen bewuſst bleiben, die man bei allen endlichen anatomischen Erklärungen nicht überschreiten kann; zweitens würde man der Thatsache eher gerecht werden, daſs auſser dem naturwissenschaftlichen Sein auch noch ein allgemeineres Sein der Seele hierbei in Frage kommt; endlich würde das Unendlichkleine wiederum eine Art von Seinsvermittlung herstellen zwischen einer Art des seelischen Seins und dem räumlich-endlichen Sein. Es ist sehr wohl denkbar, daſs eine solche Theorie in direkte Berührung mit exakten Forschungen oder Theorieen der exakten Forschungen tritt. Es wäre z. B. nicht vollkommen ausgeschlossen, daſs durch eine einmalige Störung eines eigentümlichen, komplizierten labilen Gleichgewichtssystemes die sämtlichen Wachstumsvorgänge bis zum Tode des betreffenden Individuums ausgelöst würden. In der That kann man nicht umhin anzuerkennen, daſs die Befruchtung etwas ist, was für das ganze Leben des Individuums einzig dasteht. Für die Theorie der Vererbung könnte diese Annahme folgende erklärenden Möglichkeiten erschlieſsen: Wenn der in der Eizelle hergestellte labile Gleichgewichtszustand ein derartig verwickelter ist, daſs darinnen die später sich zeigenden Anlagen des Individuums vorgebildet sind — und vielleicht auch noch solche, die sich thatsächlich später nicht zeigen — so könnte durch das Eindringen des Spermatozoon eine bestimmte Auslösung stattfinden. Es könnte aber gleichzeitig auch im Spermatozoon ein labiler Gleichgewichtszustand hergestellt sein in ebenfalls verwickelter Art. Beide Gleichgewichtszustände könnten beim mechanischen Zusammenkommen Auslösungen von je nach den Umständen gewissen Arten gegenseitig bewirken; und nach diesen Vorgängen könnten die weiteren Eigenschaften des Individuums sich ohne einen solchen labilen Zustand nach endlichen Naturgesetzen weiter entwickeln. Es ist nicht vollkommen die Möglichkeit ausgeschlossen, daſs sich vielleicht zeitweilig partielle (oder spezielle, weniger verwickelte) labile Gleichgewichtszustände erhalten, wodurch etwa das Geschlecht des Kindes erst später bestimmt würde. Hier müſsten freilich rein naturwissenschaftliche Forschungen auf den Ausbau

der Theorie einwirken, wie dies ja immer bei Theorieen ist. Auch die Hemmungsvorgänge spielen natürlich bei einer solchen Theorie eine Rolle. Es scheint hier die Möglichkeit vorzuliegen, dafs solche gegenseitigen Auslösungen durch endliche, wenn auch sehr kleine Einwirkungen stattfinden, welche sich demnach in die endlichen Naturgesetze vollkommen hineinfügen. Besonders für die Erklärung der rein körperlichen Entwicklung wird dies möglicherweise ausreichen, auch wohl für die seelischen Eigenschaften insofern, als man sie einigermafsen in Parallele stellen kann zu körperlichen Vorgängen. Ist es freilich richtig, dafs es für die seelischen und körperlichen Vorgänge nur gewisse Vergleichspunkte giebt, z. B. den „Nullpunkt": dafs ohne zeitliche Arbeitsumsetzung auch kein zeitlicher Seelenvorgang da sei, so kann man auch nicht behaupten, dafs durch räumliche Störungen des labilen Gleichgwichtes die seelischen Vorgänge mit gesetzlicher Notwendigkeit vorausbestimmt würden. Bleibt nun gar die Möglichkeit, dafs während des Lebens gewisser organischer Wesen wie des Menschen labile Gleichgewichtszustände und Störungen durch freien Willen möglich sind, so müfsten auch in den vererbten und bei der Zeugung ausgelösten Systemen gewisse Untersysteme mit labilem Gleichgewichte vorhanden sein, bei denen das Unendlichkleine ausschlaggebend ist. Daraus ergäbe sich eine Bedeutung des Seins mit unendlichkleiner Behaftung auch für die Vorgänge der Zeugung.

Fragen wir, woher solche Gleichgewichtszustände in den Keimzellen der lebenden, reifen Individuen stammen, so erscheint als natürlichste Antwort, dafs sie zur Zeit der Reife regelmäfsig hergestellt werden. Zu begründen ist diese Herstellung ähnlich wie die übrigen vererbten Eigenschaften durch die Zeugung, oder sie kann wenigstens nicht bei der Betrachtung der Zeugung derartig weggelassen werden, dafs man nicht das Geringste in den Keimzellen annimmt, was jene Fähigkeiten nach sich ziehen kann. Kann man auch vor gewissen Zeiten nichts Besonderes in denjenigen Zellen des Embryos wahrnehmen, aus denen sich die Fortpflanzungsorgane bilden, so mufs man doch annehmen, dafs in ihnen oder ihren Ursprüngen die Gründe jener Entwicklung liegen. Folglich würde eine konsequente naturwissenschaftliche Theorie auch schon Gründe im labilen Gleichgewichtssysteme der Keimungszellen dafür annehmen, dafs später in dem entstehenden Individuum wiederum Keimungszellen mit ererbten bestimmten Zuständen entstehen.

Man sieht, dafs hier weiter geschritten werden kann zur Theorie der Entstehung der Arten und andererseits zur Konstanz der Arten. Es leuchtet ein, dafs man bei dem blofsen Worte „Neigung zur

Variation" nicht stehen bleiben kann, wenn man die Entstehung der Arten erklären will. Es müssen nun erstens die Variationen irgendwie mit den angenommenen Gleichgewichtszuständen der Zeugungszellen zusammenhängen; denn der Gedanke, daſs Variationen ohne Rücksicht auf die Zeugung (die Kreuzung usw.) nur durch die verschiedenen einwirkenden Umstände während des Lebens des Individuums bewirkt würden, ist neuerdings als unzulänglich erkannt worden, wenn man freilich auch bisher nicht soweit gekommen ist, labile Gleichgewichtszustände und das Unendlichkleine zur weiteren Erklärung heranzuziehen. Diejenigen Eigenschaften der entwickelten Individuen, die wir der Vererbung durch Generationen hindurch zuschreiben, sind zurückzuführen auf gleichartige Zustände in den jeweiligen Keimungszellen; und die Erhaltung dieser Zustände bis zur Geschlechtsreife ist entweder einer Erhaltung von Gleichgewichtszuständen oder der Neigung zur Herstellung von gleichartigen Zuständen zuzuschreiben. Diese Neigung wäre entweder auf die Erhaltung von weniger verwickelten Gleichgewichtszuständen zurückzuführen, die dann durch Herantreten der übrigen genügend gereiften Vorgänge wieder in den verwickelten Zustand übergehen, oder durch unendlichkleine, nicht in das Gebiet der räumlich-endlichen Gesetze gehörige Einwirkungen zu erklären. Bei letzterer Annahme spränge man ebenso aus dem Gebiete der rein naturwissenschaftlichen Erklärung heraus wie bei jener Einwirkung des freien Willens.

Eine Möglichkeit wäre ferner, daſs während des Lebens durch äuſsere Umstände (günstige oder ungünstige Lebensbedingungen) kleine Veränderungen in der Organisation der labilen Gleichgewichtszustände stattfänden. Diese Veränderungen werden naturgemäſs gering sein im Verhältnis zu dem übrigen ererbten Bau des Gleichgewichtszustandes. Gleichwohl werden sie sich mit diesem weiter vererben können und bei gleichen äuſseren Umständen auch in den Nachkommen wieder eine Verstärkung erfahren. Dann wäre die Variation nicht etwa ganz unabhängig von den Zeugungsvorgängen erklärt, sondern durch die erfahrene Veränderung der bei der nächsten Zeugung wirksamen Gleichgewichtszustände. Man sieht, daſs diese Erklärung von Variationen neben der anderen herlaufen kann, welche die Variation auf plötzlich entstehende Änderungen durch die Zeugung selbst (z. B. Kreuzung oder sogenannte Heterogenese) zurückführen will. Bei beiden Erklärungen dient die Theorie von dem labilen Gleichgewichte zum weiteren Ausbau des Verständnisses, eventuell auch die Annahme von unendlichkleinen Einwirkungen. Jene erworbene oder auch schon verstärkte Veränderung im Baue des Gleichgewichtszustandes kann möglicherweise bei bestimmten Umständen der Zeugung oder bei be-

stimmten Zuständen der anderen Zeugungszelle nicht zur Auslösung kommen, sodafs bei dem erzeugten Individuum diese Variation in der sichtbaren körperlichen Entwicklung fehlt, aber sich in der Fortpflanzung der Gleichgewichtszustände erhält und bei dem nächsten Nachkommen unter Umständen wieder zutage tritt. Die häufig bemerkte Thatsache, dafs gewisse Begabungen sich erst bei den Enkeln oder noch später wieder zeigen, fände damit wenigstens eine Erklärung, bei der man die Anschauung, nämlich eine sinnliche, endliche oder untersinnlichvorstellbare nicht ganz entbehrt.

Das Sein eines höchsten Wirklichen und die Weitenbehaftung.

Im Anschlusse an die Lehre von den Weitenbehaftungen sprachen wir nicht vom Sein schlechthin, sondern von verschiedenen Seinsstufen und schrieben auch diesen Seinsstufen nicht ein Sein für sich zu, neigten vielmehr zu der Vorstellung, dafs alle untereinander in Beziehung stehen, und suchten das Wesen des Seins in der Seinsbeziehung überhaupt. Bei dieser Art der Betrachtung sprachen wir wohl von allgemeinerem Sein, von verschiedener Anzahl der Seinsbeziehungen, wendeten aber nicht den Begriff des Hohen und Höchsten an. Es gehört auch nicht zu unserem Gegenstande solche Begriffe metaphysisch zu begründen, eigentliche Wertbetrachtungen, Erklärung der Begriffe: „erhaben, gut, gütig, mächtig", ja selbst eines solchen, wie es im Worte „alles" angedeutet ist, erfordern viel umfangreichere Überlegungen. Darum soll auch auf die eigentliche Bedeutung von Wörtern wie: „der Höchste, Allweise, Allmächtige, Allgütige" nicht eingegangen werden. Da indessen der Begriff des Unendlichen oft auf Gott angewendet wird, so wird es nötig sein die Stellung der Behaftungen zu dem Gottbegriffe anzudeuten.

Es ist selbstverständlich, dafs wir mit dem Namen „Gott" nicht das Einzelne, Beschränkte, das einzelne Verhältnis innerhalb von Behaftungen meinen können, wenn auch bei gewissen Ansichten von Gott dieses alles als Teil von ihm oder ihm untergeordnet zu bezeichnen ist. Auch die Behaftungen selbst können entweder als Gott angehörig hingestellt werden oder in etwas anderem Sinne als abhängig von der Macht oder dem Wesen Gottes.

Keinesfalls soll hier versucht werden zu zeigen, welche Definition von Gott eine richtige oder gar die richtigste ist, ob es Beweise für sein Dasein giebt usw. Es fragt sich aber, was für eine Bedeutung

es für die Lehre von den Behaftungen hat, wenn man Gott oder eine Eigenschaft Gottes unendlich nennt. Wenn man in pantheistischer Art glaubt, dafs alles, was es irgendwie giebt, auch Gott geradezu als Teil seines Wesens angehört, so würde man folgern, dafs die sinnlich vorgestellte Welt zu Gott gehört, und was darin erscheint, als etwas Göttliches zu betrachten ist. Die sinnlich vorgestellte Welt ist endlich. Zum Endlichen rechnen wir auch das Sinnlichvorstellbare; auch dieses müfste alsdann als Gott angehörig betrachtet werden. Daraus folgt zwar nicht der Satz: „Gott ist endlich", aber: „Jenes zu Gott Gehörige ist endlich, oder ein gewisses Sein, das endliche, stellt auch eine Art vom Sein Gottes vor." Wollte man also sagen: „Gott ist endlich", so wäre dies durchaus nicht ein kontradiktorischer Gegensatz zu: „Gott ist unendlich." Wir sahen ja ein, dafs die Worte „endlich" und „unendlich" unglücklich gebildet sind und genauer durch die Bezeichnungen „sinnlichvorstellbar, untersinnlichvorstellbar und übersinnlichvorstellbar" ersetzt werden müssen. Wir fanden auch, dafs es viele Grade des Unendlichen giebt. Das Unendliche ebenso wie das Endliche stellen Stufen des Seins vor, die sich nicht widersprechen, sondern sehr wohl gleichzeitig demselben Wesen zukommen können, vorausgesetzt, dafs dieses Wesen mehrere Arten des Seins umschliefsen kann.

Sagt man: „Gottes Macht ist unendlich", so pflegt man darunter zu verstehen: „Gottes Macht reicht weiter als das Endliche; er vermag Endliches zu wirken, aber auch Unendliches." Darf man sagen, es sei falsch, sich Gottes Macht endlich vorzustellen? Diese Frage ist unrichtig gebildet, sie verführt zu dem Gedanken, als dürfe man behaupten, Gottes Macht sei nur endlich. Die Behauptung: „Gottes Macht ist sowohl endlich als unendlich" klingt nur wie ein Widerspruch wegen der voreiligen Wahl dieser Wörter. Sagt man dafür erstlich: „Gottes Macht ist sinnlichvorstellbar", so verführt dieser Ausdruck leicht dazu zu glauben, man habe gemeint, es käme Gottes Macht nur die Eigenschaft zu sinnlichvorstellbar zu sein, nicht aber die Eigenschaft unendlich zu sein. Man thut deswegen besser sich so auszudrücken: es ist möglich ein sinnlichvorstellbares Bild von einer Seite der göttlichen Macht anzunehmen, ebensowohl aber auch der Macht Gottes die Stufe des unendlichen Seins zuzuschreiben; oder kurz: die Macht Gottes besteht in beiden Weitenbehaftungen. Auch das Sein des Unendlichkleinen ist bei jener Definition von Gott als eine Art göttlichen Seins anzunehmen.

Ob man einen persönlichen Gott annehmen, beweisen oder sich vorstellen kann, ist natürlich hier ebenfalls nicht zu untersuchen.

Nach der Lehre von den Seinsbeziehungen gehören aber zum Begriffe desselben gewisse Stufen des Seins und gewisse Beziehungen derselben. Nur die rohesten Völker mögen persönliche Wesen wie gewaltige Tiere oder auch endliche Erscheinungen wie das Gewitter geradezu als göttliche Persönlichkeiten anschauen in dem Sinne, dafs diese Gestalten und Erscheinungen das Göttliche selbst sind und nicht etwa nur eine Form oder ein Ausfluſs desselben. Wenn man sich in höher stehenden Religionen Gott in persönlicher Gestalt vorstellt, so ist damit nicht gemeint eine ausschliefslich räumlich-zeitliche Persönlichkeit mit dem bloſsen Sein des Sinnlichvorstellbaren. Es ist darum erklärlich, dafs solche Religionen ein endliches persönliches Erscheinen nur als eine zeitlich-göttliche Phase hinstellen. Wir würden sagen, ein solches Sein stehe auf der Stufe des Seins der endlichen Behaftungen wie die körperlich-zeitliche Existenz der Körperseele; aber schon bei dem bloſsen Begriffe der Seele unterschieden wir zwischen der Seele oder dem Seelischen in dem Sinne verschiedener Seinsstufen und zwischen dem Körperlich-Seelischen d. h. demjenigen, welches gemeint ist bei Fragen wie nach dem körperlichen Sitze der „Seele".

Mehrfach fanden wir, dafs auch an die Betrachtung der endlichen Welterscheinungen sich Unendliches ohne Widerspruch anreihen läfst — ich erinnere nur an das Krumme, die Differentiale und an das Unendlichkleine beim toten Punkte. Auch eine endliche Vorstellung des Göttlichen schliefst nicht aus, dafs sich in gewissen Stellen daran Vorstellungen des Unendlich-Göttlichen ohne Widerspruch knüpfen. Natürlich müssen, so lange man das Sein des Göttlichen auf eine Weitenbehaftung beschränkt, auch die Grundsätze desselben berücksichtigt werden. Bei der Verbindung des Seins verschiedener Weitenbehaftungen sind entweder die bereits festgestellten Sätze solcher Seinsbeziehungen anzuwenden, oder es wären derartige neue zu finden oder für möglich hinzustellen, welche dem Wesen der Seinsstufen und ihren Beziehungen nicht widersprechen. Ein Widerspruch gegen sonst bestehende Gesetze würde sich nur dann als kein wahrer Widerspruch erweisen, wenn die Betrachtung über dasjenige Sein hinausgerückt wäre, innerhalb dessen jene Gesetze gelten.

Als wichtiges Resultat ergiebt sich auch für die Lehre vom Göttlichen, dafs bei der Angabe der Eigenschaften des Göttlichen stets auf das sorgfältigste diejenigen Seinsgebiete unterschieden und angeführt werden müssen, innerhalb deren der betreffende Ausdruck für die Eigenschaft gemeint ist und Sinn hat. Durch ein Weglassen dieser Unterschiede entstehen wie bei den Sätzen über die Welt und

Ähnliches, so auch und zwar noch viel leichter bei den Sätzen über das Göttliche Widersprüche. Es ist nicht zu verwundern, daſs gerade in der Theologie so oft Streitigkeiten über Begriffe entstanden sind, die z. T. auch heute noch nicht entschieden wurden. Vielleicht ist hierfür auch die Lehre von den Behaftungen nicht ganz fruchtlos.

Mag auch mit dem Begriffe von Gott die Grenze der Vernunft berührt oder überschritten werden, so muſs doch innerhalb (!) des vernünftigen Denkens, also in allem, was man mittels des vernünftigen Denkens darüber aussagt, die Vernunft befragt werden können und nach widerspruchslosen Deutungen des Rätselhaften wenigstens streben.

Die Metaphysik der Möglichkeiten und die Behaftungen.

Es ist begreiflich, daſs ein Philosoph, der glaubt etwas Neues gefunden und damit die bisherigen Denkresultate widerlegt oder übertroffen zu haben, seine Lehre als die einzig richtige hinstellt. Zwar ist man im Laufe der Zeit durch die vielen Fälle eingebildeter Lösung von Schwierigkeiten, durch das immer erneute Umstürzen von sieghaften philosophischen Lehren vorsichtiger geworden und maſst sich nur selten an in jeder Beziehung das einzig Richtige gefunden zu haben. Aber den Kern ihrer Lehre pflegen bis heute die meisten neufindenden Geister als das einzig Richtige hinzustellen und mit Entschiedenheit das Entgegengesetzte für falsch zu erklären. Es ist diese Erscheinung nicht allein auf das Selbstbewuſstsein der Persönlichkeiten zurückzuführen, sondern es liegt auch darin die Überzeugung, daſs irgend eine Ansicht schlieſslich wahr sei und die anderen alsdann falsch sein müssen.

Mag man nun auch die sogenannte Wahrheit logisch verschieden definieren oder beschreiben, so bezeichnet man doch allgemein als ein notwendiges Merkmal einer wahren Ansicht, daſs keine Widersprüche darin vorkommen sollen. Von Widersprüchen kann immer nur die Rede sein entweder bei der logischen Ausgestaltung einer bestimmten einfachen Grundannahme oder bei der logischen Zusammenschweiſsung mehrerer in eine Linie gestellter Grundlagen. Natürlich müssen dann Gesetze vorhanden sein, welche für diese parallel gestellten Grundlagen gleichmäſsig gelten. Wie aber, wenn es keine solchen Gesetze giebt, mit denen man über Widersprüche, über Wahrheit oder Nichtwahrheit entscheiden kann? Wie, wenn man zwei kontradiktorische Gegensätze, etwa: „Die Naturgesetze haben einen

Zweck" und „die Naturgesetze haben keinen Zweck" nicht mittels einer höheren Logik entscheidend gegen einander abwägen kann? Wie, wenn man zwei solche für kontradiktorisch gehaltene Gegensätze dadurch vom Gegensatze befreit, dafs man einen Satzteil, wie „die Naturgesetze" in verschiedenem Seinssinne oder Umfange auffafst und so einen Regressus zu neuen Möglichkeiten herstellen kann?

Wer jene historische Thatsache und diese Überlegung recht auf sich wirken läfst, kann leicht zu dem verzweifelten Schlusse kommen, dafs man die metaphysische Wahrheit überhaupt nicht finden könne. Es ist der Satz, dafs der Mensch die Wahrheit an sich niemals finden wird, schon oft ausgesprochen worden, aber in dem skeptischen oder kritischen Sinne, wir seien infolge der Beschränktheit unseres Wesens ein für alle Male unfähig die Wahrheit auch nur auszusprechen, wenn sie uns geboten würde, oder wir würden durch die Wahrheit so geblendet werden, dafs unser Wesen sofort zu grunde gehen würde. Nach dem metaphysischen Relativismus mufs auch in allem, was wir in irgend einem Gebiete uns vorstellen oder denken, eine Art von Sein, eine Art von Wirklichkeit und damit auch eine Art von Wahrheit enthalten sein. Wir sprechen aber einer Ansicht die Wahrheit ab, wenn sie Widersprüche enthält. Man sieht, dafs in diesem letzten Satze das Wort „Wahrheit" in anderem Sinne gebraucht ist als in dem vorhergehenden, in dem man jeder Wirklichkeit eine Art Wahrheit zuschrieb. Wir werden uns die Frage vorlegen, ob es überhaupt eine metaphysische Lehre geben kann, welche vollkommen frei ist von Widersprüchen.

Es ist nicht undenkbar, dafs es jemand gelingen könnte in einem gewissen Gebiete, etwa in der Lehre von den Weitenbehaftungen, ein wohlgeordnetes Ganzes auszuarbeiten, welches Widersprüche im eigentlichen Sinne des Wortes nicht zeigt. Das Streben jedes philosophisch Arbeitenden geht natürlich dahin eine solche Lehre zu erreichen, wie es z. B. auch in diesem Buche meine Absicht war das Unendliche derart zu behandeln. Gelingt dies entweder durch irgend welche neuen Gedanken und neuen Unterscheidungen oder durch eine bisher nicht erreichte Vorsicht und Genauigkeit in der Darstellung, so wird man zugeben, die Darstellung sei richtig. Sie wäre dann nicht blofs richtiger als die bisher gegebenen Darstellungen; denn eine Lehre wird richtiger sein, wenn sie weniger oder geringere Widersprüche und Unverständlichkeiten enthält als die anderen; sondern sie wäre richtig, natürlich dies Wort nur in dem Sinne, dafs Widersprüche fehlen. Kann man auch behaupten, es wäre wenigstens in diesem Gebiete alsdann die Wahrheit erreicht worden?

Versteht man unter Wahrheit nichts weiter als das mit „richtig" oder „widerspruchslos" Bezeichnete, so wird man bejahen. Verlangt man aber von der Wahrheit, daſs sie, wenn auch nicht geradezu bewiesen in strengstem Sinne, so doch derartig unumstöſslich gewiſs sei, daſs eine andere Möglichkeit der Auffassung in keiner Weise mehr vorliegt, so ist durch jene bloſse Richtigkeit die Wahrheit nicht verbürgt.

Nun nimmt man aber gerade in der Metaphysik die Wahrheit als etwas derartig Strenges an, man strebt danach das allein Richtige zu denken und zu sagen. Daraus entsprang ja z. T. das Selbstbewuſstsein und der Mangel an Milde gegen andere, der sich in neuen philosophischen Lehren kund zu thun pflegt. Mit der bloſsen Richtigkeit innerhalb einer gewissen Lehre ist die Wahrheit nach auſsen hin gegenüber anderen allgemeineren Gebieten, mit denen die Lehre doch stets in Beziehung steht, nicht verbürgt. Es giebt keine Lehre, welche sich nicht irgend welcher Grundannahmen bedient. Aus dem Nichts oder aus dem „All" heraus läſst sich nicht ohne Hinzuziehung von Thatsachen, beziehlich thatsächlichen Einzelheiten innerhalb des Alls, irgend etwas Weiteres lehren; und diese Hinzuziehung kann in der Metaphysik Thatsachen nicht in dem Sinne finden, daſs dieselben auch in ihrer neuen Anwendung nichts blieben als die ursprünglichen einzelnen oder nackten Thatsachen. Immer wird durch das Hinzuziehen etwas Neues hineingedeutet, und dieses Hineindeuten selbst kann auch niemals eine Thatsache in strengstem Sinne sein, die man nicht verschieden auffassen oder verwerten könnte. So erscheint es unmöglich irgend einer, wenn auch widerspruchslosen Lehre eine gänzlich unangreifbare Stellung innerhalb der Gesamtmetaphysik anzuweisen. Freilich wird man der widerspruchslosen Lehre das Recht zugestehen, sich dem mit Widersprüchen Behafteten voranzustellen. Aber dann darf dieselbe doch nicht von sich behaupten, sofort wegen dieser etwa erreichten Widerspruchslosigkeit für alle Zeiten als die einzig mögliche widerspruchslose dazustehen; und selbst wenn ihr dieses Privilegium zugesichert werden könnte, so würde darum doch noch nicht streng bewiesen sein, daſs man diese Lehre für die allgemeinsten metaphysischen Wahrheiten überhaupt nötig habe. Könnte man freilich zeigen, daſs das Unendliche keinesfalls aus der Metaphysik gestrichen werden könnte, so würde eine für alle Zeiten einzig mögliche Darstellung des Unendlichen die einzige sein, die als Glied der allgemeinen metaphysischen Wahrheit dasteht. Aber es liegt keine Möglichkeit vor eine Lehre wie die vom Unendlichen als die einzig mögliche zu beweisen, auch dann nicht,

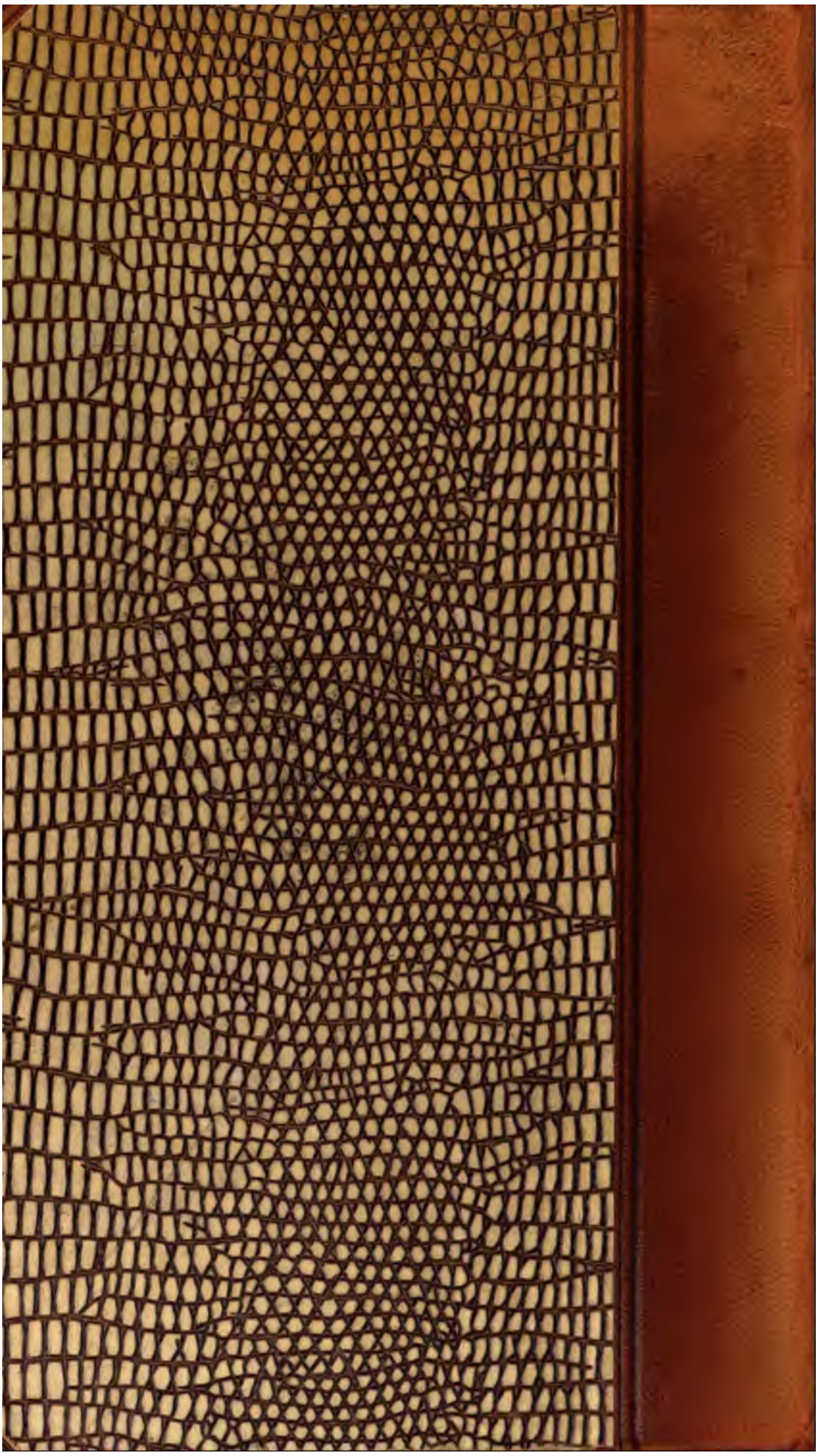
wenn sie widerspruchslos sein sollte und bis dahin noch keine einzige andere widerspruchslose Lehre vom Unendlichen aufgestellt ist.

Deswegen muſs man sich damit begnügen selbst eine solche, etwa widerspruchslose Lehre als möglich hinzustellen. Ich habe bei anderer Gelegenheit angedeutet, daſs allerdings eine solche Genügsamkeit für alle metaphysischen Lehren als passend erscheint. Es bedarf freilich diese Ansicht noch einer gründlichen Bearbeitung in einer Metaphysik der Möglichkeiten. Es soll dann auch gezeigt werden, daſs es nicht etwa eine ganz verschwommene, ganz beliebige Anzahl von Möglichkeiten giebt. Hier mag nur von der vorliegenden Lehre so viel wiederholt werden, daſs bisher zwar mehr als eine Idee über das Unendliche aufgestellt worden ist, die dann als möglich erscheinen würde, wenn man im stande wäre sie ohne Widersprüche in der Mathematik und Philosophie durchzuführen. Aber auch in diesem günstigsten Falle ist die Anzahl der bis jetzt aufgetauchten Grundideen über das Wesen des Unendlichen eine geringe, ja sogar eine sehr geringe. Mag sie jeder, der dazu im stande ist, um neue vermehren, sie werden verdienen selbst dann weiter geprüft zu werden, wenn es dem betreffenden Entdecker unmöglich ist, sie ohne Widersprüche auszubauen. Natürlich ist ein solcher Ausbau allemal dringend wünschenswert; solange er nicht gelingt, wird man zwar eine Idee, die wenigstens manches erklärt, nicht vergessen wollen, aber man wird ihr doch nicht den nach der „Metaphysik der Möglichkeiten“ höchsten Rang, den Rang des Möglichen einräumen.

Wer alles Vorstehende gelesen hat, wird nicht verlangen, daſs ich ein von mir als möglich behauptetes Wesen des Unendlichen zum Schlusse in wenigen Worten wiederhole, und wird hier zufrieden sein mit dem Ausdrucke: das Wesen des Unendlichen besteht darin, daſs es sich als je ein Glied bestimmter Art, mit bestimmten Beziehungen und Grundsätzen einordnet in die Reihe der „Weitenbehaftungen.“

C.1
Die grundsatze und das wesen d
Stanford University Libraries
3 6105 031 293 439

510.1 QA9
G313 G3

7135-0

G.E.STECHERT